Inhaltsverzeichnis zur Vorlesung Stochastische Analysis – SoSe17

Reinhard Höpfner

Update July 5, 2017

Kapitel I Grundbegriffe

A. Wiederholungen und Ergänzungen : stochastische Prozesse – Versionen und Ununterscheidbarkeit – Filtrationen und Adaptiertheit – die 'üblichen Hypothesen'

B. Messbarkeitsbegriffe für stochastische Prozesse : Messbare und $\mathbb{F}$-adaptierte stochastische Prozesse – $\mathbb{F}$-progressive Prozesse und $\mathbb{F}$-progressive Teilmengen von $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ – $\mathbb{F}$-optionale und $\mathbb{F}$-vorhersehbare Prozesse – die $\mathbb{F}$-optionale σ-Algebra $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ und die $\mathbb{F}$-vorhersehbare σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ – vorhersehbare Rechtecke

Kapitel II Stopzeiten

A. Vorhersehbare Stopzeiten : stochastische Intervalle – Stopzeiten und vorhersehbare Stopzeiten – ankündigende Folgen – Beispiele

B. Drei Sätze ohne Bew. / mit Ref.: Projektionssatz - Beginn einer progressiven Menge - Satz über die vorhersehbaren / optionalen Schnitte - Existenz ankündigender Folgen für vorhersehbare Stopzeiten unter üblichen Hypothesen

C. Vergangenheit vor T : Vergangenheit *bis zur Zeit* T und Vergangenheit *strikt vor* T - Einschränkung einer Stopzeit T auf ein Ereignis aus der Vergangenheit *bis zur Zeit* T - Zustand eines progressiven Prozesses zur Zeit T

D. Zerlegung von Stopzeiten: Zerlegung von Stopzeiten – völlig unerreichbare Stopzeiten – Zerlegung von Stopzeiten in einen erreichbaren und einen völlig unerreichbaren Anteil

E. Stopzeiten und càdlàg-Prozesse: càdlàg-Prozesse – Ausschöpfen dünner Mengen in $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ – Ausschöpfen der Sprünge von càdlàg-Prozessen – Darstellung von càdlàg-Prozessen, Sprünge über verhersehbare und völlig unerreichbare Stopzeiten – Darstellung vorhersehbarer càdlàg-Prozesse

Kapitel III Martingale

A. gleichgradige Integrierbarkeit, càdlàg-Pfade : Martingale, Submartingale, Doob-Ungleichungen, Upcrossings – càdlàg-Modifikation für Martingale und für Submartingale unter üblichen Hypothesen

B. Submartingale von Klasse [LD] : Definition – das Doléans-Mass λ_{M^2} auf $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ – Stopsätze – Beispiel: die Sprungzeiten im Poissonprozess sind völlig unerreichbar – $\mathbb{F}$-wachsende Prozesse – vorhersehbare wachsende Prozesse und Doob-Meyer-Zerlegung für Submartingale von Klasse [LD] (ohne Bew./mit Ref.) – Darstellung des Doleansmasses über den Doob-Meyer-Kompensator – $\mathbb{F}$-BV-Prozesse – Doob-Meyer-Zerlegung von M^2 und Meyerprozess/'Spitzklammerprozess' $< M >$ von M – Beispiele: Brownsche Bewegung, kompensierter Poissonprozess, Ein-Sprung-Sprungprozesse

Kapitel IV Stochastische Integrale

A. Die Räume $\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^{2,c}$: Eigenschaften von Martingalen in $\mathcal{M}^2$ – Hilbertraumstruktur von $\mathcal{M}^2$ – Konvergenz in $\mathcal{M}^2$ – Teilfolgen und auf $[0,\infty]$ gleichmässige Konvergenz fast aller Pfade

B. Stochastische Integrale $\int HdM$ für $M \in \mathcal{M}^2$ und $H \in L^2(M)$: vorhersehbare Integranden: der Raum $L^2(M) = L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P}(\mathbb{F}), \lambda_{M^2})$ – vorhersehbare Elementarprozesse – explizite Konstruktion von $\int HdM$ im Spezialfall von Elementarprozessen H – stochastische Integrale als lineare Isometrie $L^2(M) \to \mathcal{M}^2$ – Teilfolgen und auf $[0,\infty]$ gleichmässige Konvergenz fast aller Pfade – der Spezialfall linksstetiger Integranden – Verhalten unter Stoppen

C. Lokalisation : Die Räume $\mathcal{M}^2_{\text{loc}}, \Lambda^2(M)$ – lokalisierende Folgen – stochastisches Integral $\int HdM$ für $M \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ und $H \in \Lambda^2(M)$ – Eigenschaften des stochastischen Integrals – Beispiel: allgemeine Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse