

Prof. Dr. R. Höpfner

VORLESUNG STOCHASTIK I

Institut für Mathematik, Universität Mainz

Sommersemester 2012

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I: Grundbegriffe

A. σ -Algebren, Dynkin-Systeme, Masse: σ -Algebren - Erzeuger - Dynkin-Systeme - Masse - Wahrscheinlichkeitsmasse - Eindeutigkeitsatz

B. Algebren, Inhalte, Prämasse, Konstruktion von Massen: Algebren - Inhalte - Prämasse - Fortsetzungssatz

C. Beweis des Fortsetzungssatzes: äusseres Mass und eindeutige Fortsetzbarkeit σ -endlicher Prämasse

D. Messbare Abbildungen: Messbare Abbildungen - Bildmasse - messbare Abbildungen mit Werten in \mathbb{R} oder $\overline{\mathbb{R}}$ oder \mathbb{R}^d - Faktorisierungslemma

Kapitel II: Integration bezüglich eines Masses

A. Integrierbarkeit: messbare numerische Funktionen - Integral einer Elementarfunktion, einer nichtnegativen Funktion - monotone Konvergenz - integrierbare Funktionen und der Raum $L^1(\mu)$ - Bemerkungen zu Riemann- und Lebesgue-Integral

B. Die Räume $L^p(\mu)$, μ -fast sichere Konvergenz, Konvergenz in $L^p(\mu)$: die Räume $L^p(\mu)$ - Hölder-Ungleichung - Jensen-Ungleichung - Lemma von Fatou - μ -fast sichere Konvergenz - Satz von der dominierten Konvergenz - Vollständigkeit von $L^p(\mu)$

C. Endliche Masse μ : drei Konvergenzbegriffe: Beziehungen zwischen fast sicherer, stochastischer, L^p -Konvergenz - Teilfolgenkriterien - gleichgradige Integrierbarkeit

*Kapitel III: Lebesgue-Zerlegung von Massen

Absolutstetigkeit und Singularität von Massen - Beispiele - Lebesgue-Zerlegung σ -endlicher Masse - Satz von Radon-Nikodym - Standarddarstellung der Lebesgue-Zerlegung - Dichtequotienten - Transformationsformel für Dichten

Kapitel IV: Produkträume und Produktmasse

A. Endliche Produkte: Produkt- σ -Algebra - Messbarkeit von Schnitten - Produktmass - Satz von Fubini

B. Unendliche Produkte: Produkt- σ -Algebra - Produktmass

C. Unabhängigkeit: Unabhängigkeit von Ereignissen, von σ -Algebren, von Zufallsvariablen - Produktformeln - Produktdichten - Exkurs über Laplace-Transformierte von Massen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ - Exkurs über multivariate Normalverteilungen - Faltungen und Faltungsformeln

Kapitel V: 0-1-Gesetze, Dreireihensatz, starkes Gesetz der grossen Zahlen

A. Terminale σ -Algebra und 0-1-Gesetze: Kolmogorovs 0-1-Gesetz, Borel-Cantelli-Lemma

B. Konvergenz von Random Walks: Kolmogorov-Ungleichung - Konvergenzsatz - Zeichenproblem

C. Starkes Gesetz der grossen Zahlen: Kronecker-Lemma - Konvergenzsatz - SLLN für iid Folgen - Glivenko-Cantelli

***D. Kolmogorov-Dreireihensatz:** Kolmogorov-Dreireihensatz - Folgerungen

Kapitel VI: Schwache Konvergenz

A. Wahrscheinlichkeitsmasse auf metrischen Räumen, schwache Konvergenz, stochastische Konvergenz: schwache Konvergenz - Portmanteau-Theorem - Bemerkung zum 'continuous mapping theorem' - schwache und stochastische Konvergenz

B. Schwache Konvergenz auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ - drei wichtige Sätze: Verteilungsgleiche Ersetzung, Straffheit, Helly'scher Auswahlssatz

Kapitel VII: Charakteristische Funktionen

Definition und Grundeigenschaften - Beispiele - d -dimensionale Normalverteilung - Eindeutigkeitssatz - Stetigkeitssatz - Fourier-Inversion

Kapitel VIII: Der zentrale Grenzwertsatz

Dreiecksschemata von zeilenweise unabhängigen L^2 -Variablen - Bedingungen von Lindeberg, Feller, Lyapunov - ZGWS unter Lindeberg-Bedingungen - hinreichende und notwendige Bedingungen: Satz von Lindeberg-Feller - ZGWS in \mathbb{R}^d und Cramér-Wold-Device