R. Höpfner: Statistik mit Rechnerübungen für Lehramtsstudierende, SoSe19

Übungsblatt 4 – tippfehlerkorrigierte Version

Abgabe per mail an `hoepfner@mathematik.uni-mainz.de` bis **MI 03.07.19**

Aufgabe 4.1 (Gütefunktion des t-Tests): Man betrachte den t-Test im Normalverteilungsmodell für vorgegebene $\mu_0 = 0.5$ und $\alpha = 0.1$, für kleine (etwa $n = 3, n = 5$) und 'mittlere' (etwa $n = 27, n = 31$) Werte von n.

a) Für einseitige Hypothesen **H**: $\mu \leq \mu_0$ gegen **K**: $\mu > \mu_0$ berechne und zeichne man die Gütefunktion des einseitigen t-Tests zum Niveau α (unter Ausnutzung von Satz 1.14 wie in Beispiel 1.28)

$$
\begin{aligned}
(\mu, \sigma^2) \quad \longrightarrow \quad & P^n_{\mu,\sigma^2}\left(\overline{X}_n \; > \; \mu_0 \; + \; t_{n-1,1-\alpha} \frac{\sqrt{\widetilde{S}^2_n}}{\sqrt{n}} \right) \\
= \quad & P^n_{0,1}\left(\overline{X}_n \; > \; \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma} \; + \; t_{n-1,1-\alpha} \frac{\sqrt{\widetilde{S}^2_n}}{\sqrt{n}} \right) \\
= \quad & \int_0^\infty P^n_{0,1}\left(\overline{X}_n \; > \; \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma} \; + \; t_{n-1,1-\alpha} \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{n}} \right) \mathcal{L}\left(\widetilde{S}^2_n \mid P^n_{0,1} \right)(ds) \\
= \quad & \int_0^\infty \left[1 - \Phi\left(\sqrt{n}\, \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma} \; + \; t_{n-1,1-\alpha} \sqrt{s} \right) \right] \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} \right)(ds)
\end{aligned}
$$

als Fläche über geeigneten (μ, σ^2)-Rechtecken. Man überzeuge sich graphisch von der Unverfälschtheit des Tests. (Hinweis: das letzten Integral kann man schnell approximativ berechnen, indem man eine grosse Zahl $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ nach $\Gamma(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2})$ verteilter Zufallszahlen simuliert und mit Flächen

$$
F_j \; : \; (\mu, \sigma^2) \quad \longrightarrow \quad \left[1 - \Phi\left(\sqrt{n}\, \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma} \; + \; t_{n-1,1-\alpha} \sqrt{\zeta_j} \right) \right] \quad , \quad j = 1, \ldots, m
$$

ein empirisches Mittel $\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m F_j$ bildet.)

b) Für zweiseitige Hypothesen **H**: $\mu = \mu_0$ gegen **K**: $\mu \neq \mu_0$ berechne und zeichne man die Gütefunktion des zweiseitigen t-Tests zum Niveau α analog zu a) als Fläche über geeigneten (μ, σ^2)-Rechtecken. Durch Betrachten von Schnitten durch diese Fläche für verschiedene Werte von σ^2 mache man graphisch deutlich, dass der zweiseitige t-Test unverfälscht ist.

(Abgabe: Programm, Graphiken)

Aufgabe 4.2 (kritische Überschreitung): Bezeichne φ den einseitigen t-Test im Normalverteilungsmodell für $\mu_0 = 0.5$ und $\alpha = 0.1$ wie in 4.1 a). Man möchte man durch Vorgabe einer kritischen Überschreitung $\Delta = 0.25$ zusätzlich

$$\inf_{\mu \geq \mu_0 + \Delta \ , \ 0.25 \leq \sigma^2 \leq 9.75} E_{\mu,\sigma^2}(\varphi) \quad \geq \quad 1 - \alpha$$

für hinreichend grosse n sicherstellen: wie gross muss man n hierfür mindestens wählen?

(Abgabe: Programm, Graphiken)

Aufgabe 4.3 Man nehme an, dass der Datensatz 'Sandsteinporosität' aus iid Beobachtungen in einem Normalverteilungsmodell entstanden ist. Für diesen Datensatz

a) teste man die Hypothese $\mathbf{H} : \mu \leq 22.75$ gegen die Alternative $\mathbf{K} : \mu > 22.75$ zum Niveau $\alpha = 0.01$ und interpretiere das Ergebnis.

b) teste man die Hypothese $\mathbf{H} : \mu > 24.0$ gegen die Alternative $\mathbf{K} : \mu \leq 24.0$ zum Niveau $\alpha = 0.01$ und interpretiere das Ergebnis.

c) teste man die Hypothese $\mathbf{H} : \sigma^2 = 3.5$ gegen die Alternative $\mathbf{K} : \sigma^2 \neq 3.5$ zum Niveau $\alpha = 0.05$ und interpretiere das Ergebnis.

(Hinweis: Ist $\breve{\varphi}$ ein Test für $\breve{\mathbf{H}}$: $\mu \leq \mu_0$ gegen $\breve{\mathbf{K}}$: $\mu > \mu_0$ zum Niveau $\breve{\alpha} := 1 - \alpha$, so ist (warum??) $\varphi := 1 - \breve{\varphi}$ ein Test für $\mathbf{H}$: $\mu > \mu_0$ gegen $\mathbf{K}$: $\mu \leq \mu_0$ zum Niveau α.)

Hinweis: man berechne jeweils zuerst die Statistiken, die für den jeweiligen Test von Bedeutung sind, wähle die richtigen Quantile, damit der Test das Niveau α hat, scheibe den Test in der Form $\varphi = 1_{\{\ldots\}}$ explizit hin und notiere die Entscheidung. Danach erst rufe man soweit möglich einen in `R` vorgefertigten Test auf und mache sich klar, wie dieser funktioniert (welche Eingaben sind nötig, was wird ausgegeben, ...).

(Abgabe: kurze Text/Formelzeilen als pdf)