**Reinhard Höpfner, Vorlesung 'Mathematische Statistik: Schätztheorie'**

# Präzisierung/Korrektur zur Definition 2.3 aus der Vorlesung von Montag 13.11.17:

November 23, 2017

**2.3$^{(i)}$ Definition:** Auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ betrachte ein Wahrscheinlichkeitsmass $P$ und ein $\sigma$-endliches Mass $\mu$.

a) $P$ heisst dominiert durch $\mu$ (oder $\mu$-absolutstetig), Schreibweise $P \ll \mu$, falls gilt:

$$\text{für jedes } A \in \mathcal{A}: \quad \mu(A) = 0 \implies P(A) = 0 .$$

b) $P$ heisst äquivalent zu $\mu$, Schreibweise $P \sim \mu$, falls gilt

$$\text{für jedes } A \in \mathcal{A}: \quad \mu(A) = 0 \iff P(A) = 0 .$$

**2.3$^{(ii)}$ Bemerkung:** Absolutstetigkeit $P \ll \mu$ gilt genau dann wenn

$(\times)$ es ex. eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $f : \Omega \to [0, \infty)$ mit $P(A) = \int_A f d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$ .

Die Funktion $f$ in $(\times)$, eindeutig bestimmt bis auf $\mu$-Nullmengen in $\mathcal{A}$, heisst $\mu$-Dichte von $P$, Schreibweise $f = \frac{dP}{d\mu}$.
Äquivalenz $P \sim \mu$ gilt genau dann wenn $f = \frac{dP}{d\mu}$ strikt positiv auf ganz $\Omega$ festgelegt werden kann.
Siehe: Satz von Radon-Nikodym, z.B.: R. Schilling, Mass und Integral, deGruyter 2015,
oder R.H., Online-Skript Stoch I+II, Kapitel 3.

**2.3$^{(iii)}$ Definition:** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein statistisches Experiment.

a) $\mathcal{P}$ heisst dominiert wenn es ein $\sigma$-endliches Mass $\mu$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ gibt so dass gilt

$$P \ll \mu \quad \text{für alle } P \in \mathcal{P} .$$

b) Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ heisst $\mu$-Nullmenge falls $\mu(N) = 0$ , $P$-Nullmenge falls $P(N) = 0$ .

c) Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ heisst $\mathcal{P}$-Nullmenge falls gilt

$$(*) \qquad P(N) = 0 \quad \text{für alle } P \in \mathcal{P} .$$

Mit $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ bezeichnet man die Klasse aller $\mathcal{P}$-Nullmengen in $\mathcal{A}$.

**2.3$^{(\mathrm{iv})}$ Beispiel:** Setze $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\Theta = \mathbb{R}$, betrachte

$$\mathcal{P} \ := \ \left\{ P_\vartheta := \mathcal{R}\left(\vartheta - \frac{1}{2}, \vartheta + \frac{1}{2}\right) \ : \ \vartheta \in \Theta \right\} .$$

Hier ist $P_\vartheta$ die Gleichverteilung auf einem Intervall der Länge 1 mit Zentrum $\vartheta$.

Als dominierendes Mass für $\mathcal{P}$ kann das Lebesgue-Mass $\mu := \lambda\!\!\lambda$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gewählt werden.

Legt man $\lambda\!\!\lambda$-Dichten $f_\vartheta := \frac{dP}{d\lambda\!\!\lambda}$ in der Form $f_\vartheta = 1_{(\vartheta - \frac{1}{2}, \vartheta + \frac{1}{2}]}$ fest, so gilt

$$(+) \qquad \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m \ \equiv \ 1 \quad \text{auf } \mathbb{R} \ .$$

Jede Lebesgue-Nullmenge $A \in \mathcal{A}$ ist eine $\mathcal{P}$-Nullmenge da $\mathcal{P} \ll \lambda\!\!\lambda$.

Wegen $(+)$ ist aber auch jede $\{P_m : m \in \mathcal{Z}\}$-Nullmenge eine Lebesgue-Nullmenge.

Insbesondere ist jede $\mathcal{P}$-Nullmenge eine Lebesgue-Nullmenge.

Die Klasse $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ stimmt also überein mit der Klasse aller Lebesgue-Nullmengen in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

**2.3$^{(\mathrm{v})}$ Definition:** Sei $\mathcal{P}$ dominiert durch $\mu$. Dann heisst $\mu$ <u>äquivalent zu $\mathcal{P}$</u> falls gilt

$$A \in \mathcal{A} \text{ so dass } P(A) = 0 \text{ für } \textit{alle } P \in \mathcal{P} \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \ = \ 0$$

(Schreibweise $\mathcal{P} \sim \mu$). Dies bedeutet, dass die Klasse $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ aller $\mathcal{P}$-Nullmengen in $\mathcal{A}$ mit der Klasse aller $\mu$-Nullmengen in $\mathcal{A}$ übereinstimmt.

**2.3$^{(\mathrm{vi})}$ Beispiel:** Äquivalenz $\mathcal{P} \sim \mu$ bedeutet also *nicht*, dass für ein *einzelnes* Wahrscheinlichmass $P_\vartheta \in \mathcal{P}$ jede $P_\vartheta$-Nullmenge auch eine $\mu$-Nullmenge wäre: dies macht das Beispiel 2.3$^{(\mathrm{iv})}$ deutlich, in dem für $\vartheta \in \Theta$ und $\mu = \lambda\!\!\lambda$ die Menge

$$A_\vartheta \ := \ \mathbb{R} \setminus \left(\vartheta - \frac{1}{2}, \vartheta + \frac{1}{2}\right] \ \in \ \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

eine $P_\vartheta$-Nullmenge, aber keine $P_{\vartheta+1}$-Nullmenge ist; erst recht ist $A_\vartheta$ keine Lebesgue-Nullmenge. $\square$