Prof. Dr. R. Höpfner

VORLESUNG GRUNDLAGEN DER STOCHASTIK

Institut für Mathematik, Universität Mainz

Wintersemester 2015/2016

Inhaltsverzeichnis, Stand 03.02.2016

Kap. 0 Womit beschäftigt sich Stochastik?

Einige Worte für 'Zufall', einige grosse Namen aus den Anfängen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Präzise Begriffe oder 'Paradoxe': das Beispiel der Bertrand'schen Sehne im Einheitskreis.

Kap. I Über Ω und $\mathcal{A}$ und P

A. Diskrete Modelle, Würfelspiele: Wahrscheinlichkeit und σ-Algebra in diskreten Modellen, Beispiele: verschiedene Würfelspielmodelle

B. σ-Algebren: Definition σ-Algebra, erste Eigenschaften; Beispiel: unendliche Folge von Münzwürfen. Erzeuger einer σ-Algebra.

C. Wahrscheinlichkeitsmasse: Definition Wahrscheinlichkeitsmass, Mass, auf- und absteigende Stetigkeit. Existenz gewisser Wahrscheinlichkeitsmasse als 'Fakt', Lebesguemass, Borel-σ-Algebra, Verteilungsfunktionen.

D. Wichtige Masse auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$: Verteilungen mit Dichten: Gleichverteilung, Normalverteilung, Gamma-Verteilungen, Beta-Verteilungen. Exponentielle Wartezeiten und Poissonprozess. Diracmass, Poissonverteilung. Mischungen von Verteilungen.

E. Mehrdimensionale Normalverteilungen: Gestalt der Normaldichte in beliebiger Dimension $d \geq 1$. Spezialfall $d = 2$: explizite Formel für die Abhängigkeit der Marginalien.

Kap. II Kombinatorik

A. Laplace-Modelle: Ziehen mit Zurücklegen, Ziehen ohne Zurücklegen, k Kugeln in n Zellen, Geburtstagsproblem, k-elementige Teilmengen von $1, 2, \ldots, n$, Einschluss-Ausschluss-Formel.

B. Binomial-, Multinomial-, Hypergeometrische Verteilung: Definition, Interpretation, Eigenschaften.

Kap. III Unabhängigkeit

A. Bedingte Wahrscheinlichkeiten: (Elementar) bedingte Wahrscheinlichkeiten als Wahrscheinlichkeitsmass, Zerlegung nach disjunkten Ursachen, Bayesformeln, Beispiele.

B. Unabhängigkeit von Ereignissen: Definition, Abgrenzung von paarweiser Unabhängigkeit, Beispiele.

C. Zufallsvariable und Verteilung: Definition Zufallsvariable / messbare Abbildung, Verteilung einer ZV, $\mathbb{R}^d$-wertige ZV und Dichten auf $\mathbb{R}^d$, Transformationsformel, Beispiele.

D. Unabhängige ZV: Unabhängigkeit von ZV, Dichten mit Produktgestalt, Summe und Quotient unabhängiger Gamma-verteilter ZV, Anwendung auf Sprungzeiten im Poisson-Prozess. Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung, Unabhängigkeit der Zuwächse im Poisson-Prozess. Existenz allgemeiner iid Familien als 'Fakt'. Orthogonale Transformationen mehrdimensionaler Normalverteilungen. Geometrische Verteilung und Negativ-Binomialverteilungen, Beispiele: Wartezeitverteilungen in Würfelspiel- und Münzwurfmodellen.

E. Erwartungswerte und Integrale: Definition von $E_P(g(X_1, \ldots, X_k)) = \int_\Omega g(X_1, \ldots, X_k) dP$ für Verteilungen mit Dichten und für diskrete Verteilungen, Produktformeln für unabhängige ZV. Borel-Cantelli Lemma.

Kap. IV Momente und Faltungsformeln

für Verteilungen mit Dichten auf $\mathbb{R}^k$ und für diskrete Verteilungen: die Räume $L^p(P)$, $p \geq 1$, Erwartungswert, Varianz, Kovarianzmatrix. Varianzformel, empirischer Mittelwert und empirische Varianz, Korrelation. Beispiele in Normalverteilungen, Binomialverteilungen, Gammaverteilungen; stabile Verteilung mit Parameter $\frac{1}{2}$. Faltung von Wahrscheinlichkeitsmassen, Faltungsformeln, Faltungsfamilien. Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen, Momente, Produktformeln und Faltungen.

Kap. V Einfache Grenzwertsätze

A. Wichtige Ungleichungen: Markov- und Chebychev-Ungleichung, P-Nullmengen und Ereignisse von Wahrscheinlichkeit 1, Schwarzsche Ungleichung und Jensen-Ungleichung.

B. Das schwache Gesetz der grossen Zahlen: P-stochastische Konvergenz, Münzwurfbeispiele. Schwaches Gesetz der grossen Zahlen. P-fast sichere Konvergenz. Starkes Gesetz als 'Fakt'.

C. Der Satz von deMoivre-Laplace: Stirlingformel und Satz von deMoivre-Laplace. Beweisidee von LeMoivre. Allgemeine Fassung des Zentralen Grenzwertsatzes als 'Fakt'.

Kap. VI Etwas Statistik

Normalverteilungsexperiment, Schätzer für unbekannte Parameter, Verteilung des Paares (empirischer Mittelwert, empirische Varianz) im Normalverteilungsexperiment, t-Verteilungen, Konfidenzintervalle für den unbekannten Mittelwert, Hypothesen und statistische Tests, ein- und zweiseitiger t-Test für Hypothesen über den unbekannten Mittelwert.