

```
#####
#
# R. Hoepfner
#
# Praktikum zu den 'Grundlagen der Stochastik'
#
# Simulation Brownscher Pfade (d=1)
#
# 02.12.18
#
#####

beobachtungsdauer <- 1 ;
  # einen wert 'T' fuer ein zeitintervall '[0,T]' vorgeben,
  # auf dem Pfade simuliert werden sollen
delta <- 10^(-4) ;
  # eine schrittweite fuer euler-schema
  # bzw fuer unabhaengige zuwaechse vorgeben
start <- 0 ;
  # einen startwert fuer den brownschen pfad vorgeben

# kern aller untenstehenden programme :

# variante 1 : unabhaengige normalverteilte
# zuwaechse kumulativ aufaddieren :

M <- ceiling( beobachtungsdauer / delta ) ;
xx <- delta * ( 0 : M ) ;
zuwaechse <- rnorm( M, 0, sqrt(delta) ) ;
yy <- cumsum( c( start, zuwaechse ) ) ;
plot( xx, yy, pch=16, cex=0.5, col=2 ) ;

plot( range(xx), range(yy), type="n", main="ein brownscher pfad" ) ;
lines( xx, yy, col=2 ) ;

# variante 2 : alternativ mit euler-schema

M <- ceiling( beobachtungsdauer / delta ) ;
xx <- delta * ( 0 : M ) ;
yy <- rep( start, length(xx) ) ;
  # zum ueberschreiben
i <- 1 ; while ( i < M ) {
  yy_alt <- yy[i] ;
  yy[i+1] <- yy_alt + sqrt(delta)*rnorm(1,0,1) ;
  i <- i+1 ;
} # ende while
plot( xx, yy, pch=16, cex=0.5, col=2 ) ;

plot( range(xx), range(yy), type="n", main="ein brownscher pfad" ) ;
lines( xx, yy, col=2 ) ;

# schreibe die simulation
# in form einer spaeter aufzurufenden funktion

# mit euler schema

rechne_BB <- function( beobachtungsdauer, delta, start ) {
  M <- ceiling( beobachtungsdauer / delta ) ;
  xx <- delta * ( 0 : M ) ;
  yy <- rep( start, length(xx) ) ;
  for ( i in 2:(M+1) )
    yy[i] <- yy[i-1] + sqrt(delta)*rnorm(1,0,1) ;
  yy } ; # simuliert den pfad einer brownschen bewegung
# per euler-schema mit schrittweite 'delta'
# ueber ein zeitintervall von 0 bis 'beobachtungsdauer'
# mit startwert 'start'

# test
```

```

xx <- delta * ( 0 : M ) ;
yy <- rechne_BB( beobachtungsdauer, delta, start ) ;
plot( xx, yy, pch=16, cex=0.5, col=2 ) ;

plot( range(xx), range(yy), type="n", main="ein brownscher pfad" ) ;
lines( xx, yy, col=2 ) ;

# oder mit unabhaengigkeit der zuwaechse
rechne_BB <- function( beobachtungsdauer, delta, start ) {
  M <- ceiling( beobachtungsdauer / delta ) ;
  zuwaechse <- rnorm( M, 0, sqrt(delta) ) ;
  yy <- cumsum( c( start, zuwaechse ) ) ;
  yy } ; # simuliert den pfad einer brownschen bewegung
# mit startwert 'start' und schrittweite 'delta'
# ueber ein zeitintervall von 0 bis 'beobachtungsdauer'

# test
xx <- delta * ( 0 : M ) ;
yy <- rechne_BB( beobachtungsdauer, delta, start ) ;
plot( xx, yy, pch=16, cex=0.5, col=2 ) ;

plot( range(xx), range(yy), type="n", main="ein brownscher pfad" ) ;
lines( xx, yy, col=2 ) ;

# bemerkung: beide verfahren sind 'exakte simulationen'
# im folgenden sinn: die zuwaechse der brownschen bewegung
# ueber ein zeitinterall der laenge 'delta' sind verteilt nach
# sqrt(delta)*rnorm(1,0,1) =d= rnorm(1,0,sqrt(delta))

#####
#
# zeichne viele brownsche pfade :
#
#####

r <- 3*sqrt(beobachtungsdauer) ;
# faustregel fuer feste fenstergroesse zum zeichnen des brownschen pfades
plot( c( 0, beobachtungsdauer ), c( start-r, start+r ), type="n", xlab="zeit", ylab="ort" ) ;
# bilderrahmen fuer zu zeichnende pfade
xx <- delta * ( 0 : M ) ;

# berechne und zeichne einen ersten pfad
farbe <- 2 ;
y1 <- rechne_BB( beobachtungsdauer, delta, start ) ;
lines( xx, y1, col=farbe ) ;

# zeichne beliebig viele brownsche pfade in dasselbe bild ein
# durch wiederholen von
y1 <- rechne_BB( beobachtungsdauer, delta, start ) ;
farbe <- farbe + 1 ;
lines( xx, y1, col=farbe ) ;

# man bekommt ein gefuehl dafuer, was brownsche pfade sind
# wenn man genug pfade gezeichnet hat, abschliessen mit
title(main="verschiedene pfade der brownschen bewegung") ;

#####

```

```

#
#   mehrere brownsche partikel wandern lassen :
#
#####

# zeitpunkte
M <- ceiling( beobachtungsdauer / delta ) ;
xx <- delta * ( 0 : M ) ;

# gewuenschte anzahl der brownschen pfade
N <- 16 ;
# erstelle eine matrix
# in der man zu jeder zeit die orte aller N brownschen partikel findet
feld <- matrix( 0, nrow=length(xx), ncol=N ) ;
for ( i in 1:N) feld[,i] <- rechne_BB( beobachtungsdauer, delta, start ) ;

# erstelle damit eine graphik mit wandernden teilchen:
r <- 3*sqrt(beobachtungsdauer) ;
plot( c( 0, beobachtungsdauer ), c( start-r, start+r ), type="n", bty="l", xlab="zeit",
ylab="ort" ) ;
for( i in 1:length(xx) ) {
  tt <- xx[i] * rep( 1, N ) ; # der aktuelle zeitpunkt N-fach hingeschrieben
  yy <- feld[i,] ; # die N partikelorte zu dieser zeit
  points( tt, yy, pch=18, cex=0.25, col=2 ) ;
} ; # diese schleife laesst die brownschen partikel als punkte wandern

##### ende 02.12.18 #####

```