Reinhard Höpfner

Vorlesung Stochastik I

Kapitel II: Integration bezüglich eines Masses

Sommersemester 2019

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

May 15, 2019

Übersicht zu Kapitel II :

A. Integrierbarkeit

Grundidee, messbare numerische Funktionen 2.1–2.2

Integral einer Elementarfunktion 2.3–(2.4)

Integral einer nichtnegativen Funktion 2.5–2.6

Satz von der monotonen Konvergenz 2.7 und Lemma von Fatou 2.8

integrierbare Funktionen 2.9–2.10

Nullmengen 2.11–2.11"

der Raum $L^1(\mu)$ 2.12

Bemerkungen zu Riemann- und Lebesgue-Integral 2.13

B. Die Räume $L^p(\mu)$, μ-f.s. Konvergenz, Konvergenz in $L^p(\mu)$

Jensen-Ungleichung 2.13'

Hölder-Ungleichung 2.14

die Räume $L^p(\mu)$, $p \geq 1$ 2.15

Konvergenz in $L^p(\mu)$ 2.15'

μ-fast sichere Konvergenz 2.16–2.16'

Satz von der dominierten Konvergenz 2.17

Vollständigkeit der Räume $L^p(\mu)$ 2.18

Inklusionen im Fall eines endlichen Masses 2.19

C. Spezialfall endlicher Masse: drei Konvergenzbegriffe

stochastische Konvergenz 2.20

Beispiele zu den drei Konvergenzbegriffen 2.21

Teilfolgenkriterien und Beziehungen zwischen den drei Konvergenzbegriffen 2.22–2.24

Definition der gleichgradigen Integrierbarkeit 2.25

Charakterisierungen der gleichgradigen Integrierbarkeit 2.25'–2.27

von der fast sicheren zur L^p-Konvergenz: gleichgradige Integrierbarkeit 2.28–2.28'

A. Integrierbarkeit

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, betrachte Funktionen

$$f, g: \ (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad \text{messbar.}$$

Sei μ ein Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Ist g eine $\mathcal{A}$-Elementarfunktion wie in 1.38', wird man das Integral von g bezüglich des Masses μ durch

$$\int g \, d\mu \ := \ \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \mu(A_i) \quad \text{falls } g = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i 1_{A_i} \ , \quad A_i \in \mathcal{A}$$

definieren, sofern alle A_i endliches μ-Mass besitzen. Nimmt f Werte in $[0, \infty]$ an, wird man eine gegen f aufsteigende Folge $(f_n)_n$ von $\mathcal{A}$-Elementarfunktionen wählen, etwa

$$f_n(\omega) \ := \ \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} \, 1_{\{\frac{k}{2^n} \le f < \frac{k+1}{2^n}\}}(\omega) \ + \ n 1_{\{f \ge n\}}(\omega) \ , \quad n \ge 1 \ , \ \omega \in \Omega$$

wie bereits im Beweisschritt 2) von 1.43, und wird setzen

$$\int f \, d\mu \ := \ \sup_n \int f_n \, d\mu \, ;$$

dabei muss man insbesondere sicherstellen, dass eine solche Definition nicht von der Wahl der betrachteten Folge $(f_n)_n$ von $\mathcal{A}$-Elementarfunktionen abhängt. Schliesslich wird man eine beliebige $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion in ihren Positiv- und Negativteil aufspalten, wie im Beweisschritt 3) von 1.43, um beide Teile separat zu integrieren. Das ist die Grundidee für dieses Kapitel. Um Limiten in $\overline{\mathbb{R}}$ betrachten zu können, arbeitet man von Anfang an mit messbaren Abbildungen $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ wie in 1.42. Das hier skizzierte Argumentationsschema kehrt häufig wieder: das Vorgehen, einen Beweis

i) zuerst für die Klasse der $\mathcal{A}$-Elementarfunktionen,

ii) danach für die Klasse aller nichtnegativen $\mathcal{A}$–messbaren Funktionen,

iii) schliesslich für alle $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen durch Aufspaltung in Positiv- und Negativteil

zu führen, kennzeichnet man mit dem Stichwort *Aufbau messbarer Funktionen.*

2.1 Notationen für dieses Kapitel: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

a) Eine messbare Abbildung $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ heisst *messbare numerische Funktion (MNF).* Eine *nichtnegative messbare numerische Funktion* ist eine $\mathcal{A}$-messbare Abbildung $f : \Omega \to [0, \infty]$. Die

Klasse aller nichtnegativen MNF bezeichnen wir mit $\mathcal{F}^+$.

b) Die Klasse der $\mathcal{A}$-Elementarfunktionen ist

$$\mathcal{E} \;:=\; \left\{ g = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i 1_{A_i} \;, \quad \alpha_i \in I\!R \;,\; A_i \in \mathcal{A} \;,\; \ell \geq 1 \right\} .$$

Die Teilklasse aller nichtnegativen $g \in \mathcal{E}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{E}^+$.

2.2 Hilfssatz: Seien g, f_n, $n \geq 1$, MNF auf $(\Omega, \mathcal{A})$, seien α, $\beta \in I\!R$, $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

a) $\{f_1 < f_2\}$, $\{f_1 \leq f_2\}$, $\{f_1 = f_2\}$, $\{f_1 \neq f_2\}$ sind in $\mathcal{A}$,

b) $g \cdot 1_A$ ist eine MNF,

c) falls für f_1, f_2 Summe, Produkt, Quotient auf ganz Ω wohldefiniert sind,
sind $f_1 \pm f_2$, $f_1 \cdot f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$ MNF,

d) $f_1 \vee f_2$ und $f_1 \wedge f_2$ sind MNF, $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$ und $\inf\limits_{n \geq 1} f_n$ sind MNF;
insbesondere sind Positivteil, Negativteil und Betrag einer MNF g

$$g^+ = g \vee 0 \;,\; g^- = -(g \wedge 0) \text{ (damit gilt } g = g^+ - g^- \text{)} \;,\; |g| = g^+ + g^-$$

wieder MNF,

e) $\limsup\limits_n f_n$ und $\liminf\limits_n f_n$ sind MNF,

f) konvergieren die Funktionen f_n punktweise auf Ω für $n \to \infty$, d.h. gilt

$$\forall\, \omega \in \Omega \text{ existiert } \quad \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \quad \text{in } \overline{I\!R},$$

so ist $f := \lim\limits_n f_n$ eine MNF auf $(\Omega, \mathcal{A})$,

g) stets gilt

$$\{\omega \in \Omega \;:\; \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ existiert in } \overline{I\!R}\} \;\in\; \mathcal{A}\,,$$

also ist

$$f \;:=\; \lim_{n\to\infty} \left(f_n \cdot 1_{\{\lim\limits_{n\to\infty} f_n \text{ existiert in } I\!R\,\}} \right)$$

eine MNF auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Beweis: Die Charakterisierungen der $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}(\overline{I\!R})$–Messbarkeit in 1.42 implizieren die Aussagen a)–d), in Analogie zu 1.41. Mit a)–d) folgt e) aus

$$\liminf_n f_n = \sup_{n\geq 1} \underbrace{\inf_{m\geq n} f_m}_{\text{wachsend in } n} \quad , \quad \limsup_n f_n = \inf_{n\geq 1} \underbrace{\sup_{m\geq n} f_m}_{\text{fallend in } n} .$$

f) ist ein Spezialfall von e). Für beliebige Folgen $(f_n)_n$ hat man nach a) und e) stets

$$A \;:=\; \{\lim_{n\to\infty} f_n \text{ existiert in } \overline{I\!R}\} \;=\; \{\limsup_n f_n = \liminf_n f_n\} \;\in\; \mathcal{A}\,.$$

Damit sind alle $f_n 1_A$ MNF, $n \geq 1$. Wendet man auf diese die Aussage f) an, ist g) bewiesen. $\square$

2.3 Hilfssatz: Sei μ ein Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Für nichtnegative Elementarfunktionen $g \in \mathcal{E}^+$ ist

$$\int g\, d\mu \;:=\; \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \mu(A_i) \quad \text{falls } g = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i 1_{A_i}$$

unabhängig von der für $g \in \mathcal{E}^+$ gewählten Darstellung definiert, und die Abbildung

$$I \;:\; \mathcal{E}^+ \ni g \;\longrightarrow\; \int g\, d\mu \;\in [0,\infty]$$

hat die Eigenschaften

$$(2.4) \qquad \begin{cases} I(1_A) = \mu(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{A} \\ I(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) \;=\; \alpha_1 I(g_1) + \alpha_2 I(g_2)\;, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \\ g_1 \leq g_2 \;\Longrightarrow\; I(g_1) \leq I(g_2)\;. \end{cases}$$

Beweis: Wir zeigen hier nur, dass die Abbildung $I : g \to \int g\, d\mu$ wohldefiniert ist. Alle anderen Aussagen ergeben sich danach elementar mit denselben Argumenten. Seien g_1, g_2 zwei Darstellungen desselben $g \in \mathcal{E}^+$:

$$g_1 \;=\; \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i 1_{A_i}\;, \quad A_i \in \mathcal{A} \text{ beliebig}$$

$$g_2 \;=\; \sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_{B_j} \quad \text{so dass } B_1, \ldots B_m \text{ in } \mathcal{A} \text{ paarweise disjunkt}\;.$$

Eine solche Darstellung existiert stets, und man kann die Mengen $B_1, \ldots, B_m$ so festlegen, dass für jedes Paar (i,j), $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, \ell$ entweder $B_j \subset A_i$ oder $B_j \cap A_i = \emptyset$ gilt. Da g_1 und g_2 dasselbe g darstellen, muss gelten

$$\beta_j = \sum_{\substack{i=1,\ldots,\ell \\ B_j \subset A_i}} \alpha_i, \qquad A_i = \dot{\bigcup_{\substack{j=1,\ldots,m \\ B_j \subset A_i}}} B_j$$

und die Additivität von μ erzwingt das Gewünschte:

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i\, \mu(A_i) \;=\; \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \sum_{\substack{j=1,\ldots,m \\ B_j \subset A_i}} \mu(B_j) \;=\; \sum_{j=1}^{m} \beta_j\, \mu(B_j)\;. \qquad \square$$

Der folgende Satz liefert den wesentlichen Schritt zur Definition von Integralen.

2.5 Satz: Die Abbildung $I : \mathcal{E}^+ \to [0,\infty]$ aus 2.3 kann fortgesetzt werden zu einer Abbildung $I : \mathcal{F}^+ \to [0,\infty]$ mit den Eigenschaften

$$(2.6) \qquad \begin{cases} I(1_A) = \mu(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{A} \\ I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \;=\; \alpha_1 I(f_1) + \alpha_2 I(f_2) \quad , \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \\ f_1 \leq f_2 \implies I(f_1) \leq I(f_2) \;. \end{cases}$$

Für $f \in \mathcal{F}^+$ und beliebige Folgen $(g_n)_n \subset \mathcal{E}^+$ mit $g_n \uparrow f$ gilt dabei

$$I(f) \;=\; \sup_{n \geq 1} I(g_n) \;.$$

Bemerkung: Damit ist das *μ-Integral von $f \in \mathcal{F}^+$*

$$\int f \, d\mu \;:=\; I(f)$$

wohldefiniert. Man schreibt auch $\mu(f)$ für $\int f \, d\mu$.

Beweis: 1) Zunächst existiert für jedes $f \in \mathcal{F}^+$ eine Folge $(g_n)_n \subset \mathcal{E}^+$ mit $g_n \uparrow f$ für $n \to \infty$, etwa wie im Beweis von 1.43

$$g_n \;:=\; \sum_{\ell=0}^{n2^n-1} \frac{\ell}{2^n} \, 1_{\{\frac{\ell}{2^n} \leq f < \frac{\ell+1}{2^n}\}} \;+\; n 1_{\{f \geq n\}} \;, \quad n \geq 1 \;.$$

Wegen Monotonie von $I(g_n)$ nach (2.4) ist $\sup\limits_n I(g_n)$ wohldefiniert in $[0,\infty]$. Zu zeigen ist, dass jede andere Wahl einer Folge $(\widetilde{g}_m)_m \in \mathcal{E}^+$ mit $\widetilde{g}_m \uparrow f$ auf denselben Wert des 'sup ...' führt.

2) Zeige: ist $g \in \mathcal{E}^+$, und ist $(g_n)_n \subset \mathcal{E}^+$ eine aufsteigende Folge mit $g \leq \sup\limits_n g_n$, so gilt

$$I(g) \;\leq\; \sup_n I(g_n) \;.$$

Beweis: Schreibe $g = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \alpha_i 1_{A_i}$ und betrachte für festes $\varepsilon > 0$

$$B_n := \{\, g_n \geq (1-\varepsilon) g \,\} \;\in \mathcal{A} \;.$$

Dann sind auch $g_n 1_{B_n}$ und $g 1_{B_n}$ in $\mathcal{E}^+$, und nach Definition der B_n:

$$\int g_n \, d\mu \;\geq\; \int g_n 1_{B_n} \, d\mu \;\geq\; (1-\varepsilon) \int g 1_{B_n} \, d\mu \;.$$

Wegen $g \le \sup_n g_n$ in diesem Beweisschritt ist die Mengenfolge $(B_n)_n$ aufsteigend gegen Ω. Mit 2.3 und mit aufsteigender Stetigkeit des Masses μ entlang $(A_i \cap B_n)_n$ folgt

$$\int g 1_{B_n}\, d\mu \;=\; \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i\, \mu(A_i \cap B_n) \;\longrightarrow\; \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i\, \mu(A_i) \;=\; \int g\, d\mu$$

für $n \to \infty$, und damit

$$\sup_n \int g_n\, d\mu \;\ge\; (1-\varepsilon) \int g\, d\mu$$

für beliebig kleines $\varepsilon > 0$: das zeigt die Behauptung.

3) Zeige: ist $f \in \mathcal{F}^+$ und sind $(g_n^{(i)})_n$, $i = 1, 2$, zwei aufsteigende Folgen in $\mathcal{E}^+$ mit $g_n^{(i)} \uparrow f$, so gilt

$$\sup_m \int g_m^{(1)}\, d\mu \;=\; \sup_n \int g_n^{(2)}\, d\mu\ .$$

Beweis: Für jedes feste m gilt

$$g_m^{(1)} \;\le\; \sup_{n \ge 1} g_n^{(2)}\ ,$$

also zeigt Schritt 2)

$$\int g_m^{(1)}\, d\mu \;\le\; \sup_{n \ge 1} \int g_n^{(2)}\, d\mu\ .$$

Da $(g_m^{(1)})_m \subset \mathcal{E}^+$ aufsteigend ist, zeigt die Monotonieeigenschaft in (2.4)

$$\sup_m \int g_m^{(1)}\, d\mu \;\le\; \sup_n \int g_n^{(2)}\, d\mu\ .$$

Nach Rollentausch der Indizes $i = 1, 2$ hat man genauso '$\ge$' und damit die Behauptung.

4) Wir setzen nun für $f \in \mathcal{F}^+$

$$(*) \qquad I(f) \;:=\; \sup_{n \ge 1} I(g_n) \quad \text{für} \;\; (g_n)_n \subset \mathcal{E}^+ \;\; \text{mit} \;\; g_n \uparrow f \quad \text{beliebig}\ ;$$

dabei ist $I(f)$ in $(*)$ wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge nach Schritt 3). Es bleibt zu zeigen, dass mit dieser Definition die Eigenschaften (2.6) erfüllt sind.

α) es gilt $I(1_A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}$: betrachte $g_n := 1_A$, $n \ge 1$, und benutze (2.4).

β) I ist monoton auf $\mathcal{F}^+$: Betrachte $f_i \in \mathcal{F}^+$, $(g_n^{(i)})_n \subset \mathcal{E}^+$, $g_n^{(i)} \uparrow f_i$; dann gilt für jedes feste m nach Schritt 2)

$$f_1 \le f_2 \;\Longrightarrow\; g_m^{(1)} \le \sup_n g_n^{(2)} \;\Longrightarrow\; I(g_m^{(1)}) \le \sup_n I(g_n^{(2)})$$

und $(*)$ impliziert

$$f_1 \le f_2 \;\Longrightarrow\; I(f_1) \le I(f_2)\ .$$

γ) I ist linear auf $\mathcal{F}^+$: Mit $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ und Folgen $(g_n^{(i)})_n$ in $\mathcal{E}^+$, die gegen $f_i \in \mathcal{F}^+$ aufsteigen,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 I(f_1) + \alpha_2 I(f_2) &= \alpha_1 \sup_n I(g_n^{(1)}) + \alpha_2 \sup_n I(g_n^{(2)}) \\
&\geq \alpha_1 I(g_m^{(1)}) + \alpha_2 I(g_m^{(2)}) \overset{(2.4)}{=} I(\alpha_1 g_m^{(1)} + \alpha_2 g_m^{(2)}) \\
&\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \sup_m I(\alpha_1 g_m^{(1)} + \alpha_2 g_m^{(2)}) = I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\ ;
\end{aligned}$$

genauso erhält man von $I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)$ ausgehend die umgekehrte Abschätzung

$$I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \;\geq\; \alpha_1 I(f_1) + \alpha_2 I(f_2)$$

und hat damit '='. Satz 2.5 ist vollständig bewiesen. $\square$

Jetzt können wir in 2.7 und 2.8 bereits zwei der drei wichtigsten Konvergenzsätze (siehe 2.17 für den dritten) formulieren.

2.7 Satz von der monotonen Konvergenz: Für aufsteigende Folgen $(f_n)_n$ nichtnegativer messbarer Funktionen gilt stets

$$I\left(\sup_{n\geq 1} f_n\right) \;=\; \sup_{n\geq 1}\; I\left(f_n\right) \;\in\; [0,\infty]\ .$$

Beweis: Nach 2.2 ist $f := \sup_{n\geq 1} f_n$ in $\mathcal{F}^+$. Wähle zu jedem der $f_n \in \mathcal{F}^+$ eine aufsteigende Folge $(g_{n,m})_m \subset \mathcal{E}^+$ mit $g_{n,m} \uparrow f_n$ für $m \to \infty$. Daraus baut man eine neue aufsteigende Folge

$$g_r \;:=\; g_{1,r} \vee \ldots \vee g_{r,r} \;\in\; \mathcal{E}^+\ , \quad r \geq 1$$

für die nach Konstruktion gilt

$$g_r \;=\; g_{1,r} \vee \ldots \vee g_{r,r} \quad\leq\quad f_1 \vee \ldots \vee f_r \;=\; f_r$$

und weiter, mit Bezug auf ein beliebig festzuhaltendes $i \in I\!N$,

$$(+) \qquad f \;=\; \sup_r f_r \;\geq\; \sup_r g_r \;\geq\; \sup_{r\geq i} g_{i,r} \;=\; f_i \;\geq\; g_i\ , \quad i \in I\!N\ .$$

Zusammen mit der Voraussetzung $f_i \uparrow f$ impliziert die Ungleichungskette (+)

$$\sup_r g_r \;=\; f\ ;$$

nach Definition des Integrals für $f \in \mathcal{F}^+$ folgt hieraus wegen $(g_r)_r \subset \mathcal{E}^+$

$$I(f) \; = \; \sup_r I(g_r) \; .$$

Mit der Monotonieeigenschaft (2.6) auf $\mathcal{F}^+$ aber zeigen die Abschätzungen (+) auch

$$I(f) \; \geq \; I(f_i) \; \geq \; I(g_i) \; , \quad i \in \mathbb{N}$$

was für $i \to \infty$ erzwingt

$$I(f) \; = \; \sup_{i \geq 1} I(f_i) \; . \qquad \square$$

2.8 Lemma von Fatou: Für beliebige Folgen $(f_n)_n$ nichtnegativer messbarer numerischer Funktionen gilt

$$\int \left(\liminf_{n \to \infty} f_n \right) d\mu \; \leq \; \liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu \; .$$

Beweis: Nach 2.2 gilt $f := \liminf_n f_n \in \mathcal{F}^+$. Weiter ist $h_n := \inf_{m \geq n} f_m$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{F}^+$ mit $h_n \uparrow f$ für $n \to \infty$; der Satz von der monotonen Konvergenz 2.7 zeigt also

$$(+) \qquad \int f \, d\mu \; = \; \sup_n \int h_n \, d\mu \; .$$

Für beliebiges festes n gilt

$$h_n \; = \; \inf_{r \geq n} f_r \; \leq \; f_m \quad \text{für alle } m \geq n$$

und also mit Monotonieeigenschaft (2.6) auf $\mathcal{F}^+$

$$\int h_n \, d\mu \; \leq \; \inf_{m \geq n} \int f_m \, d\mu \; .$$

Vorschalten eines '$\sup_n$' und Anhängen der letzten Ungleichung an (+) liefert die Behauptung. $\square$

2.8' Beispiel: Die Abschätzung '$\leq$' in 2.8 kann ohne Zusatzvoraussetzungen nicht zu einem '$=$' verbessert werden: Betrachte $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda\!\!\lambda)$. Ordne jeder natürlichen Zahl m durch Abspalten einer maximalen 2-Potenz in eindeutiger Weise ein Zahlenpaar $(n(m), k(m))$ zu

$$m = 2^{n(m)} + k(m) \, , \quad n(m) \in \mathbb{N}_0 \, , \; 0 \leq k(m) < 2^{n(m)}$$

und definiere eine Folge $(f_m)_m$ in $\mathcal{F}^+$ durch

$$f_m := 2^n 1_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]} \quad \text{mit } n = n(m), \, k = k(m) \; , \; m \in \mathbb{N} \, .$$

Man sieht sofort

$$\liminf_{m\to\infty} f_m(\omega) = 0 \quad \forall\, \omega \in \Omega\,; \qquad \int f_m\, d\mu = 1\,,\ \forall\, m \in I\!N\,. \qquad \Box$$

Wir haben in 2.5 für beliebige *nichtnegative* MNF f ein Integral $I(f) = \int f d\mu$ definiert: beachte, dass I eine Abbildung $\mathcal{F}^+ \to [0, +\infty]$ ist, und zum Beispiel im Fall $\mu(\Omega) = +\infty$ der konstanten Funktion $f \equiv 1$ das Integral $+\infty$ zugesprochen wird.

2.9 Definition: Eine messbare numerische Funktion f auf $(\Omega, \mathcal{A})$ heisst *μ-integrierbar*, wenn Positivteil $f^+ \in \mathcal{F}^+$ und Negativteil $f^- \in \mathcal{F}^+$ von f separat ein *endliches* Integral besitzen:

$$(*) \qquad \int f^+\, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int f^-\, d\mu < \infty\,;$$

unter $(*)$ definiert man das *μ-Integral von f* durch

$$\int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu.$$

Ist f μ-integrierbar und $A \in \mathcal{A}$, so schreibt man $\int_A f d\mu$ für $\int (f 1_A) d\mu$.

Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und ist f eine μ-integrierbare MNF, schreibt man auch $E(f)$ oder $E_\mu(f)$ anstelle von $\int f d\mu$. In Analogie zu 1.40 entspricht diese Schreibweise der Interpretation von f als $\overline{I\!R}$-wertiger Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

2.10 Hilfssatz: Für eine messbare numerische Funktion f sind folgende Aussagen gleichwertig:

i) f ist μ-integrierbar ,

ii) es existieren $u_i \in \mathcal{F}^+$ mit $\int u_i\, d\mu < \infty$ und $f = u_1 - u_2$,

iii) es existiert ein $u \in \mathcal{F}^+$ mit $\int u\, d\mu < \infty$ und $|f| \le u$,

iv) es gilt $\int |f|\, d\mu < \infty$.

Ist f μ-integrierbar, so gilt für jede Zerlegung $f = u_1 - u_2$ mit den Eigenschaften aus ii)

$$\int f\, d\mu \;=\; \int u_1\, d\mu - \int u_2\, d\mu\,.$$

Beweis: i) $\Longrightarrow$ ii): wähle etwa $u_1 := f^+$, $u_2 := f^-$; ii) $\Longrightarrow$ iii): Dreiecksungleichung für $u := u_1 + u_2$; iii) $\Longrightarrow$ iv): Monotonieeigenschaft (2.6) des Integrals auf $\mathcal{F}^+$; iv) $\Longrightarrow$ i): wegen $|f| = f^+ + f^-$ ist iv) genau die Bedingung in Definition 2.9.

Der Zusatz ergibt sich so: Schreibt man $f = u_1 - u_2$ mit $u_i \in \mathcal{F}^+$ und $\int u_i \, d\mu < \infty$, so ist

$$f^+ = f \cdot 1_{\{f>0\}} = (u_1 - u_2) 1_{\{f>0\}} \le u_1 1_{\{f>0\}} \le u_1 \, ;$$

genauso sieht man $f^- \le u_2$. Zusammen mit den beiden Darstellungen $f = f^+ - f^-$ und $f = u_1 - u_2$ erhält man $u_1 - f^+ = u_2 - f^- \in \mathcal{F}^+$. Wegen Linearität (2.6) des Integrals auf $\mathcal{F}^+$ kann man daher die Grösse

$$\left(\int f^+ \, d\mu + \int (u_1 - f^+) d\mu \right) \; - \; \left(\int f^- \, d\mu + \int (u_2 - f^-) d\mu \right)$$

sowohl in Form $\int u_1 \, d\mu - \int u_2 \, d\mu$ als auch in Form $\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$ schreiben. □

2.11 Hilfssatz: Ereignisse $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ nennt man *μ-Nullmengen in $\mathcal{A}$* oder auch *$\mathcal{A}$-Nullmengen unter μ*. Es gilt:

a) Ist $f \in \mathcal{F}^+$ μ-integrierbar, so ist $\{f = +\infty\}$ eine μ-Nullmenge in $\mathcal{A}$.

b) Ist $A \in \mathcal{A}$ eine μ-Nullmenge und f eine beliebige MNF auf $(\Omega, \mathcal{A})$, so gilt $\int_A f \, d\mu = 0$.

c) Gilt $\int |f| \, d\mu = 0$ für eine MNF f, so ist $\{f \neq 0\}$ eine μ-Nullmenge in $\mathcal{A}$.

Beweis: Die Aussage a) folgt mit der Monotonieeigenschaft (2.6) auf $\mathcal{F}^+$ aus

$$\infty > \int f d\mu \; \ge \; \sup_n \int \underbrace{(n 1_{\{f=+\infty\}})}_{\in \mathcal{E}^+} d\mu \; = \; \sup_n \, n\mu(\{f = +\infty\}) \, .$$

b) zeigt man analog: aus $\mu(A) = 0$ folgt für eine beliebige MNF f

$$\int |f| 1_A \, d\mu \; = \; \sup_n \int (|f| \wedge n) 1_A \, d\mu \; \le \; \sup_n \, n\mu(A) \; = \; 0 \, .$$

Die Aussage c) folgt aus

$$\{f \neq 0\} \; = \; \bigcup_{m \ge 1} \{|f| \ge \frac{1}{m}\} \quad , \quad \int |f| \, d\mu \; \ge \; \int (\frac{1}{m} 1_{\{|f| \ge \frac{1}{m}\}}) \, d\mu \; = \; \frac{1}{m} \mu(\{|f| \ge \frac{1}{m}\}) \, .$$ □

2.11' Definition: Zwei MNF f_1, f_2 auf $(\Omega, \mathcal{A})$ heissen *μ-äquivalent* falls $\mu(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.

Ein Beispiel: für die Gleichverteilung $\mu := \mathcal{R}((0,1))$ auf dem offenen Intervall $(0,1)$ in $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ ist $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ eine μ-Nullmenge in $\mathcal{B}(I\!R)$, und die drei MNF

$$f_1 \; := \; 1_{(0,1)} \; , \quad f_2 \; \equiv \; 1 \; , \quad f_3 \; := \; 1_{(0,1)} \; + \; \infty \, 1_{(0,1)^c}$$

sind μ-äquivalent. Ein Mass μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ kann $\mathcal{A}$-messbare Funktionen nie genauer unterscheiden als bis auf μ-Äquivalenz:

2.11" Hilfssatz: Betrachte zwei MNF f_1, f_2 auf $(\Omega, \mathcal{A})$, entweder beide μ-integrierbar oder beide nichtnegativ. Dann gilt

$$\mu(\{f_1 \neq f_2\}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_A f_1 \, d\mu \; = \; \int_A f_2 \, d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} \, .$$

Beweis: Die Implikation '$\Longrightarrow$' folgt aus 2.11 b): in Darstellungen

$$f_1 = f_1 1_{\{f_1 = f_2\}} + f_1 1_{\{f_1 \neq f_2\}} \quad , \quad f_2 = f_1 1_{\{f_1 = f_2\}} + f_2 1_{\{f_1 \neq f_2\}}$$

führt der jeweils zweite Term zu einem Integral über eine μ-Nullmenge wie in 2.11 b). Für '$\Longleftarrow$' betrachte man $A_m \in \mathcal{A}$ definiert als $\{f_1 \geq f_2 + \frac{1}{m}\}$ oder $\{f_2 \geq f_1 + \frac{1}{m}\}$: aus $\int_{A_m} f_1 \, d\mu = \int_{A_m} f_2 \, d\mu$ folgt dann $\mu(A_m) = 0$, für jedes $m \geq 1$. $\square$

Also kann die Abbildung $f \longrightarrow \int f \, d\mu$ sinnvoll nur auf den *Äquivalenzklassen μ-integrierbarer MNF* auf $(\Omega, \mathcal{A})$ betrachtet werden. Insbesondere ist jede μ-integrierbare MNF f μ-äquivalent zur $\mathbb{R}$-wertigen MNF $f' := f 1_{\{-\infty < f < +\infty\}}$. Damit ergibt sich aus 2.3 - 2.11 eine einfache Aussage:

2.12 Satz: Schreibe $L^1(\mu) = L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für die Klasse aller (Äquivalenzklassen von) μ-integrierbaren messbaren numerischen Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gilt:
$L^1(\mu)$ ist ein linearer Raum über $\mathbb{R}$, und die Abbildung

$$I \; : \; L^1(\mu) \; \ni \; f \quad \longrightarrow \quad \int f \, d\mu \; \in \; \mathbb{R}$$

ist in dem folgenden Sinn eine positive Linearform auf $L^1(\mu)$:

$$(2.12') \qquad \begin{cases} I(1_A) = \mu(A) \quad \forall \; A \in \mathcal{A} \\ I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \; = \; \alpha_1 I(f_1) + \alpha_2 I(f_2) \quad , \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ f_1 \leq f_2 \; \Longrightarrow \; I(f_1) \leq I(f_2) \, . \end{cases}$$

Beweis: 1) Homogenität: zerlege $f \in L^1(\mu)$ in Positiv- und Negativteil, dann für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha f)^{\pm} \; = \; \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \, f^{\pm}, & \alpha > 0 \\ |\alpha| f^{\mp}, & \alpha < 0 \end{array} \right\} \; \Longrightarrow \; I(\alpha f) = \alpha I(f) \, .$$

2) Additivität: für $f_1, f_2 \in L^1(\mu)$ schreibe

$$f_1 + f_2 = u_1 - u_2 \quad \text{mit} \quad u_1 := f_1^+ + f_2^+, \quad u_2 := f_1^- + f_2^- .$$

Dann sind $u_i \in \mathcal{F}^+$ und es gilt $\int u_i \, d\mu < \infty$: also gilt nach 2.10 und Linearität (2.6) auf $\mathcal{F}^+$

$$I(f_1 + f_2) \;=\; I(u_1) - I(u_2) \;=\; I(f_1) + I(f_2) .$$

3) Monotonie: Für $f_1 \leq f_2$ gilt $f_1^+ \leq f_2^+$, $-f_1^- \leq -f_2^-$, also $I(f_1) \leq I(f_2)$. □

2.13 Bemerkung: Ist insbesondere $\mu = \lambda\!\!\lambda$ das in 1.21 definierte Lebesgue-Mass auf $(I\!\!R^d, \mathcal{B}(I\!\!R^d))$, so heisst das in 2.9 und 2.12 definierte Integral *Lebesgue-Integral* auf $(I\!\!R^d, \mathcal{B}(I\!\!R^d))$.
Eine messbare Funktion $(I\!\!R^d, \mathcal{B}(I\!\!R^d)) \to (I\!\!R, \mathcal{B}(I\!\!R))$, welche in Einschränkung auf ein Kompaktum Riemann-integrierbar ist, ist in Einschränkung auf dieses Kompaktum auch Lebesgue-integrierbar, und die Integrale stimmen überein. Der Riemannsche Integrationsweg führt jedoch nur auf eher restriktiv definierten Funktionenklassen (wie z.B. der Klasse aller stetigen Funktionen $I\!\!R^d \to I\!\!R$ mit kompaktem Träger) zum Ziel. In Dimension $d = 1$ (der allgemeine Fall erfordert nur notationelle Änderungen) erläutern wir das genauer.
a) Betrachte die Dirichlet-Sprungfunktion $f : I\!\!R \to I\!\!R^+$ auf $(I\!\!R, \mathcal{B}(I\!\!R), \lambda\!\!\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $f \in \mathcal{F}^+$, also ist $I(f)$ nach 2.5 wohldefiniert; als abzählbare Menge ist $\{f \neq 0\}$ eine $\lambda\!\!\lambda$-Nullmenge in $\mathcal{B}(I\!\!R)$, also ist f $\lambda\!\!\lambda$-äquivalent zur konstanten Funktion $g \equiv 0$. Also gilt $f \in L^1(\lambda\!\!\lambda)$ mit $\int f \, d\lambda\!\!\lambda = 0$. Klar ist $f : [0,1] \to I\!\!R^+$ nicht Riemann-integrierbar.
b) Betrachte eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to I\!\!R^+$. Dann existiert eine Folge von Partitionen von $[a,b]$

$$\begin{cases} \pi_n : a := t_0^n < \ldots < t_{\ell(n)}^n =: b, \\ \mathrm{mesh}(\pi_n) := \max\limits_{1 \leq j \leq \ell(n)} (t_j^n - t_{j-1}^n) \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{für } n \to \infty \\ \pi_n \subset \pi_{n+1} \quad \forall\, n \end{cases}$$

so dass mit

$$m_j^n := \inf_{x \in [t_{j-1}^n, t_j^n]} f(x), \qquad M_j^n := \sup_{x \in [t_{j-1}^n, t_j^n]} f(x)$$

die Limites von Riemann-Obersummen und -Untersummen übereinstimmen:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell(n)} m_j^n (t_j^n - t_{j-1}^n)}_{=: s(f,\pi_n)} \;=\; \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell(n)} M_j^n (t_j^n - t_{j-1}^n)}_{=: S(f,\pi_n)} .$$

Betrachte

$$f_n := m_1^n 1_{[t_0^n, t_1^n]} + \sum_{j=2}^{\ell(n)} m_j^n 1_{]t_{j-1}^n, t_j^n]} \quad \in \mathcal{E}^+ \,, n \geq 1 \,,$$

$$F_n := M_1^n 1_{[t_0^n, t_1^n]} + \sum_{j=2}^{\ell(n)} M_j^n 1_{]t_{j-1}^n, t_j^n]} \quad \in \mathcal{E}^+ \,, n \geq 1 \,.$$

Dies sind Folgen von $\mathcal{B}(I\!R)$-Elementarfunktionen, $(f_n)_n$ ist aufsteigend, $(F_n)_n$ absteigend, und es gilt $f_n \leq f \leq F_n$ für jedes $n \geq 1$. Insbesondere ist $(F_n - f_n)_n$ eine absteigende Folge in $\mathcal{F}^+$, und für

$$g \;:=\; \lim_{n\to\infty} (F_n - f_n) \;\in\; \mathcal{F}^+$$

gilt nach Fatou 2.8 und wegen Riemann-Integrierbarkeit von f:

$$\int g \, d\lambda\!\!\lambda \;\leq\; \liminf_n \int (F_n - f_n) \, d\lambda\!\!\lambda \;=\; \lim_n \left(S(f, \pi_n) - s(f, \pi_n) \right) \;=\; 0 \,.$$

Also ist $\{g > 0\}$ eine $\lambda\!\!\lambda$-Nullmenge in $\mathcal{B}(I\!R)$: da nach der eingangs gemachten Voraussetzung $f 1_{[a,b]}$: $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R)) \to (I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ messbar ist, sind $f 1_{[a,b]}$ und $\sup_n f_n$ $\lambda\!\!\lambda$-äquivalent in $\mathcal{F}^+$, also ist nach 2.7 und 2.11" das Lebesgue-Integral von $f 1_{[a,b]}$ gegeben durch

$$\int f 1_{[a,b]} d\lambda\!\!\lambda \;=\; \int (\sup_n f_n) d\lambda\!\!\lambda \;=\; \sup_n \int f_n d\lambda\!\!\lambda \;=\; \sup_n s(f, \pi_n)$$

und stimmt also mit dem Riemann-Integral überein.

c) Lässt man nun die Voraussetzung der $\mathcal{B}(I\!R)$-$\mathcal{B}(I\!R)$-Messbarkeit von f fallen, so zeigt das Argument aus b) immer noch: aus Riemann-Integrierbarkeit von f auf $[a,b]$ folgt

$$\sup_n f_n \;\leq\; f 1_{[a,b]} \;\leq\; \inf_n F_n \;=\; \sup_n f_n \;+\; g$$

wobei die Funktionen auf der linken und der rechten Seite der Ungleichung $\mathcal{B}(I\!R)$-$\mathcal{B}(I\!R)$-messbar sind, $g \geq 0$, und $\lambda\!\!\lambda(\{g > 0\}) = 0$. Dies zeigt, dass eine auf $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktion f bis auf eine *Teilmenge einer* $\lambda\!\!\lambda$*-Nullmenge aus* $\mathcal{B}(I\!R)$ –siehe auch (+) unten– mit einer messbaren Funktion übereinstimmt. Diese *Teilmenge* wird jedoch im allgemeinen nicht mehr in der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(I\!R)$ enthalten sein.

d) *Komplettiert* man nun die σ-Algebra $\mathcal{B}(I\!R)$ bezüglich des Lebesgue-Masses $\lambda\!\!\lambda$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \;&:=\; \{ A' \subset I\!R : \text{ es gibt ein } A \in \mathcal{B}(I\!R) \text{ mit } \lambda\!\!\lambda(A) = 0 \text{ und } A \supset A' \,\} \\ \overline{\mathcal{B}(I\!R)}^{\lambda\!\!\lambda} \;&:=\; \sigma\left(\mathcal{B}(I\!R), \mathcal{N} \right) \;=\; \{ A \triangle N : A \in \mathcal{B}(I\!R) \,,\; N \in \mathcal{N} \} \\ \lambda\!\!\lambda(A \triangle N) \;&:=\; \lambda\!\!\lambda(A) \,, \quad A \in \mathcal{B}(I\!R) \,,\; N \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

($\mathcal{N}$ ist also das System aller *Teilmengen* von μ-Nullmengen in $\mathcal{B}(I\!R^d)$) so wird für jede auf $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktion f die Einschränkung

$$f 1_{[a,b]} \;:\; I\!R \longrightarrow I\!R$$

zu einer $\overline{\mathcal{B}(I\!R)}^{\lambda\!\!\lambda}$–$\mathcal{B}(I\!R)$–messbaren Funktion, für die das Integral nach Lebesgue mit dem Riemannschen Integral übereinstimmt: beachte

$$(+) \qquad \text{für alle } b > 0 \text{ gilt :} \quad \{\, f 1_{[a,b]} - \sup_n f_n > b \,\} \subset \{\, g > 0 \,\}$$

wobei $\{g > 0\}$ die oben genannte $\lambda\!\!\lambda$-Nullmenge aus $\mathcal{B}(I\!R)$ ist. □

B. Die Räume $L^p(\mu)$, μ-fast sichere Konvergenz, Konvergenz in $L^p(\mu)$

Wir beginnen mit einigen wichtigen Ungleichungen.

2.13' Jensensche Ungleichung: Sei I ein beliebiges Intervall in $I\!R$, sei $u : I \to I\!R$ eine konvexe Funktion. Für jede Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit den Eigenschaften

$$P(X \in I) \;=\; 1 \quad , \quad X \in L^1(P)$$

ist dann $E(u(X))$ wohldefiniert, und es gilt

$$u(E(X)) \;\leq\; E(u(X)) \;\in\; (-\infty, \infty] \,.$$

Beweis: 1) Eine Funktion $u : I \to I\!R$ ist konvex wenn es an jeder Stelle $\xi \in I$ (mindestens) eine Gerade g durch den Punkt $(\xi, u(\xi))$ gibt, mit geeigneter Steigung $\lambda \in I\!R$, so dass gilt

$$(+) \qquad \text{für alle } x \in I\text{:} \quad u(x) \;\geq\; u(\xi) + \lambda(x - \xi) \;=\; g(x) \,.$$

g heisst dann Stützgerade zu u im Punkt $(\xi, u(\xi))$.

2) In der einfachsten Fassung der Jensen-Ungleichung, in der man zusätzlich $u \circ X \in L^1(P)$ vorauszusetzen bereit ist (vgl. z.B. Georgii 2002 S. 111), ist der Beweis mit (+) schon fertig: man setzt $\xi := E(X)$ in (+) und erhält aus Linearität und Monotonie des Integrals die gewünschte Aussage. Wir brauchen eine Ungleichung ohne die genannte Zusatzvoraussetzung.

3) Zeige zuerst: hat $X \in L^1(P)$ die Eigenschaft $P(X \in I) = 1$, so gilt auch $E(X) \in I$:
Betrachte zunächst die untere Intervallgrenze von I und setze $\alpha := \inf I = \inf\{x : x \in I\}$. Falls $\alpha = -\infty$, gilt $E(X) > \alpha$ wegen $X \in L^1(P)$, und es ist nichts zu zeigen. Sei also $\alpha \in I\!R$. Im Falle $\alpha \in I$ hat man $X \geq \alpha$ P-fast sicher und damit $E(X) \geq \alpha$. Im Falle $\alpha \notin I$ hat man $X > \alpha$ P-fast sicher; zu zeigen ist $E(X) > \alpha$. Mit aufsteigender Stetigkeit existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass $P(X \geq \alpha{+}\varepsilon) > 0$, daher

$$E(X) \;=\; \int_\Omega X dP \;=\; \int_{\{X>\alpha\}} X dP \;=\; \int_{\{X\in(\alpha,\alpha+\varepsilon)\}} X dP \;+\; \int_{\{X\geq\alpha+\varepsilon\}} X dP \,.$$

Damit folgt

$$E(X) \;\geq\; a\,P(X \in (\alpha, \alpha+\varepsilon)) + (\alpha{+}\varepsilon)\,P(X \geq \alpha{+}\varepsilon) \quad > \quad \alpha\,.$$

Bezüglich der unteren Intervallgrenze α ist daher die Behauptung in allen Fällen gezeigt. Bezüglich der oberen Intervallgrenze $\beta = \sup I$ argumentiert man analog.

4) Betrachte nun u, ξ, g und λ wie in Schritt 1), und X wie in Schritt 3). Für $\xi := E(X) \in I$ ist die Zufallsvariable $g(X) = u(\xi) + \lambda(X - \xi)$ in $L^1(P)$. Nach (+) ist $(u-g) \circ X$ eine nichtnegative messbare numerische Funktion, deren P-Integral

$$E\left((u-g) \circ X\right) \;\in\; (0, \infty]$$

nach 2.5 wohldefiniert ist. Wegen $g(X) \in L^1(P)$ dann auch das Integral

$$E(u(X)) \;=\; \int (u-g) \circ X \, dP \;+\; \int g \circ X \, dP \;\;\in\;\; (-\infty, \infty]$$

wohldefiniert, und die behauptete Ungleichung folgt aus (+) und der Linearität von g. □

2.14 Hölder-Ungleichung: Sei μ ein Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Für $p > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\int |f \cdot g| \, d\mu \;\leq\; \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^q \, d\mu\right)^{1/q} \;\leq\; \infty$$

für beliebige messbare numerische Funktionen f, g auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Beweis: Schreibe $f =: f_1$, $g =: f_2$, $p =: p_1$, $q =: p_2$. Dabei gilt $p_1 > 1$ und $\frac{1}{p_2} = 1 - \frac{1}{p_1}$. Es genügt, die Behauptung nachzuweisen für $\int |f_i|^{p_i} \, d\mu < \infty$ (sonst wäre die Behauptung trivial), für $f_i \in \mathcal{F}^+$ (sonst ersetze f_i durch $|f_i|$), und für $\int |f_i|^{p_i} \, d\mu > 0$ (sonst wäre eines der f_i μ-äquivalent zur konstanten Funktion 0). Aus

$$x \geq 0 \implies (1+x)^{\frac{1}{p_1}} \;\leq\; 1 + \frac{1}{p_1} x \;=\; \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1}(1+x)$$

folgt für $y_1 \geq y_2 > 0$

$$y_1^{\frac{1}{p_1}} y_2^{\frac{1}{p_2}} \;=\; y_2 \Big(\underbrace{\frac{y_1}{y_2}}_{\geq 1} \Big)^{\frac{1}{p_1}} \;\leq\; y_2 \left\{ \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} \left(\frac{y_1}{y_2} \right) \right\} \;\leq\; \frac{1}{p_2} y_2 + \frac{1}{p_1} y_1$$

und damit – wegen Symmetrie der rechten Seite – für beliebige $y_1, y_2 \geq 0$:

(+) $$y_1^{\frac{1}{p_1}} y_2^{\frac{1}{p_2}} \;\leq\; \frac{1}{p_1} y_1 + \frac{1}{p_2} y_2\,.$$

Setzt man nun insbesondere

$$y_i \;:=\; \frac{f_i^{p_i}}{\int |f_i|^{p_i} \, d\mu}\,, \quad i = 1, 2$$

(beachte die Annahme $0 < \int |f_i|^{p_i}\, d\mu < \infty$ oben) in die Ungleichung (+) ein, so ergibt sich

$$\frac{f_1}{\|f_1\|_{p_1}} \, \frac{f_2}{\|f_2\|_{p_2}} \;\leq\; \frac{1}{p_1} \frac{f_1^{p_1}}{\int |f_1|^{p_1} d\mu} \;+\; \frac{1}{p_2} \frac{f_2^{p_2}}{\int |f_2|^{p_2} d\mu} \;.$$

Integriert man beide Seiten bezüglich des Masses μ, ergibt sich auf der rechten Seite $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$, und die Behauptung ist bewiesen. □

2.15 Satz: Sei $1 \leq p < \infty$. Schreibe $L^p(\mu) = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für den Raum aller (μ-Äquivalenzklassen von) messbaren numerischen Funktionen f auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\int |f|^p\, d\mu < \infty$.

a) Dann ist $L^p(\mu)$ ein linearer Raum, und $\|f\|_p := \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}$ ist eine Norm auf $L^p(\mu)$.

b) Für $1 \leq s < r < \infty$ und beliebige messbare numerische Funktionen f gilt eine Abschätzung

$$\left(\int |f|^s\, d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \;\leq\; (\mu(\Omega))^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \cdot \left(\int |f|^r\, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \;\leq\; \infty \;.$$

Ist μ ein *endliches* Mass, impliziert dies $\|f\|_s \leq cst\, \|f\|_r$ für $f \in L^r(\mu)$, und damit

$$L^r(\mu) \;\subset\; L^s(\mu) \quad \text{für} \quad 1 \leq s < r \;.$$

Beweis: 1) Für $p = 1$ ist $L^1(\mu)$ nach 2.12 ein linearer Raum. Um zu sehen, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $L^1(\mu)$ ist, braucht man neben der Dreiecksungleichung nur 2.11 c):

$$\|f\|_1 = \int |f|\, d\mu \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad f \text{ ist } \mu\text{-äquivalent zur konstanten Funktion } 0 \;.$$

2) Sei nun $p > 1$. Für $f_1, f_2 \in L^p(\mu)$ gilt

$$|f_1 + f_2|^p \;\leq\; (2\, (|f_1| \vee |f_2|))^p \;\leq\; 2^p(|f_1|^p + |f_2|^p) \;.$$

und damit $f_1 + f_2 \in L^p(\mu)$. Also ist $L^p(\mu)$ ein linearer Raum. Definiert man zu $p > 1$ ein $q > 1$ durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (insbesondere dann $(p-1)q = p$) und schreibt mit Hölder

$$\begin{aligned}
\int |f_1 + f_2|^p\, d\mu \;&\leq\; \int |f_1||f_1 + f_2|^{p-1}\, d\mu + \int |f_2||f_1 + f_2|^{p-1}\, d\mu \\
&\leq\; \left((\int |f_1|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int |f_2|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} \right) \left((\int |f_1 + f_2|^{p-1})^q\, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\
&=\; \left((\int |f_1|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int |f_2|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int |f_1 + f_2|^p\, d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} \;,
\end{aligned}$$

so folgt die Dreiecksungleichung

$$\left(\int |f_1 + f_2|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \;\leq\; (\int |f_1|^p\, d\mu\,)^{\frac{1}{p}} + (\int |f_2|^p\, d\mu\,)^{\frac{1}{p}} \;.$$

Damit ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $L^p(\mu)$.

3) Für $1 \leq s < r < \infty$ liefert Hölder mit $p = \frac{r}{s} > 1$ für eine beliebige MNF f

$$\begin{aligned} \int |f|^s \, d\mu &= \int 1 \cdot |f|^s \, d\mu \leq \left(\int 1 \, d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int (|f|^s)^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int 1 \, d\mu \right)^{1-\frac{s}{r}} \left(\int |f|^r \, d\mu \right)^{\frac{s}{r}} \leq \infty \end{aligned}$$

und damit die behauptete Abschätzung. Falls μ ein endliches Mass ist, folgt $L^r(\mu) \subset L^s(\mu)$. □

Die folgende Definition ist nach 2.15 a) nun zwingend:

2.15' Definition: Seien f_n, $n \geq 1$, f (Äquivalenzklassen von) MNF in $L^p(\mu)$. Konvergenz in $L^p(\mu)$

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{in } L^p(\mu) \text{ für } n \to \infty$$

ist Konvergenz im Sinne der $L^p(\mu)$-Norm

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Wenn aber messbare numerische Funktionen als Elemente des $L^p(\mu)$ nur noch bis auf μ-Äquivalenz im Sinne von 2.11' bestimmt sind, muss man einen Begriff von Konvergenz 'bei festem ω' entsprechend vorsichtiger formulieren.

2.16 Definition: Sei μ ein Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

a) Eine *$\mathcal{A}$-Menge von vollem μ-Mass* ist das Komplement einer $\mathcal{A}$-Nullmenge unter μ (vgl. 2.11).

b) Sei E eine Eigenschaft, so dass elementweise von jedem $\omega \in \Omega$ gesagt werden kann, ob ω die Eigenschaft E besitzt oder nicht besitzt. Man sagt, *die Eigenschaft E gilt μ-fast sicher (μ-f.s.)*, falls es eine $\mathcal{A}$-Menge von vollem μ-Mass gibt, so dass alle Elemente dieser Menge die Eigenschaft E besitzen.

Bemerkung: In 2.16 b) wird im allgemeinen $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega\colon\ \omega \text{ erfüllt } E\}$ nicht zur σ-Algebra $\mathcal{A}$ gehören, d.h. kein 'Ereignis' sein. Man verlangt lediglich, dass Ω_0 als Teilmenge von Ω *Obermenge* einer $\mathcal{A}$-Menge von vollem μ-Mass sei.

2.16' Definition: Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Gibt es eine Menge $\widetilde{A} \in \mathcal{A}$ von vollem μ-Mass so dass gilt

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ existiert in } \overline{I\!R} \text{ für jedes } \omega \in \widetilde{A}$$

so sagt man, *die Folge* $(f_n)_n$ *konvergiert* μ*-fast sicher ('*μ*-f.s')*.

Nun kommen wir (nach 2.7 und 2.8) zum dritten der drei wichtigsten Konvergenzsätze.

2.17 Satz von der dominierten Konvergenz (Lebesgue): Sei μ ein Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sei $(f_n)_n$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sei $1 \leq p < \infty$. Gilt
i) die Folge $(f_n)_n$ konvergiert μ-fast sicher,
ii) es existiert ein $g \in \mathcal{F}^+$ mit

$$g \in L^p(\mu) \quad , \quad |f_n| \leq g \quad \mu\text{-fast sicher für jedes } n \geq 1,$$

so gibt es eine messbare numerische Funktion f auf $(\Omega, \mathcal{A})$ so dass

$$f \in L^p(\mu) \quad , \quad f_n \longrightarrow f \quad \text{in } L^p(\mu) \text{ und } \mu\text{-fast sicher.}$$

Beweis: 1) Abzählbare Vereinigungen von μ-Nullmengen in $\mathcal{A}$ liefert wieder eine μ-Nullmenge in $\mathcal{A}$. Daher gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A^c) = 0$ so dass

$$\forall\, \omega \in A : \quad |f_n|(\omega) \leq g(\omega)\,,\ n \geq 1\,, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ existiert in } \overline{I\!R}\,.$$

Nach 2.2 sind dann $\widetilde{f}_n := f_n 1_A$ MNF mit

$$(+) \qquad \forall\, \omega \in \Omega : \quad |\widetilde{f}_n|(\omega) \leq g(\omega)\,,\ n \geq 1\,, \quad \lim_{n\to\infty} \widetilde{f}_n(\omega) \text{ existiert in } \overline{I\!R}\,,$$

und $f := \lim_n \widetilde{f}_n$ ist eine MNF. Dies zeigt insbesondere die μ-fast sichere Konvergenz $f_n \to f$.

2) Wir zeigen die Konvergenz in $L^p(\mu)$. Aus (+) folgt $|f| \leq g$ auf Ω, und die Voraussetzung $g \in L^p(\mu)$ liefert $f \in L^p(\mu)$. Genauso impliziert (+) auch $\widetilde{f}_n \in L^p(\mu)$, für alle $n \geq 1$.
Definiere nun MNF $h_n := |\widetilde{f}_n - f|^p$, $n \geq 1$, und $h := (2 \cdot g)^p$. Diese sind nichtnegativ, es gilt $h_n \leq (2 \cdot g)^p = h$ auf ganz Ω, nach Voraussetzung $g \in L^p(\mu)$ sind die h_n, $n \geq 1$, h μ-integrierbar, und (+) liefert $h_n \to 0$ für $n \to \infty$ auf ganz Ω. Also zeigt Fatou 2.8

$$\begin{aligned}
\int h\, d\mu \;&=\; \int \left(\liminf_n \underbrace{(h - h_n)}_{\geq 0} \right) d\mu \;\leq\; \liminf_n \int (h - h_n)\, d\mu \\
&=\; \int h\, d\mu \;-\; \limsup_n \int h_n\, d\mu \;\leq\; \int h\, d\mu\,.
\end{aligned}$$

Das aber bedeutet '=', damit

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu \;=\; 0$$

und also

$$\|\widetilde{f}_n - f\|_p \;=\; (\int h_n \, d\mu)^{1/p} \;\longrightarrow\; 0\,.$$

Gezeigt ist: $\widetilde{f}_n \longrightarrow f$ in $L^p(\mu)$ für $n \to \infty$. Aber $\widetilde{f}_n$ und f_n sind μ-äquivalent, für jedes $n \geq 1$. Also ist die Behauptung bewiesen. $\square$

2.18 Satz: Sei μ ein Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sei $1 \leq p < \infty$.

a) Der Raum $L^p(\mu)$ ist vollständig.

b) Konvergiert $(f_n)_n$ gegen f in $L^p(\mu)$, so gibt es eine Teilfolge $(n_k)_k$ so dass gilt:

$$f_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \mu\text{-fast sicher.}$$

Beweis: 1) Wir zeigen zuerst, dass man aus jeder Cauchyfolge in $L^p(\mu)$ eine Teilfolge auswählen kann, welche μ-fast sicher und in $L^p(\mu)$ konvergiert. Sei $(f_n)_n$ Cauchy in $L^p(\mu)$, dann gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ existiert } n_0 = n_0(\varepsilon) \text{ so dass } \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq n_0(\varepsilon)\;.$$

Wähle eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ mit

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \;<\; 2^{-k}\,, \quad k \in \mathbb{N}$$

(es genügt, $n_k \geq n_0(2^{-k})$ zu fordern und dabei $(n_k)_k$ aufsteigend zu wählen). Definiere

$$g_\ell \;:=\; \sum_{k=1}^{\ell} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\,, \quad \ell \geq 1\,, \quad g \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

als Elemente des $L^p(\mu)$: wegen Dreiecksungleichung

$$\|g_\ell\|_p \;\leq\; \sum_{k=1}^{\ell} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \;\leq\; \sum_{k=1}^{\ell} 2^{-\ell}\,, \quad \ell \geq 1$$

sind diese als Vertreter von Äquivalenzklassen von Funktionen, welche μ-fast sicher auf Ω die oben angegebene Summendarstellung gestatten, in $L^p(\mu)$ wohldefiniert, und Fatou 2.8 zeigt $g \in L^p(\mu)$:

$$g = \liminf_{\ell\to\infty} g_\ell\,, \quad \int g^p \, d\mu \;=\; \int (\liminf_{\ell} g_\ell^p) \, d\mu \;\leq\; \liminf_{\ell} \int g_\ell^p \, d\mu \;<\; \infty\,.$$

Insbesondere gilt für jede Festlegung von $g \in L^p(\mu)$ dann auch

$$\mu(\{g = +\infty\}) \;=\; 0\,.$$

In Einschränkung auf das Ereignis $\{g < \infty\}$ aber konvergiert die Folge $(f_{n_k})_k$ sogar in $I\!R$. Damit ist bewiesen, dass man aus jeder Cauchyfolge in $L^p(\mu)$ eine Teilfolge auswählen kann, welche μ-fast sicher konvergiert. Für die so konstruierten $(f_{n_k})_k$ liefert der Satz von der dominierten Konvergenz 2.16 (mit $|f_{n_1}| + g \in L^p(\mu)$ als integrierbarer Majorante) eine MNF f mit

$$(+) \qquad f \in L^p(\mu) \quad , \quad f_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \mu\text{-fast sicher und in } L^p(\mu).$$

2) Hat man eine Cauchyfolge $(f_n)_n$ in $L^p(\mu)$, eine Teilfolge $(n_k)_n$ und ein f so dass (+) gilt, so zeigt eine weitere Anwendung der Cauchyeigenschaft auch

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{in } L^p(\mu) \text{ für } n \to \infty \ .$$

3) Mit Schritt 1) ist Aussage b) des Satzes bewiesen, da jede konvergente Folge insbesondere Cauchy ist. Schritte 1)+2) zeigen, dass Cauchyfolgen in $L^p(\mu)$ konvergieren; damit ist $L^p(\mu)$ vollständig. □

Zum Abschluss des Teilkapitels vermerken wir eine sofort aus 2.15 b) folgende Tatsache:

2.19 Satz: Sei μ ein *endliches* Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sei $1 < r < \infty$. Konvergiert $(f_n)_n$ gegen f in $L^r(\mu)$, so auch in $L^s(\mu)$ für jedes $1 \leq s \leq r$.

C. Spezialfall endlicher Masse: drei Konvergenzbegriffe

2.20 Definition: Sei μ ein endliches Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$, seien f_n, $n \geq 1$, f messbare numerische Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Man sagt, die Folge $(f_n)_n$ *konvergiert gegen f μ-stochastisch*, falls gilt

$$\text{für jedes } \varepsilon > 0 \ : \quad \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \ = \ 0 \ .$$

2.21 Beispiele: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}) = (I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ das Wahrscheinlichkeitsmass $\mu = \mathcal{R}[0,1]$, die Gleichverteilung auf $[0,1]$. Definiere drei Folgen $(f_\ell)_\ell$, $(g_\ell)_\ell$, $(h_\ell)_\ell$ in $\mathcal{F}^+$:

$$\begin{aligned}
f_{2^n+k} &:= k\,2^n \cdot 1_{[0,\frac{1}{2^n}]}, \quad k = 0,1,\ldots,2^n-1, \quad n \geq 1, \\
g_{2^n+k} &:= 1_{[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]}, \quad k = 0,1,\ldots,2^n-1, \quad n \geq 1, \\
h_{2^n+k} &:= 2^n \cdot 1_{[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]}, \quad k = 0,1,\ldots,2^n-1, \quad n \geq 1 \ .
\end{aligned}$$

Bezeichne f die konstante Funktion $f \equiv 0$. Für jedes feste $1 \leq p < \infty$ gilt dann für $\ell \to \infty$:

i) die Folge $(f_\ell)_\ell$ konvergiert μ-fast sicher, aber nicht in $L^p(\mu)$;

ii) die Folge $(g_\ell)_\ell$ konvergiert in $L^p(\mu)$, aber nicht μ-fast sicher;

iii) alle drei Folgen $(f_\ell)_\ell$, $(g_\ell)_\ell$, $(h_\ell)_\ell$ konvergieren μ-stochastisch gegen f;

iv) die Folge $(h_\ell)_\ell$ konvergiert weder μ-fast sicher noch in $L^p(\mu)$.

Dies folgt aus Betrachtung von z.B. $\|f_\ell - f\|_p$, $\mu(\{f_\ell \neq f\})$, und $\mu(\{\lim\limits_{\ell\to\infty} f_\ell \text{ existiert}\})$. □

2.22 Satz: Sei μ ein endliches Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$, seien f_n, $n \geq 1$, f messbare numerische Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gilt

$$f_n \to f \quad \mu\text{-fast sicher} \quad \Longrightarrow \quad f_n \to f \quad \mu\text{-stochastisch}\,.$$

Beweis: Es genügt, den Fall $f \equiv 0$ zu betrachten (sonst ersetze f_n durch $f'_n := f_n - f$). Zeige zuerst:

$$(*) \qquad f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\; \mu\text{-fast sicher} \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{n\geq m} |f_n| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\; \mu\text{-stochastisch}\;.$$

Zum Nachweis von $(*)$ betrachtet man Ereignisse

$$A_m^k := \{\sup_{n\geq m} |f_n| \geq \frac{1}{k}\} \quad , \quad A := \{\omega \in \Omega : \lim_n f_n(\omega) = 0\} = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{m=1}^\infty (A_m^k)^c \quad , \quad A^c = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{m=1}^\infty A_m^k$$

in $\mathcal{A}$. Für diese gilt

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\; \mu\text{-fast sicher} \iff \mu(A^c) = 0 \iff \mu(\bigcap_{m=1}^\infty A_m^k) \;=\; 0 \quad \text{für jedes feste } k\;\;.$$

Nach Definition ist für festes k die Folge $(A_m^k)_m$ absteigend in m, also ist die letzte Aussage wegen absteigender Stetigkeit des endlichen Masses μ (vgl. 1.17) äquivalent zu

$$\lim_{m\to\infty} \mu(A_m^k) \;=\; 0 \quad \text{für jedes feste } k\;\;,$$

das aber ist genau die Aussage

$$\sup_{n\geq m} |f_n| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mu\text{-stochastisch.}$$

Damit ist $(*)$ bewiesen. Mit $(*)$ und der offensichtlichen Inklusion

$$\{|f_m| > \varepsilon\} \;\subset\; \{\sup_{n\geq m} |f_n| > \varepsilon\}\,, \quad \varepsilon > 0$$

folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz präzisiert die zwischen μ-stochastischer und μ-fast sicherer Konvergenz bestehende 'Lücke' durch ein Auswahlkriterium, und liefert zugleich die Eindeutigkeit – bis auf μ-Äquivalenz –

des μ-stochastischen Limes einer Folge $(f_n)_n$.

2.23 Satz: Sei μ ein endliches Mass, seien f_n, $n \geq 1$, f messbare numerische Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Die folgenden Aussagen i) und ii) sind gleichwertig:

i) es gilt $f_n \to f$ μ-stochastisch für $n \to \infty$;

ii) zu jeder Teilfolge $(n_k)_{k \geq 1}$ der natürlichen Zahlen existiert eine weitere Teilfolge $(n_{k_\ell})_{\ell \geq 1}$ so dass $f_{n_{k_\ell}} \stackrel{\ell \to \infty}{\longrightarrow} f$ μ-fast sicher.

Beweis: Es genügt, die Behauptung im Fall $f \equiv 0$ zu zeigen (sonst ersetze f_n durch $f_n' := f_n - f$).

1) Gilt $f_n \to 0$ μ-stochastisch für $n \to \infty$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ so dass gilt

$$(*) \qquad \ell, \ell' \geq n_0(\varepsilon) \ : \quad \mu\left(\{|f_\ell - f_{\ell'}| > \varepsilon\}\right) \ < \ \varepsilon \,.$$

Der Beweis von $(*)$ folgt sofort aus

$$\{|f_\ell - f_{\ell'}| > \varepsilon\} \ \subset \ \{|f_\ell| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f_{\ell'}| > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

und der vorausgesetzten stochastischen Konvergenz der Folge $(f_n)_n$ gegen 0.

2) Wir zeigen i) $\Longrightarrow$ ii): Die Folge $(f_n)_n$ konvergiere μ-stochastisch gegen 0. Sei $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ eine beliebige Teilfolge von $(f_n)_n$. Mit $(*)$ kann man aus $(n_k)_k$ eine weitere Teilfolge $(n_{k_\ell})_\ell$ mit der Eigenschaft

$$\text{für } \ell = 1, 2, \ldots \ : \quad \mu(\{|f_{n_{k_{\ell+1}}} - f_{n_{k_\ell}}| > 2^{-\ell}\}) \ < \ 2^{-\ell}$$

auswählen (mit den Bezeichnungen aus $(*)$ reicht es, eine strikt monoton wachsende Folge $(n_{k_\ell})_\ell$ mit der Eigenschaft $n_{k_\ell} \geq n_0(2^{-\ell})$, $\ell \in I\!N$, bereitzustellen). Schreibe

$$A_\ell := \{|f_{n_{k_{\ell+1}}} - f_{n_{k_\ell}}| > 2^{-\ell}\} \quad , \quad A \ := \ \limsup_{\ell \to \infty} A_\ell \ = \ \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\ell \geq m} A_\ell \,.$$

Wegen absteigender Stetigkeit von μ ist A als absteigender Limes der Mengenfolge

$$\bigcup_{\ell \geq m} A_\ell \quad , \quad m \to \infty \,, \quad \text{mit } \ \mu(A_\ell) < 2^{-\ell}$$

eine μ-Nullmenge in $\mathcal{A}$. Damit ist A^c eine $\mathcal{A}$-Menge von vollem μ-Mass, und

$$\begin{aligned} A^c \quad &= \quad \liminf_{\ell \to \infty} A_\ell^c \ = \ \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{\ell \geq m} A_\ell^c \\ &= \quad \{\omega \in \Omega : \text{es gilt } \ |f_{n_{k_{\ell+1}}} - f_{n_{k_\ell}}|(\omega) \leq 2^{-\ell} \ \text{ für schliesslich alle } \ell\} \\ &\subset \quad \{\omega \in \Omega : \lim_{\ell \to \infty} f_{n_{k_\ell}}(\omega) \text{ existiert}\}. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge $(f_{n_{k_\ell}})_\ell$ μ-fast sicher. Sei f^* eine Festlegung des μ-fast sicheren Limes. Zu zeigen bleibt, dass f^* μ-äquivalent zur konstanten Funktion 0 ist. Dies sieht man aus

$$(+) \qquad \{|f^* - 0| > \varepsilon\} \;\subset\; \{|f^* - f_{n_{k_\ell}}| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f_{n_{k_\ell}} - 0| > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$, wobei das μ-Mass der zweiten Menge auf der rechten Seite von (+) wegen

$$f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mu\text{-stochastisch nach Voraussetzung}$$

und das μ-Mass der ersten Menge auf der rechten Seite von (+) wegen

$$f_{n_{k_\ell}} \stackrel{\ell\to\infty}{\longrightarrow} f^* \quad \mu\text{-fast sicher (und damit nach 2.22 auch } \mu\text{-stochastisch)}$$

für $\ell \to \infty$ gegen 0 strebt. Dabei war $\varepsilon > 0$ beliebig, also ist f^* μ-äquivalent zur Funktion $f \equiv 0$. Damit ist eine Teilfolge $(n_{k_\ell})_\ell$ gefunden mit

$$f_{n_{k_\ell}} \stackrel{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mu\text{-fast sicher .}$$

3) Wir zeigen ii) $\Longrightarrow$ i). Für $\varepsilon > 0$ beliebig betrachte die Zahlenfolge

$$\alpha_n \;:=\; \mu(\{|f_n| > \varepsilon\})\ , \quad n \to \infty\ .$$

Zu zeigen ist $\alpha_n \to 0$. Angenommen, es sei $\limsup\limits_n \alpha_n =: \alpha > 0$. Dann kann man eine Teilfolge $(n_k)_k$ auswählen mit $\alpha_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Zu dieser wählen wir nach Voraussetzung ii) eine weitere Teilfolge $(n_{k_\ell})_\ell$ so dass $f_{n_{k_\ell}} \stackrel{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0$ μ-fast sicher. Nach 2.22 gilt dann aber auch $f_{n_{k_\ell}} \stackrel{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0$ μ-stochastisch, also $\lim\limits_{\ell\to\infty} \alpha_{n_{k_\ell}} = 0$ im Widerspruch zur gemachten Annahme. Also war diese absurd, es gilt $\alpha = 0$, und damit $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ μ-stochastisch. □

Der folgende Satz ist nun eine einfache Konsequenz aus 2.18 b) und 2.23:

2.24 Satz: Sei μ ein endliches Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$, $1 \le p < \infty$, seien f_n, $n \ge 1$, f messbare numerische Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Gilt dann

$$f_n\ ,\ n \ge 1,\ f \in L^p(\mu)\ , \quad f_n \to f \in L^p(\mu)$$

so gilt auch $f_n \to f$ μ-stochastisch.

Für endliche Masse μ ergibt sich aus 2.22 und 2.24 folgende Hierarchie von Konvergenzbegriffen:

$$\begin{tikzcd} \mu\text{-fs Konvergenz} \arrow[dr, Rightarrow] & & L^p(\mu)\text{-Konvergenz} \arrow[dl, Rightarrow] \\ & \mu\text{-stochastische Konvergenz} & \end{tikzcd}$$

Wir werden im Rest dieses Kapitels *Zusatzbedingungen* diskutieren, unter welchen man in diesem Diagramm von μ-fast sicherer Konvergenz auf $L^p(\mu)$-Konvergenz schliessen darf.

2.25 Definition: Sei μ ein endliches Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sei $\mathcal{H}$ eine Teilfamilie von $L^1(\mu)$. $\mathcal{H}$ heisst *gleichgradig μ-integrierbar* falls

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{H}} \int_{\{|f|\geq c\}} |f|\, d\mu \;=\; 0\,.$$

2.25' Hilfssatz: Sei μ ein endliches Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sei $\mathcal{H}$ eine Teilfamilie von $L^1(\mu)$. Genau dann ist $\mathcal{H}$ gleichgradig μ-integrierbar, wenn die folgenden Bedingungen i) und ii) erfüllt sind:

i) es gilt $\sup\limits_{f\in\mathcal{H}} \int |f|\, d\mu \;<\; \infty$;

ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass gilt:

$$A \in \mathcal{A}\,,\ \mu(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_A |f|\, d\mu \;<\; \varepsilon \quad \text{für alle } f \in \mathcal{H}\,.$$

Beweis: Für $c > 0$ schreibe $f^c := |f| 1_{\{|f|\geq c\}}$, dann gilt für beliebige $f \in \mathcal{H}$, $A \in \mathcal{A}$

$$(+) \qquad \int_A |f| d\mu \;\leq\; c \cdot \mu(A) + \int f^c\, d\mu\,.$$

1) Sei $\mathcal{H}$ gleichgradig μ-integrierbar, sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es nach Definition 2.25 ein $c = c(\varepsilon) > 0$ so dass $\int f^c\, d\mu < \varepsilon/2$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Da $\mu(\Omega) < \infty$, folgt i) aus (+) mit $A = \Omega$. Setzt man $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\,c}$ in (+), so folgt auch ii).

2) Seien umgekehrt die Bedingungen i) und ii) erfüllt. Setze $M := \sup\limits_{f\in\mathcal{H}} \int |f| d\mu$ und wähle zu beliebigem $\varepsilon > 0$ zuerst ein $\delta > 0$ gemäss ii), danach ein $c > \frac{1}{\delta} M$: damit hat man $\delta = \delta(\varepsilon)$, $c = c(\varepsilon)$ so dass

$$\mu(\{|f| \geq c\}) \;\leq\; \frac{1}{c} \int |f| d\mu \;\leq\; \frac{1}{c} M \;<\; \delta \quad \text{für alle } f \in \mathcal{H}\,;$$

die Voraussetzung ii) liefert dann

$$\int_{\{|f|\geq c\}} |f| d\mu \;\leq\; \varepsilon \quad \text{für alle } f \in \mathcal{H}\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist dies die gleichgradige Integrierbarkeit der Familie $\mathcal{H}$. $\square$

Ein wichtiges hinreichendes Kriterium für gleichgradige Integrierbarkeit ist 'gleichmässige Beschränktheit höherer Momente' in folgendem Sinn.

2.26 Hilfsatz: Sei $\mathcal{H} \subset L^1(\mu)$. Gibt es eine nichtfallende Funktion $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = +\infty \quad \text{und} \quad \sup_{f\in\mathcal{H}} \int G \circ |f| \, d\mu < \infty ,$$

so ist die Familie $\mathcal{H}$ gleichgradig μ-integrierbar.

Beweis: Schreibe $M := \sup_{f\in\mathcal{H}} \int G \circ |f| \, d\mu$. Als nichtfallende Funktion ist G messbar. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da G nach Voraussetzung schneller als linear wächst, gibt es ein $c = c(\varepsilon) < \infty$ mit

$$G(t) \geq \frac{1}{\varepsilon} M \, t \quad \text{auf} \quad [c, \infty) .$$

Mit dieser Wahl von c erhält man

$$\sup_{f\in\mathcal{H}} \int_{\{|f|\geq c\}} |f| \, d\mu \leq \sup_{f\in\mathcal{H}} \varepsilon \frac{1}{M} \int_{\{|f|\geq c\}} G \circ |f| \, d\mu \leq \varepsilon$$

und damit die Behauptung. $\square$

2.27 Beispiel: Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sei $1 \leq p < \infty$, sei $(f_n)_n$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Die Bedingung

$$\text{es gibt ein } r > p \text{ so dass} \quad \sup_{n\geq 1} \int |f_n|^r \, d\mu < \infty$$

ist hinreichend für gleichgradige Integrierbarkeit von

$$\mathcal{H} := \{|f_n|^p : n \geq 1\} \subset L^1(\mu) .$$

Dies folgt sofort aus 2.26 mit $G(t) = t^{r/p}$, $t \geq 0$. $\square$

Nun die Antwort auf die Frage, unter welchen Zusatzbedingungen man im Diagramm der drei Konvergenzarten vor 2.25 von μ-fast sicherer Konvergenz auf Konvergenz in $L^p(\mu)$ schliessen darf:

2.28 Satz: Sei μ ein endliches Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sei $1 \leq p < \infty$.
Betrachte eine Folge $(f_n)_n \subset L^p(\mu)$ und eine messbare numerische Funktion f so dass

$$f_n \longrightarrow f \quad \mu\text{-fast sicher für } n \to \infty .$$

Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

i) $\mathcal{H} := \{|f_n|^p : n \geq 1\}$ ist gleichgradig integrierbar

ii) es gilt $f \in L^p(\mu)$, und $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in $L^p(\mu)$.

Beweis : 0) 'Dominierte' Teilmengen $\mathcal{H}$ von $L^1(\mu)$, d.h. solche mit

$$\text{es existiert ein } g \in L^1(\mu) \text{ so dass } |h| \leq g \text{ für alle } h \in \mathcal{H}$$

sind stets gleichgradig integrierbar: zuerst zeigt dominierte Konvergenz 2.17 für die Funktionenschar $g1_{\{g\geq c\}}$, $c \in I\!N$

$$\lim_{c\to\infty} \int_{\{|g|\geq c\}} g \, d\mu \ = \ 0 \ ;$$

wegen $|h| \leq g$ für alle $h \in \mathcal{H}$ folgt daraus

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{h\in\mathcal{H}} \int_{\{|h|\geq c\}} |h| \, d\mu \ = \ 0 \ .$$

1) Endliche Teilmengen $\mathcal{H}$ von $L^1(\mu)$ sind gleichgradig integrierbar: dies folgt aus Schritt 0) mit $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_\ell\}$ und $g := |h_1| + \ldots + |h_\ell|$.

2) Wir zeigen ii) $\Longrightarrow$ i): Es gelte Konvergenz von $(f_n)_n$ gegen f in $L^p(\mu)$. Für $A \in \mathcal{A}$ schreibe

$$\|f_n 1_A\|_p \ \leq \ \|(f - f_n)1_A\|_p + \|f 1_A\|_p \ \leq \ \|f - f_n\|_p + \|f 1_A\|_p \ .$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen Voraussetzung ii) und wegen Schritt 1) gibt es zur einelementigen Familie $\{|f|^p\} \subset L^1(\mu)$ gemäss 2.25' ein $\delta > 0$ so dass

$$A \in \mathcal{A} \ , \ \mu(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f 1_A\|_p \ = \ \left(\int_A |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \ < \ \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Wegen Voraussetzung ii) gibt es auch ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mit

$$\|f - f_n\|_p \ < \ \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } \ n \geq n_0 \ .$$

Zusammen ergeben die drei Abschätzungen

$$(+) \qquad A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) < \delta : \quad \|f_n 1_A\|_p < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0(\varepsilon) \, .$$

Die endliche Familie $\{|f_1|^p, ..., |f_{n_0-1}|^p\}$ ist nach Schritt 1) gleichgradig integrierbar: also gibt es ein $\delta' > 0$ so dass

$$(++) \qquad A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) < \delta' : \quad \|f_j 1_A\|_p < \varepsilon \quad \text{für } j = 1, ..., n_0(\varepsilon) - 1 \, .$$

Zusammen liefern (+) und (++) mit $\delta(\varepsilon) := \delta \wedge \delta'$ nach 2.25' die gleichgradige Integrierbarkeit der Familie $\mathcal{H} = \{|f_n|^p : n \geq 1\}$.

3) Zeige i) $\Longrightarrow$ ii): Sei nun $\{|f_n|^p : n \geq 1\}$ gleichgradig integrierbar. Nach 2.25' gilt

$$M \ := \ \sup_{n\geq 1} \int |f_n|^p \, d\mu \ < \ \infty$$

und mit Fatou 2.9 impliziert die vorausgesetzte μ-fast sichere Konvergenz $f_n \to f$

$$\int |f|^p \, d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \;\leq\; M \;<\; \infty \, .$$

Also gilt $f \in L^p(\mu)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Unter Voraussetzung i) gibt es ein $c = c(\varepsilon)$ mit

$$\int_{\{|f|\geq c\}} |f|^p \, d\mu \;<\; \varepsilon^p \quad , \quad \sup_{n\geq 1} \int_{\{|f_n|\geq c\}} |f_n|^p \, d\mu \;<\; \varepsilon^p \, .$$

Daraus erhält man mit einer 'Trunkation' $h_c(x) := x 1_{(-c,+c)}(x)$

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_p \;&\leq\; \|f_n 1_{\{|f_n|<c\}} - f 1_{\{|f|<c\}}\|_p + \|f_n 1_{\{|f_n|\geq c\}}\|_p + \|f 1_{\{|f|\geq c\}}\|_p \\
&\leq\; \|h_c \circ f_n - h_c \circ f\|_p + 2 \cdot \varepsilon \, .
\end{aligned}$$

Hier ist h_c beschränkt und messbar: da μ ein endliches Mass ist und da $(f_n)_n$ μ-fast sicher gegen f konvergiert, zeigt dominierte Konvergenz 2.17

$$\|h_c \circ f_n - h_c \circ f\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \, .$$

Die beiden letzten Formelzeilen zeigen $\|f_n - f\|_p \to 0$; damit ist die gewünschte Konvergenz $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$ bewiesen. □

Die Bedingungen des Satzes von der dominierten Konvergenz 2.17 waren – wie im Schritt 0) des Beweises von 2.28 gezeigt wurde – ein Spezialfall von gleichgradiger Integrierbarkeit. Folgende einfache Umformulierung von 2.28 ist häufig nützlich:

2.28' Satz: Sei μ ein endliches Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$, seien f_n, $n \geq 1$, f messbare numerische Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit

$$f_n \longrightarrow f \quad \mu\text{-fast sicher für } n \to \infty \, .$$

Für $1 \leq p < \infty$ sind folgende Aussagen gleichwertig:

i) die Familie $\mathcal{H} := \{|f_n|^p : n \geq 1\}$ ist gleichgradig integrierbar;

ii) es gilt $(f_n)_n \subset L^p(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$, und $f_n \to f$ in $L^p(\mu)$.

Beweis: Dies sieht man sofort mit den Argumenten des Beweises von 2.28. □