Vorlesung Mathematische Statistik

Inhalt in Stichworten

Reinhard Höpfner

Vorlesung 2004/2005 und 2007/2008

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

27.02.08

Kapitel I: Score und Information

A. Score, Information, zwei Informationsschranken

Klassische Definition von Score und Information, einparametrige Pfade in nichtparametrischen Modellen, Lokationsmodelle, Cramér-Rao Schranke, van Trees Schranke

B. Schätzfolgen und Asymptotik der Informationsschranken

Folgen von Experimenten, Schätzfolgen, Konsistenz von Schätzfolgen, Bemerkungen zur asymptotischen Cramér-Rao Schranke bei unabhängiger Versuchswiederholung, die asymptotische van Trees Schranke, Anwendung von van Trees: eine asymptotische Minimaxeigenschaft der empirischen Verteilungsfunktion

C. Heuristik zu Maximum-Likelihood-Schätzfolgen

Heuristik zu Vertauschungsbedingungen, Heuristik zur Asymptotik von Maximum-Likelihood-Schätzfolgen

D. Konsistenz von Maximum-Likelihood-Schätzfolgen

Definition von Maximum-Likelihood-Schätzfolgen, Beispiel für Konsistenzbeweise via Kullback-Divergenz, geeignete Voraussetzungen an Hellinger-Abstände im Einzelexperiment, Konsistenz bzw. $\sqrt{n}$-Konsistenz von Maximum-Likelihood-Schätzfolgen via Hellinger-Abstand

Kapitel II: Minimum-Distanz-Schätzfolgen

A. Stochastische Prozesse mit Pfaden in $L^p(T,\mathcal{T},\mu)$:

Meßbare stochastische Prozesse und ihre Pfade, Beispiel: empirische Verteilungsfunktion, stochastische Prozesse mit Pfaden in $L^p(T,\mathcal{T},\mu)$, schwache Konvergenz in $L^p(T,\mathcal{T},\mu)$, einfache hinreichende Bedingungen für schwache Konvergenz

B. Minimum-Distanz-Schätzfolgen

Motivation: Schätzen eines Parameters durch Anpassen an die empirische Verteilungsfunktion, Definition von MD–Schätzfolgen, meßbare Festlegung von Minimalstellen, starke Konsistenz von MD–Schätzfolgen, $\sqrt{n}$-Konsistenz, Hauptsatz: Darstellung der reskalierten Schätzfehler von MD-Schätzfolgen

C. Gaußprozesse und asymptotische Normalität für MD-Schätzfolgen

Definition, Beispiele, Existenz von Gaußprozessen zu gegebenem Kovarianzkern, Bemerkung zu

Orthogonaldarstellungen, Hauptsatz über asymptotische Normalität von MD–Schätzfolgen

D. Beispiel: Lokations- und Skalenmodelle für iid Beobachtungen

Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion gegen eine zeittransformierte Brownsche Brücke, explizite Grenzverteilungen für MD-Schätzfolgen im Lokations- und Skalenmodell, Ausblicke

Kapitel III: Benachbartheit

A. Le Cam's Erstes und Drittes Lemma

Likelihood Ratios, Definition der Benachbartheit, Le Cam's Erstes Lemma (Formulierung und Interpretation), Le Cam's Drittes Lemma (Formulierung und Interpretation), Mittelwertshift im Limesmodell mit Normalverteilungen

B. Beweise und Varianten

Beweise für alle in Teilkapitel A formulierten Resultate, Varianten für einseitige oder wechselseitige Benachbartheit, ε-δ-Charakterisierung der Benachbartheit, Gleichgradige Integrierbarkeit von Likelihoodratios, Benachbartheit und Straffheit

Kapitel IV: L^2-differenzierbare statistische Modelle

A. L^r-differenzierbare statistische Modelle

L^r-Differenzierbarkeit in dominierten Familien, L^r-Differenzierbarkeit ohne Dominiertheitsvoraussetzung, Beispiel: einparametrige Pfade durch einen festen Punkt P, Eigenschaften der L^r-Ableitung, Score und Information in L^2-differenzierbaren Familien, Hellinger-Abstand, statistische Interpretation von Hellinger-Abstand und Fisher-Information

B. Le Cam's Zweites Lemma für iid Beobachtungen

Voraussetzungen für Le Cam's Zweites Lemma, Formulierung des Hauptsatzes, einige Hilfssätze, Beweis des Hauptsatzes

Kapitel V: Gauss-Shift-Experimente

ein einfaches Normalverteilungsexperiment, Gauß-Shift-Experiment $\mathcal{E}(J)$, äquivariante Schätzer, Faltungssatz von Boll, subkonvexe Verlustfunktionen und Risiko, Totalvariationsabstand, 'approximative Äquivarianz' unter 'sehr diffuser' Vorbewertung, Minimaxsatz, Beispiel: Brownsche Bewegung mit unbekannter Drift

Kapitel VI: Quadratische Experimente

A. Quadratische und gemischt normale Experimente

Quadratische Experimente, gemischt normale Experimente, Charakterisation gemischt normaler Experimente, Bemerkung zu allgemeinen quadratischen Experimenten, stark äquivariante Schätzer im gemischt normalen Experiment, Faltungssatz im gemischt normalen Experiment, 'approximative Äquivarianz' für beliebiger Schätzer, Minimaxsatz im gemischt normalen Experiment

B. Beispiele für quadratische oder gemischt normale Experimente

Brownsche Bewegung mit unbekannter Drift, unter Zeittransformation sowie unter unabhängiger Zeittransformation

Kapitel VII: Lokale Asymptotik

A. Lokal asymptotische Normalität / gemischte Normalität / Quadratizität

LAQ, LAMN, LAN in ϑ, lokale Experimente, Limesexperiment, Beispiel für LAN: Le Cam's Zweites Lemma bei iid Versuchswiederholung, Verteilungskonvergenz unter benachbarten Alternativen, Schätzfehler im lokalen Experiment und Schätzer im Limesexperiment, LAMN in ϑ und Regularität von Schätzfolgen in ϑ, LAMN: Faltungssatz von Jeganathan, LAN: Faltungssatz von Hájek, LAMN: effiziente Schätzfolgen, Schätzer, die asymptotisch im lokalen Modell an der Stelle ϑ so gut arbeiten wie der Maximum-Likelihood-Schätzer im Limesexperiment, LAMN: Charakterisierung effizienter Schätzfolgen und lokalasymptotischer Minimaxsatz

B. Le Cam's Ein-Schritt-Modifikation von Schätzern

Voraussetzungen für die Ein-Schritt-Modifikation, lokaler Maßstab sowie Score und Information mit geschätztem Parameter, Hauptsatz

Kapitel VIII: Rangstatistiken und lokal asymptotische Normalität

A. LAN und Schärfe von Rangtests

Ein Zweistichprobenproblem, Festlegung von Rangtests mit Niveau α, Bemerkung zu den Grenzen der Neyman-Pearson-Theorie, Hauptsatz: ein '2. Le Cam-Lemma' für das Zweistichprobenproblem, Asymptotik von Rangtests: Stabilisierungsbedingung, die zentrierte und skalierte

Rangstatistik, Hauptsatz: Existenz einer Vergleichsstatistik, die Rangstatistik unter benachbarten Alternativen, Gütefunktion des Rangtests unter benachbarten Alternativen, obere Schranken für die Gütefunktion, Erreichbarkeit dieser Schranken, lokal asymptotisch beste Rangtests auf speziellen einparametrigen Pfaden, grundsätzliche Nicht-Vergleichbarkeit von Rangtests im Zweistichprobenproblem, ein Zahlenbeispiel

B. Beweise

Zur Verteilung von Ordnungsstatistiken, verschiedene Hilfsresultate, Beweis des Hauptsatzes

Kapitel IX: LAN, LAMN und LAQ in statistischen Modellen für Diffusionsprozesse

A. Statistische Modelle für Diffusionsprozesse

Stochastische Differentialgleichungen: Bezeichnungen und Voraussetzungen, Verteilungen auf dem kanonischen Pfadraum: lokale Äquivalenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Gestalt der Dichteprozesse, kanonische parametrische Umgebung für die Verteilung einer Diffusion, das Ornstein-Uhlenbeck Modell als einparametriger Pfad durch das Wienermaß

B. Ein Beispiel für lokale Asymptotik: der Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß mit unbekanntem Parameter unter langer Beobachtungsdauer

Grenzwertsätze unter verschiedenen Werten des Parameters $\vartheta \in \Theta$, das statistische Modell an der Stelle ϑ , LAN im 'ergodischen' Fall $\vartheta < 0$, LAMN im 'transienten' Fall $\vartheta > 0$, LAQ im Fall $\vartheta = 0$

Anhang A9 (Harris-Rekurrenz)

Definition und Fakten, Harris-Rekurrenz von Diffusionen in Dimension $d = 1$