Reinhard Höpfner

VORLESUNG GRUNDLAGEN DER STOCHASTIK

Institut für Mathematik, Universität Mainz

Wintersemester 2018/2019

Inhaltsverzeichnis 13.02.19

Kap. 0 : Womit beschäftigt sich Stochastik?

Kap. I : Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Kap. II : Kombinatorik

A. Laplace-Modelle: Laplace-Modelle, Ziehen mit Zurücklegen, Ziehen ohne Zurücklegen 2.1–2.3. Beispiel (Würfelspiel) 2.4. k Kugeln in n Zellen 2.4'–2.5, Beispiel (Geburtstage) 2.6. Anzahl aller k-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ 2.9. Einschluss-Ausschluss-Formel 2.10. Beispiel (Operngarderobe) 2.11.

B. Binomial-, Multinomial-, Hypergeometrische Verteilung: Definition, Interpretation, Eigenschaften, Beispiele 2.12–2.22'. Maximum-Likelihood-Schätzung der Anzahl der Fische im See 2.23.

Kap. III : Abhängigkeit und Unabhängigkeit

A. Bedingte Wahrscheinlichkeiten: Elementar bedingte Wahrscheinlichkeit aufgefasst als Wahrscheinlichkeitsmass 3.1–3.2, Zerlegung nach disjunkten Ursachen, Bayesformeln 3.3–3.4. Beispiel (Spielshow) 3.5, Beispiel (Reihenuntersuchung) 3.6.

B. Unabhängigkeit von Ereignissen: Allgemeine Definition 3.7, Abgrenzung von paarweiser Unabhängigkeit 3.8–3.9. Beispiele (Fussballspiel, unendlicher Münzwurf) 3.10–3.10".

C. Zufallsvariable und Verteilung: Definition Zufallsvariable / messbare Abbildung 3.11–3.11', Kriterien (diskrete ZV, $\mathbb{R}^d$-wertige ZV) und Beispiele 3.12–3.15, Verteilung einer Zufallsvariable 3.16–3.18, $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable mit Dichten 3.19–3.20, Transformationsformel für Dichten 3.21, Beispiele (d-dimensionale Normalverteilungen) 3.22–3.23', Beispiele (Gammaverteilungen, Betaverteilungen) 3.23".

D. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen: Allgemeine Definition 3.24–3.25, Unabhängigkeit und Produktgestalt von Dichten 3.26, Beispiel (Gammaverteilungen) 3.26', Unabhängigkeit und Produktgestalt bei diskreten ZV 3.26". Definition und Existenz allgemeiner i.i.d. Familien 3.27–3.28, Beispiel (unendlicher Münzwurf) 3.29. Wartezeitverteilungen in Würfelspiel- und Münzwurfmodellen: Geometrische Verteilung und Negativ-Binomialverteilung 3.30–3.31. Borel-Cantelli Lemma 3.31'–3.32'.

E. Mehr zum Poissonprozess: Verteilungen für Sprungzeiten und relative Lage zueinander 3.33–3.34, Poissonverteilung des Zustandes N_t zur Zeit t 3.35, Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung 3.36–3.36', aufsteigend geordnete k-Tupel in $(0, t)^k$ und Verteilung von $(T_1, \ldots, T_k)$ gegeben $N_t = k$ 3.37–3.38, Unabhängigkeit der Zuwächse im Poisson-Prozess 3.39.

Kap. IV : Momente und Faltungsformeln

A. Vorbemerkungen zur Integration: Konvention für Kapitel IV (entweder (1) diskreter Fall oder (2) kontinuierlicher Fall mit Dichte) 4.1; Positiv- und Negativteil einer 'messbaren' Funktion, Integration 'messbarer' Funktionen 4.2; Beispiele (Gammaverteilungen, stabile Verteilung mit Parameter $\frac{1}{2}$) 4.4; Produktformel unter Unabhängigkeit 4.5; p-fache Integrierbarkeit, die Räume $L^p(P)$, $p \geq 1$, Beispiele (normalverteilte ZV, beschränkte ZV) 4.6–4.9

B. Momente: Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Kovarianzmatrix 4.10–4.12; Beispiele (Binomialverteilungen, Normalverteilungen, Gammaverteilungen) 4.13; Varianzformel unter Unabhängigkeit 4.14; Skalierungsformel 4.14'; empirischer Mittelwert, empirische Varianz, Korrelation 4.15–4.17'; Beispiele für Abhängigkeit (zweidimensionale Normalverteilungen) 4.18–4.19; Quadrate normalverteilter ZV sind gammaverteilt 4.20

C. Faltungsformeln: Definition der Faltung 4.21; Faltung: diskreter Fall (1) mit $d = 1$ 4.22; Faltungsformeln I 4.23; wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion und Eindeutigkeitssatz 4.24–4.26; Beispiele (Poissonverteilung, Binomial- und Negativbinomialverteilung) 4.27; WEF von Faltungen, Produktformel, Faltungsformeln 4.28–4.29; Ableitungen der WEF in 1^- und Existenz von Momenten 4.30–4.31; Faltung: kontinuierlicher Fall (2) mit $d = 1$ 4.32; Definition der Laplacetransformierten und Bemerkung zur Eindeutigkeit 4.33–4.34; Beispiele (Normalverteilungen, Gammaverteilungen) 4.35; Faltung und Produktgestalt der Laplacetransformierten 4.36; Faltungsformeln II 4.37

Kap. V : Einfache Grenzwertsätze

A. Drei wichtige Ungleichungen: Markov/Chebychev 5.1, P-Nullmengen und P-f.s. Gleichheit 5.2–5.3, Schwarz 5.4, Jensen 5.5–5.5'

B. 'Schwaches Gesetz der grossen Zahlen' (WLLN): Relative Häufigkeiten im unendlichen Münzwurf 5.6, Definition der P-stochastischen Konvergenz 5.7–5.8, Schwaches Gesetz der grossen Zahlen (für i.i.d. ZV in $L^2(P)$) 5.9, P-stochastische Konvergenz im Beispiel 5.10, Definition der P-fast sicheren Konvergenz 5.11, Starkes Gesetz der grossen Zahlen 5.12–5.13

C. Zum zentralen Grenzwertsatz: Hauptsatz (deMoivre 1733) 5.14, Stirling-Formel 5.15, Beweisgang von deMoivre 5.16, allgemeine Formulierung für L^2–iid ZV 5.17–5.18, Beispiel (Wahlen) 5.19

D. Beispiel: eine Anwendung in der Statistik: L^2-Produktmodelle und statistische Experimente 5.20-5.21, Quantile 5.22, asymptotische Konfidenzintervalle in L^2-Lokationsmodellen 5.23, Normalverteilungsmodell: Konfidenzintervalle bei bekannter Varianz 5.24, bei unbekannter Varianz 5.25