Kapitel VI

Quadratische Experimente

Reinhard Höpfner

Vorlesung Mathematische Statistik

Wintersemester 2004/2005 und Sommersemester 2008

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

12.05.05 und 23.06.08

Übersicht zu Kapitel VI :

A. Quadratische und gemischt normale Experimente

*B. Zwei Klassen von Beispielen:

A. Quadratische und gemischt normale Experimente

Der Ansatz in diesem Teilkapitel folgt Davies (1985).

6.1 Definition: Ein Experiment $(\Omega, \mathcal{A}, \{P_h : h \in I\!R^d\})$ heißt *quadratisches Experiment* $\mathcal{E}(S, J)$, falls Statistiken

$$S \;:\; (\Omega, \mathcal{A}) \to (I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d)) \;, \quad J \;:\; (\Omega, \mathcal{A}) \to (I\!R^{d\times d}, \mathcal{B}(I\!R^{d\times d}))$$

existieren, mit denen die folgenden Aussagen i) und ii) erfüllt sind:
i) für jedes $h \in I\!R^d$ liefert

$$\omega \;\longrightarrow\; \exp\left(h^\top S(\omega) - \frac{1}{2}\, h^\top J(\omega)\, h\right) \;=:\; L^{h/0}(\omega)$$

eine Version der Dichte von P_h bezüglich P_0;
ii) P_0-fast sicher liegen die Werte der Statistik J in

$$D \;:=\; \left\{ j \in I\!R^{d\times d} :\; j \text{ ist symmetrisch und strikt positiv definit} \right\} \;\in\; \mathcal{B}(I\!R^{d\times d}) \;.$$

Im quadratischen Experiment $\mathcal{E}(S, J)$ nennen wir

$$(+) \qquad Z \;:=\; 1_D\, J^{-1}\, S$$

zentrale Statistik. In der Folge wird die Indikatorvariable häufig unterdrückt, und wir schreiben anstelle von (+) nur kurz $Z = J^{-1}S$.

6.1' Bemerkungen: a) Im Fall der Gauß-Shift-Experimente aus Kapitel V existiert nach 5.1 zu jeder vorgegebenen symmetrischen und strikt positiv definiten Matrix J ein Gauß-Shift-Experiment $\mathcal{E}(J)$. In 6.1 dagegen wird keineswegs mehr zu jedem vorgegebenen Paar (S, J) von Statistiken ein quadratisches Experiment $\mathcal{E}(Q)$ existieren. Damit zu (S, J) eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit den Eigenschaften aus 6.1 existiert, ist nachzuweisen:

$$\int e^{h^\top S - \frac{1}{2} h^\top J\, h}\, dP_0 \;=\; 1 \quad \text{für alle } \; h \in I\!R^d \;.$$

Erste Beispiele hierzu findet man in Teilkapitel B unten, weitere Beispiele folgen in Kapitel IX.
b) In einem quadratischen Experiment $\mathcal{E}(S, J)$ gilt $P_h \sim P_0$ für alle $h \in I\!R^d$, und die zentrale Statistik $Z = J^{-1}S$ ist Maximum-Likelihood-Schätzer für den unbekannten Parameter $h \in I\!R^d$.

6.2 Definition: Ein quadratisches Experiment $\mathcal{E}(S,J)$ heißt *gemischt normal* falls gilt:

$$\mathcal{L}(J|P_h) \;=\; \mathcal{L}(J|P_0) \quad \text{ist unabhängig vom Parameter } h \in I\!R^d.$$

Insbesondere ist das Gauß-Shift-Experiment $\mathcal{E}(J)$ aus Kapitel V der Spezialfall eines quadratischen bzw. gemischt normalen Experiments mit *deterministischem* J. Wir werden in 6.6 und 6.8 sehen, daß die Hauptergebnisse von Kapitel V (Faltungssatz, Minimaxsatz) Verallgemeinerungen auf gemischt-normale Experimente erlauben. Dies basiert auf der folgenden Charakterisierung von gemischter Normalität.

6.3 Satz: In einem quadratischen Experiment $\mathcal{E}(S,J)$ sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

i) das Experiment $\mathcal{E}(S,J)$ ist gemischt normal;

ii) es gilt $P_0^{S|J=j} \;=\; \mathcal{N}(0,j)$ für P_0^J-fast alle $j \in I\!R^{d\times d}$;

iii) für alle $h \in I\!R^d$ gilt: $P_h^{S|J=j} \;=\; \mathcal{N}(jh,j)$ für P_h^J-fast alle $j \in I\!R^{d\times d}$;

iv) für alle $h \in I\!R^d$ gilt: $P_h^{Z-h|J=j} \;=\; \mathcal{N}(0,j^{-1})$ für P_h^J-fast alle $j \in I\!R^{d\times d}$.

Beweis: 1) Nach Definition 6.2 bedeutet gemischte Normalität

$$\mathcal{L}(J|P_h) \;=:\; P_\bullet^J \quad \text{ist unabhängig vom Parameter } h \in I\!R^d$$

und ist damit gleichwertig zu der Aussage

$$(+) \quad E_0\left(1_B(J)\right) \;=\; E_h\left(1_B(J)\right) \;=\; E_0\left(1_B(J)\, L^{h/0}\right) \quad \text{für alle } h \in I\!R^d \text{ und alle } B \in \mathcal{B}(I\!R^d)).$$

Betrachtet man insbesondere die äußeren Terme in (+), so ist nach bekannten Grundeigenschaften bedingter Erwartungen gemischte Normalität gleichwertig zu jeder der drei folgenden Aussagen:

für jedes $h \in I\!R^d$ ist die Konstante 1 eine Festlegung von $E_0\left(e^{h^\top S \,-\, \frac{1}{2}\, h^\top J\, h} \mid J = \cdot\right)$;

für jedes $h \in I\!R^d$ gilt $E_0\left(e^{h^\top S} \mid J = j\right) = e^{\,+\,\frac{1}{2}\, h^\top j\, h}$ für P_0^J-fast alle $j \in I\!R^{d\times d}$

für jedes $h \in I\!R^d$ gilt $P_0^{S|J=j} = \mathcal{N}(0,j)$ für P_0^J-fast alle $j \in I\!R^{d\times d}$.

2) Mit Schritt 1) ist i)$\Longleftrightarrow$ii) bereits bewiesen. Die Äquivalenz iii)$\Longleftrightarrow$iv) folgt aus $Z = J^{-1}S$, und ii) ist ein Spezialfall von iii). Wir zeigen i)+ii)$\Longrightarrow$iii).

Unter i)+ii) gilt für beliebige $A \in \mathcal{B}(I\!R^d)$, $B \in \mathcal{B}(I\!R^{d\times d})$:

$$\begin{aligned} E_h\left(1_B(J)\,1_A(S)\right) &= E_0\left(1_B(J)\,1_A(S)\,L^{h/0}\right) \\ &= E_0\left(1_B(J)\,1_A(S)\,e^{h^\top S - \frac{1}{2}h^\top J\,h}\right) \\ &= \int P_0^J(dj)\,1_B(j)\,e^{-\frac{1}{2}h^\top j\,h}\left[\int P_0^{S|J=j}(ds)\,1_A(s)\,e^{h^\top s}\right] . \end{aligned}$$

Wegen ii) und nach Definition des Ereignisses D in 6.1 schreibt man die letzte Zeile als

$$\int P_0^J(dj)\,1_{B\cap D}(j)\,e^{-\frac{1}{2}h^\top j\,h}\left[\int_{I\!R^d} ds\,\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\det(j)|}}\,e^{-\frac{1}{2}s^\top j^{-1}s}\,1_A(s)\,e^{h^\top s}\right] ,$$

was durch Sortieren von Termen $-\frac{1}{2}h^\top j\,h - \frac{1}{2}s^\top j^{-1}s + h^\top s = -\frac{1}{2}(s-jh)^\top j^{-1}(s-jh)$ zu

$$\int P_0^J(dj)\,1_{B\cap D}(j)\int_{I\!R^d} ds\,\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\det(j)|}}\,e^{-\frac{1}{2}(s-jh)^\top j^{-1}(s-jh)}\,1_A(s)$$

wird; der letzte Ausdruck ist aber nach Voraussetzung i) gleich

$$\int P_0^J(dj)\,1_{B\cap D}(j)\,\mathcal{N}(jh,j)(A) \;=\; \int P_h^J(dj)\,1_{B\cap D}(j)\,\mathcal{N}(jh,j)(A) .$$

Da $A \in \mathcal{B}(I\!R^d)$, $B \in \mathcal{B}(I\!R^{d\times d})$ beliebig waren, da D wegen $P_h \sim P_0$ auch unter P_h^J volles Maß besitzt, ist mit der gesamten Gleichungskette die Aussage

$$E_h\left(1_B(J)\,1_A(S)\right) \;=\; \int P_h^J(dj)\,1_B(j)\,\mathcal{N}(jh,j)(A)$$

und damit iii) bewiesen. Das schließt den Beweis ab. □

6.4 Definition: Im quadratischen Experiment $\mathcal{E}(S,J)$ nennt man

$$(\,S - Jh\,,\;J\,)$$

Paar aus Score und beobachteter Information an der Stelle $h \in I\!R^d$.

6.4' Bemerkung: a) Die beobachtete Information J ist – außer im Spezialfall eines Gauß-Shift-Experiments – nun eine echte Zufallsvariable. Insbesondere kann J im allgemeinen quadratischen Experiment $\mathcal{E}(S,J)$ *keine Fisher-Information gemäß 1.2* mehr sein. In $\mathcal{E}(S,J)$ hat man mit den Notationen aus 1.2 zwar

$$M_h \;:=\; S - Jh \;=\; (\nabla \log f)\,(h,\cdot)\;,$$

weiß aber im allgemeinen nichts über Zentriertheit oder über Quadratintegrierbarkeit von M_h unter P_h. In $\mathcal{E}(S,J)$ ist also $S - Jh$ im allgemeinen *kein Score im Sinne von 1.2.*

b) Im *gemischt normalen Experiment* $\mathcal{E}(S,J)$ erhält jedoch der Begriff 'Information' durch 6.2 und 6.3 iii)+iv) einen neuen und tiefen Sinn. Hier zeigt die Beobachtung $\omega \in \Omega$ selbst durch den Wert $J(\omega)$ an, wieviel 'Information' sie über den unbekannten Parameter zu liefern vermag: nach Bedingen auf den Wert der beobachteten Information erhält

$$\left\{ P_h\,(\bullet \mid J=j)\ :\ h \in I\!R^d \right\}$$

gemäß 6.3 iii)+iv) die Struktur eines Gauß-Shift-Experiments $\mathcal{E}(j)$. In diesem Sinn wurde der Begriff 'beobachtete Information $\omega \to J(\omega)$' von Barndorff-Nielsen geprägt (siehe Barndorff-Nielsen 1988, wobei dort der mathematische Rahmen allerdings deutlich anders gefaßt wird).

In gemischt normalen Experimenten bleibt der Faltungssatz gültig, wenn man nach der beobachteten Information bedingt. Dies wurde von Jeganathan (1982) gesehen.

6.5 Definition: Sei $\mathcal{E}(S,J)$ ein gemischt normales Experiment, sei κ ein Schätzer für den unbekannten Parameter $h \in I\!R^d$. Dann heißt κ *stark äquivariant* falls gilt:

(∗) $\qquad P_h^{(\kappa-h)|J=\cdot}(\cdot)$ kann unabhängig vom Parameter $h \in I\!R^d$ festgelegt werden .

6.5' Hilfssatz: Sei $\mathcal{E}(S,J)$ ein gemischt normales Experiment, sei κ ein Schätzer für den unbekannten Parameter $h \in I\!R^d$. Genau dann ist κ stark äquivariant, wenn gilt:

(+) $\qquad \mathcal{L}\,(\,(\kappa-h,J)\mid P_h\,)$ ist unabhängig vom Parameter $h \in I\!R^d$.

Beweis: Zu zeigen ist, daß (+) die starke Äquivarianz gemäß (∗) impliziert (die Umkehrung ist wegen 6.2 klar). Fixiere $0 \neq h$ in $I\!R^d$. Sei $\mathcal{S}$ ein abzählbarer und $\cap$–stabiler Erzeuger der σ–Algebra $\mathcal{B}(I\!R^d)$. Unter (+) gilt

$$\begin{aligned}\int P_\bullet^J(dj)\,1_C(j)\,P_h^{\kappa-h|J=j}(A) \;&=\; E_h\,(\,1_C(J)\,1_A(\kappa-h)\,)\\ =\;\; E_0\,(\,1_C(J)\,1_A(\kappa)\,) \;&=\; \int P_\bullet^J(dj)\,1_C(j)\,P_0^{\kappa|J=j}(A)\end{aligned}$$

für beliebiges $A \in \mathcal{S}$ und für alle $C \in \mathcal{B}(I\!R^{d\times d})$. Für festes A müssen folglich die beiden Funktionen $j \to P_h^{\kappa-h|J=j}(A)$ und $j \to P_0^{\kappa|J=j}(A)$ $P_\bullet^J$–fast sicher auf $I\!R^{d\times d}$ übereinstimmen. Damit hat man zuerst zu jedem $A \in \mathcal{S}$ eine $P_\bullet^J$–Nullmenge $N_{h,A} \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ so daß

$$P_h^{\kappa-h|J=j}(A) \;=\; P_0^{\kappa|J=j}(A) \quad \text{für alle } j \in D \setminus N_{h,A}\ ,$$

danach – da $\mathcal{S}$ abzählbar – eine $P_\bullet^J$–Nullmenge $N_h \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ so daß

$$j \in D \setminus N_h \;:\quad P_h^{\kappa-h|J=j}(A) \;=\; P_0^{\kappa|J=j}(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{S}$$

(mit D wie in 6.1 definiert). Aber $\mathcal{S}$ ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(I\!R^d)$, also müssen für $j \in D \setminus N_h$ die Wahrscheinlichkeitsmaße $P_h^{\kappa-h|J=j}(\cdot)$ und $P_0^{\kappa|J=j}(\cdot)$ auf $\mathcal{B}(I\!R^d)$ übereinstimmen. Jede reguläre Festlegung $K(\cdot,\cdot)$ der bedingten Verteilung $(j,A) \to P_0^{\kappa|J=j}(A)$ is damit auch eine Festlegung von $(j,A) \to P_h^{\kappa-h|J=j}(A)$. Dabei ist $0 \neq h$ in $I\!R^d$ beliebig. □

Für gemischt normale Experimente $\mathcal{E}(S,J)$ ist $(*)$ eine stärkere Forderung als Äquivarianz im Sinne von 5.4; nur in Gauß-Shift Modellen, in denen die Information J deterministisch ist, fällt 6.5 mit 5.4 zusammen. Satz 6.3 iv) zeigt, daß die zentrale Statistik Z in einem gemischt normalen Experiment $\mathcal{E}(S,J)$ ein stark äquivarianter Schätzer für den unbekannten Parameter ist.

6.6 Faltungssatz: Sei $\mathcal{E}(S,J)$ ein gemischt normales Experiment, sei κ ein stark äquivarianter Schätzer für den unbekannten Parameter. Dann gibt es eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{Q^j : j \in I\!R^{d\times d}\}$ auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ so daß $(*)$ aus 6.5 die Gestalt

$$\text{für } P_\bullet^J\text{-fast alle } j \in I\!R^{d\times d}, \text{ für alle } h \in I\!R^d : \quad P_h^{(\kappa-h)|J=j} \;=\; \mathcal{N}(0, j^{-1}) \star Q^j$$

annimmt. Notwendig stimmt Q^j dabei für $P_\bullet^J$–fast alle j mit $P_0^{(\kappa-Z)|J=j}(\cdot)$ überein. Insbesondere ergibt sich für die Schätzfehler von κ

$$\mathcal{L}\left(\kappa - h \mid P_h\right) \;=\; \int P_\bullet^J(dj)\;\left[\mathcal{N}(0, j^{-1}) \star Q^j\right]\;, \quad h \in I\!R^d\;.$$

Beweis: Man argumentiert 'gegeben $J = j$' analog zum Beweis des Faltungssatzes 5.5 im Gauß-Shift-Experiment.

1) Um basierend auf $(*)$ in 6.5 die charakteristische Funktion der Schätzfehler von κ bedingt nach J zu untersuchen, fixiert man $t \in I\!R^d$ und startet für beliebige Ereignisse $B \in \mathcal{B}(I\!R^{d\times d})$ und beliebige Werte $h \in I\!R^d$ des Parameters mit der Gleichungskette

$$\begin{aligned} E_0\left(1_B(J)\, e^{i\,t^\top \kappa}\right) \;&=\; E_h\left(1_B(J)\, e^{i\,t^\top(\kappa-h)}\right) \;=\; E_0\left(1_B(J)\, e^{i\,t^\top(\kappa-h)}\, L^{h/0}\right) \\ &=\; E_0\left(1_B(J)\, e^{i\,t^\top(\kappa-h)}\, e^{h^\top S \,-\, \frac{1}{2} h^\top J\, h}\right) \\ &=\; \int P_0^J(dj)\; 1_B(j)\; \left[\int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\; e^{i\,t^\top(k-h)}\; e^{h^\top s \,-\, \frac{1}{2} h^\top j\, h}\right]\;, \end{aligned}$$

wobei

$$(j,C) \longrightarrow \widetilde{K}(j,C) := P_0^{(\kappa,S)|J=j}(C) , \quad j \in I\!R^{d\times d} , \; C \in \mathcal{B}(I\!R^d)\otimes\mathcal{B}(I\!R^d)$$

eine reguläre Version der bedingten Verteilung des Paares (κ, S) gegeben $J = \cdot$ unter P_0 bezeichnet. Diese kann wegen 6.3 ii) so gewählt werden, daß gilt:

$$\widetilde{K}(j, I\!R^d\times\cdot) = \mathcal{N}(0,j) \quad \text{falls } j \in D.$$

2) Wir bemerken, daß für festes $j \in D$ mit beliebigem $N < \infty$ gilt

$$\left\{ e^{\,i\,t^\top(\kappa-h)}\; e^{\,h^\top S \,-\, \frac{1}{2}\,h^\top j\,h} \;:\; |h| \le N \,,\; t \in I\!R^d \right\} \quad \text{ist gleichgradig integrierbar unter } \widetilde{K}(j,\cdot).$$

Dies folgt aus einer Abschätzung für die zweiten Momente

$$\begin{aligned} &\int \widetilde{K}(j,(dk,ds)) \; \left| e^{\,i\,t^\top(k-h)}\; e^{\,h^\top s \,-\, \frac{1}{2}\,h^\top j\,h} \right|^2 \\ &= \int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\; e^{2\,h^\top s} \;=\; \int \mathcal{N}(0,j)(ds)\; e^{2\,h^\top s} \;=\; e^{+\frac{1}{2}\,(2h)^\top j\,(2h)} \,. \end{aligned}$$

3) Mit der oben gewählten Übergangswahrscheinlichkeit $\widetilde{K}(\cdot,\cdot)$ betrachten wir nun die Funktion

$$I\!R^d \ni h \longrightarrow \int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\; e^{\,i\,t^\top(k-h)}\; e^{\,h^\top s \,-\, \frac{1}{2}\,h^\top j\,h} \,.$$

Wie im Beweis von 5.5 setzt man diese bei festem $j \in D$ fort zu einer analytischen Funktion

$$(+) \qquad f_j \;:\; \mathbb{C}^d \ni z \longrightarrow \int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\; e^{\,i\,t^\top(k-z)}\; e^{\,z^\top s \,-\, \frac{1}{2}\,z^\top j\,z} \,.$$

4) Wir zeigen nun: es gibt eine $P_\bullet^J$-Nullmenge N so daß gilt:

$$(++) \qquad \text{für jedes } j \in D\setminus N \text{ ist die Funktion } f_j(\cdot) \text{ konstant auf } \mathbb{C}^d \,.$$

Dies ist eine Konsequenz der starken Äquivarianz von κ. Zuerst zeigt die Gleichungskette aus Schritt 1), daß *für jedes feste* $h \in I\!R^d$ eine $P_\bullet^J$-Nullmenge N_h existiert mit

$$\int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\; e^{\,i\,t^\top(k-h)}\; e^{\,h^\top s \,-\, \frac{1}{2}\,h^\top j\,h} \;=\; \int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\; e^{\,i\,t^\top k} \quad , \quad j \in D\setminus N_h \,.$$

Faßt man für alle rationalen h die eben entstandenen Ausnahmemengen N_h zusammen zu einer $P_\bullet^J$-Nullmenge $N := \bigcup_{h\in\mathbb{Q}^d} N_h$, so hat man

$$\int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\; e^{\,i\,t^\top(k-h)}\; e^{\,h^\top s \,-\, \frac{1}{2}\,h^\top j\,h} \;=\; \int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\; e^{\,i\,t^\top k} \quad , \quad j \in D\setminus N \,,\; h \in \mathbb{Q}^d$$

was wegen Stetigkeit des Integranden in h und gleichgradiger Integrierbarkeit nach Schritt 2) zu

$$\int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\, e^{i\,t^\top (k-h)}\, e^{h^\top s \,-\, \frac{1}{2} h^\top j\, h} \;=\; \int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\, e^{i\,t^\top k} \quad , \quad j \in D\setminus N \;,\; h \in \mathbb{R}^d$$

ausgedehnt werden kann. Damit ist für alle $j \in D \setminus N$ die Einschränkung der analytischen Funktion $f_j(\cdot)$ auf $\mathbb{R}^d$ konstant; folglich muß $f_j(\cdot)$ konstant auf $\mathbb{C}^d$ sein.

5) Aus (++) erhält man wie im Beweis von 5.5

$$\text{für jedes } j \in D\setminus N : \quad f_j(0) \;=\; f_j(-i\, j^{-1}\, t)$$

was genau wie im Beweis von 5.5 zeigt, daß für jedes $j \in D \setminus N$

$$(\diamond) \qquad \int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\, e^{i\,t^\top k} \;=\; e^{-\frac{1}{2}\, t^\top j^{-1}\, t} \int \widetilde{K}(j,(dk,ds))\, e^{i\,t^\top (k-j^{-1}s)}$$

gilt. Nach Definition von $\widetilde{K}(\cdot,\cdot)$ kann man $(\diamond)$ auch in der Form

$$\text{für alle } j \in D\setminus N : \quad E_0\left(e^{i\,t^\top \kappa} \mid J=j\right) \;=\; e^{-\frac{1}{2}\, t^\top j^{-1}\, t}\, E_0\left(e^{i\,t^\top (\kappa - Z)} \mid J=j\right)$$

schreiben.

6) Bisher wurde ein festes $t \in \mathbb{R}^d$ betrachtet. Folglich ist die $P_\bullet^J$-Nullmenge N in $(\diamond)$ eine von t abhängende Ausnahmemenge. Nun vereinigt man diese Ausnahmemengen für alle rationalen t zu einer $P_\bullet^J$-Nullmenge $\widetilde{N}$. Da beide Integranden in $(\diamond)$ stetig von t abhängen und im Betrag durch 1 beschränkt sind, erhält man mit dominierter Konvergenz aus $(\diamond)$

$$\text{für } j \in D\setminus \widetilde{N} : \quad E_0\left(e^{i\,t^\top \kappa} \mid J=j\right) \;=\; e^{-\frac{1}{2}\, t^\top j^{-1}\, t}\, E_0\left(e^{i\,t^\top (\kappa - Z)} \mid J=j\right) \;, \quad t \in \mathbb{R}^d \;.$$

Dies ist eine Gleichung zwischen charakteristischen Funktionen bedingter Verteilungen; wählt man die Schreibweise

$$(j, A) \;\longrightarrow\; Q^j(A)$$

für eine reguläre Version von $P_0^{(\kappa - Z)|J=\cdot}(\cdot)$, so ist die Faltungsaussage

$$\text{für } P_\bullet^J\text{-fast alle } j \in \mathbb{R}^{d\times d},\ \text{alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \;:\quad P_0^{\kappa|J=j}(A) \;=\; [\mathcal{N}(0, j^{-1}) \star Q^j](A)$$

in gemischt normalen Experimenten bewiesen. □

Insbesondere zeigt 6.6 kombiniert mit 6.3 iv), daß in einem gemischt normalen Modell $\mathcal{E}(S,J)$ die zentrale Statistik $Z = J^{-1}S$ als Schätzer für den unbekannten Parameter optimal in der Klasse aller stark äquivarianten Schätzer ist, im Sinne einer bestmöglichen Konzentration der

Verteilung der Schätzfehler. Aus 6.6 kann man wie in Kapitel V folgern:

6.6' Folgerung: Bezüglich jeder subkonvexen Verlustfunktion minimiert die zentrale Statistik Z in einem gemischt normalen Experiment $\mathcal{E}(S,J)$ das Risiko in der Klasse aller stark äquivarianten Schätzer κ für den unbekannten Parameter: es gilt

$$R_\kappa(h) \;\geq\; R_Z(h)\,, \quad h \in I\!R^d\,.$$

Wieder will man aber in gemischt normalen Experimenten die zentrale Statistik Z nicht nur mit stark äquivarianten Schätzern vergleichen, sondern mit allen möglichen Schätzern für den unbekannten Parameter $h \in I\!R^d$. Zuerst beweisen wir – nach Bedingen an der beobachteten Information analog zu Satz 5.9 – eine 'asymptotische Äquivarianz' beliebiger Schätzer unter einer 'sehr diffusen' Vorbewertung.

6.7 Satz: Sei $\mathcal{E}(S,J)$ gemischt normal. Sei π_n die Gleichverteilung auf der abgeschlossenen Kugel B_n mit Radius n. Sei η ein beliebiger Schätzer für den unbekannten Parameter $h \in I\!R^d$ im Experiment $\mathcal{E}(S,J)$. Dann gibt es Familien $\{Q_n^j : j \in I\!R^{d\times d}\}$, $n \geq 1$, von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ so daß

$$d_1\left(\int \pi_n(dh)\; \mathcal{L}\left(\eta - h | P_h\right)\;,\; \int P_\bullet^J(dj)\,\left[\mathcal{N}(0,j^{-1}) \star Q_n^j\right] \right) \quad \longrightarrow \quad 0\,, \quad n \to \infty\,,$$

und für jede beschränkte subkonvexe Verlustfunktion gilt

$$\int \pi_n(dh)\; E_h\left(\ell(\eta - h)\right) \;=\; \int P_0^J(dj) \int \left[\mathcal{N}(0,j^{-1}) \star Q_n^j\right](dv)\; \ell(v) \;+\; o(1)\,, \quad n \to \infty\,.$$

Beweis: Die zweite Behauptung folgt nach 5.8' sofort aus der ersten; wir beweisen diese. Im gemischt normalen Experiment $\mathcal{E}(S,J)$ ist wegen $P_\bullet^J(D) = 1$ das Paar (Z,J) eine suffiziente Statistik. Folglich gibt es eine Übergangswahrscheinlichkeit $\widetilde{K}(\cdot,\cdot)$ von $I\!R^d \times I\!R^{d\times d}$ nach $I\!R^d$ so daß

$$P_h^{\eta\,|(Z,J)=(z,j)}(A) \;=\; \widetilde{K}((z,j),A)\,, \quad A \in I\!R^d\,,\; (z,j) \in I\!R^d \times I\!R^{d\times d}$$

unabhängig vom Parameter $h \in I\!R^d$ festgelegt ist. Für jedes feste $j \in I\!R^{d\times d}$ ist dann insbesondere

$$K^j(z,A) \;:=\; \widetilde{K}((z,j),A)\,, \quad A \in I\!R^d\,,\; z \in I\!R^d$$

eine Übergangswahrscheinlichkeit auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Sie steht für die bedingte Verteilung von η unter $Z = \cdot$, bei vorgeschalteter Bedingung $J = \cdot$, unabhängig vom Parameter h.

Wegen gemischter Normalität von $\mathcal{E}(S, J)$ erhält man die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\int \pi_n(dh)\, P_h\,(\eta - h \in A) \quad &= \quad \int\int\int \pi_n(dh)\; P_\bullet^J(dj)\; P_h^{Z|J=j}(dz)\; \widetilde{K}((z,j), A+h) \\
&= \int P_\bullet^J(dj) \int \pi_n(dh) \int \mathcal{N}(h, j^{-1})(dz)\; K^j(z, A+h) \\
&= \int P_\bullet^J(dj)\; \int \mathcal{N}(0, j^{-1})(dx)\; \left[\int \pi_n(dh)\; K^j(x+h, A+h) \right] .
\end{aligned}$$

Das Integral in eckigen Klammern schreibt man wie im Beweisschritt 2) von 5.9 um in

$$\begin{aligned}
\int \pi_n(dh)\; K^j(x+h, A+h) \quad &= \quad \frac{1}{\lambda\!\!\lambda(B_n)} \int \lambda\!\!\lambda(dh)\; 1_{B_n}(h)\; K^j(x+h, A+h) \\
&= \frac{1}{\lambda\!\!\lambda(B_n)} \int \lambda\!\!\lambda(dh')\; 1_{B_n+x}(h')\; K^j(h', A-x+h') \\
&= \frac{1}{\lambda\!\!\lambda(B_n)} \int \lambda\!\!\lambda(dh')\; 1_{B_n+x}(h')\; P_\bullet^{(\eta-Z)|(Z,J)=(h',j)}(A-x) .
\end{aligned}$$

Vergleicht man den letzten Ausdruck mit

$$Q_n^j(A-x) \;:=\; \frac{1}{\lambda\!\!\lambda(B_n)} \int \lambda\!\!\lambda(dh')\; 1_{B_n}(h')\; P_\bullet^{(\eta-Z)|(Z,J)=(h',j)}(A-x) ,$$

so erhält man wie im Beweis von 5.9 die von $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $j \in \mathbb{R}^d$ unabhängige Abschätzung

$$\left| \int \pi_n(dh)\; K^j(x+h, A+h) \;-\; Q_n^j(A-x) \right| \quad \leq \quad \frac{\lambda\!\!\lambda(B_n \triangle (B_n + x))}{\lambda\!\!\lambda(B_n)}$$

und damit als Gesamtergebnis mit dominierter Konvergenz bezüglich $P_\bullet^J(dj)\,\mathcal{N}(0, j^{-1})(dx)$

$$d_1 \left(\int \pi_n(dh)\; \mathcal{L}\,(\eta - h | P_h) \;,\; \int P_\bullet^J(dj)\; \left[\mathcal{N}(0, j^{-1}) \star Q_n^j \right] \right) \quad \longrightarrow \quad 0\,, \quad n \to \infty$$

nach Definition des Totalvariationsabstandes. $\square$

Aus dem letzten Satz folgert man für gemischt normale Experimente:

6.8 Minimaxsatz: Bezüglich jeder subkonvexen Verlustfunktion minimiert die zentrale Statistik Z in einem gemischt normalen Experiment $\mathcal{E}(S, J)$ das maximale Risiko in der Klasse aller möglichen Schätzer η für den unbekannten Parameter:

$$\sup_{h \in \mathbb{R}^d} R_\eta(h) \quad \geq \quad E_0(\ell(Z)) \;=\; \sup_{h \in \mathbb{R}^d} R_Z(h) .$$

Beweis: Dieser Beweis ist 'bedingt nach J' analog zum Beweis von 5.10. Sei $\mathcal{E}(S,J)$ gemischt normal. Sei π_n die Gleichverteilung auf der abgeschlossenen Kugel B_n mit Radius n, und η ein Schätzer für den unbekannten Parameter $h \in I\!R^d$ im Experiment $\mathcal{E}(S,J)$. Wie in 5.10 reicht es, beschränkte subkonvexe Verlustfunktionen zu betrachten, für die man schreibt

$$\begin{aligned}\sup_{h\in I\!R^d} R_\eta(h) \;\geq\; \sup_{h\in B_n} R_\eta(h) \;&\geq\; \int \pi_n(dh)\; E_h\left(\ell(\eta-h)\right)\\ &= \int P_0^J(dj) \int \left[\mathcal{N}(0,j^{-1}) \star Q_n^j\right](dv)\;\ell(v) \;+\; o(1)\;, \quad n\to\infty\end{aligned}$$

wegen 6.7, was mit Hilfssatz 5.7 c) nach unten abgeschätzt wird durch

$$\int P_0^J(dj) \int \mathcal{N}(0,j^{-1})(dv)\;\ell(v) \;+\; o(1)\;, \quad n\to\infty\;.$$

Das Integral in der letzten Zeile ist wegen 6.3 iv) gleich

$$R_Z(h) \;=\; E_h\left(\ell(Z-h)\right) \;=\; \int P_\bullet^J(dj) \int \mathcal{N}(0,j^{-1})(dv)\;\ell(v) \quad \text{für jedes } h\in I\!R^d.$$

Damit ist der Beweis des Minimaxsatzes abgeschlossen. □

Was passiert jenseits der gemischten Normalität, in echt quadratischen Experimenten ? Sicher bleibt $Z = J^{-1}S$ Maximum-Likelihood-Schätzer für den unbekannten Parameter, sicher hat für alle $\omega\in\Omega$ mit $J(\omega)\in D$ die log-Likelihood-Fläche

$$\begin{aligned} h \;\longrightarrow\; \Lambda^{h/0}(\omega) \;&=\; h^\top S(\omega) - \frac{1}{2}\,h^\top J(\omega)\,h\\ =\; &-\frac{1}{2}\,(h-Z(\omega))^\top J(\omega)\,(h-Z(\omega)) \;+\; \text{nicht von } h \text{ abhängende Terme}\end{aligned}$$

die einfache Gestalt einer nach unten sich öffnenden Parabel, aber klare Effizienzbegriffe wie Faltungssatz oder Minimaxsatz haben jenseits der gemischten Normalität keine Analoga mehr.

*B. Zwei Klassen von Beispielen

Quadratische Experimente entstehen aus dem Modell 'Brownsche Bewegung mit unbekannter Drift' unter einer großen Klasse von Zeittransformationen. Ist die Zeittransformation unabhängig von der Brownschen Bewegung, erhält man gemischt normale Experimente. Ein an stochastischen Prozessen weniger interessierte Leser kann dieses Teilkapitel überspringen.

6.9 Beispiel: Wie in 5.11 sei $(C,\mathcal{C})$ der kanonische Pfadraum für $I\!R^d$-wertige Prozesse mit stetigen Pfaden, B eine Standard-Brownsche Bewegung auf einem $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ mit Startpunkt 0, $\mathcal{J}$ eine deterministische $d{\times}d$–Matrix, symmetrisch und strikt positiv definit, sowie P_h die Verteilung der durch $\mathcal{J}$ skalierten Brownschen Bewegung mit Driftparameter h:

$$P_h \;:=\; \mathcal{L}\left(\left(\mathcal{J}^{1/2}\, B_t + (\mathcal{J}h)\, t\right)_{t\geq 0} \mid P'\right) \;, \quad h \in I\!R^d \;.$$

Wir gehen aus vom filtrierten statistischen Modell (5.12)

$$\left(C \,,\, \mathcal{C} \,,\, I\!\!G \,,\, \{P_h : h \in I\!R^d\} \right)$$

mit dem kanonischen Prozeß X auf $(C,\mathcal{C})$.

a) Sei τ eine $I\!\!G$–Stopzeit mit der Eigenschaft

$(*)$ $$0 < \tau < \infty \quad P_h\text{-fast sicher für jedes } h \in I\!R^d.$$

Nach Jacod und Shiryaev (1987, Thm. III.3.4) sind dann die Restriktionen P_h^τ, P_0^τ der Wahrscheinlichkeitsmaße P_h, P_0 auf die σ-Algebra der Vergangenheit bis zur Zeit τ

$$\mathcal{G}_\tau \;:=\; \{F \in \mathcal{C} :\; F \cap \{\tau \leq r\} \in \mathcal{G}_r \text{ für jedes } r \geq 0\}$$

(vgl. Métivier 1982, Ch. I.5) zueinander äquivalent, und der Zustand des Dichteprozesses $L^{h/0}$ aus 5.11 b) zur Zeit τ

$$L_\tau^{h/0} \;=\; \exp\left(h^\top X_\tau \;-\; \frac{1}{2}(h^\top \mathcal{J}\, h)\, \tau \right)$$

liefert eine Version der Dichte von P_h^τ zu P_0^τ.

Damit ist unter der Voraussetzung $(*)$ das statistische Experiment *Brownsche Bewegung mit unbekanntem Driftparameter, skaliert durch* $\mathcal{J}$*, zeitkontinuierlich beobachtet bis zur Zeit* τ

(6.10) $$\left(C \,,\, \mathcal{G}_\tau \,,\, \{P_h^\tau : h \in I\!R^d\} \right) \;, \quad \tau \text{ erfüllt } (*)$$

ein quadratisches Modell im Sinne von 6.1. Das Paar aus Score und Information ist

$$(X_\tau - \mathcal{J} h\, \tau \,,\, \mathcal{J}\tau)$$

an der Stelle $h \in I\!R^d$. Die zentrale Statistik im Experiment (6.10) ist

$$Z_\tau \;:=\; \mathcal{J}^{-1} \begin{pmatrix} X_\tau^1 \,/\, \tau \\ \dots \\ X_\tau^d \,/\, \tau \end{pmatrix} \;.$$

b) Im allgemeinen wird für das Modell (6.10) gelten

$$(+) \qquad \mathcal{L}(\,\tau \mid P_h\,) \quad \text{ist abhängig von } h \in \mathbb{R}^d.$$

In diesem Fall kann das Experiment (6.10) nicht gemischt normal sein, denn unter (+) hängt die Verteilung der beobachteten Information $J = \mathcal{J}\,\tau$ vom Parameter $h \in \mathbb{R}^d$ ab, im Widerspruch zu 6.2.

c) Als Beispiel für ein Modell (6.10) mit der Eigenschaft (+) betrachte man in Dimension $d = 1$ mit $\mathcal{J} = 1$ und $a, b > 0$ Stopzeiten

$$(6.11) \qquad \tau \;:=\; T_a \wedge S_b\,, \quad T_a = \inf\{r > 0 : X_r > a\}\,,\; S_b = \inf\{r > 0 : X_r < -b\}\,.$$

Man kennt Laplacetransformierte und Erwartungswert für $T_c \wedge S_{-c}$, $c > 0$, unter P_0 (Revuz und Yor 1991, Ch. II, (3.7),(3.11),(3.8)), sowie für T_a oder S_b unter P_h, $h \neq 0$ (benutze Revuz und Yor 1991, Ch. II, (3.14)). Unter dem Wienermaß P_0 auf $(C, \mathcal{C})$ gilt

$$E_0(\tau) \;=\; ab\,, \quad P_0\,(X_\tau = a) \;=\; \frac{b}{b+a}\,, \quad P_0\,(X_\tau = -b) \;=\; \frac{a}{b+a}$$

(Revuz und Yor 1991, Ch. II, 3° in (3.11), (3.8)). Für strikt positive Drift gilt unter P_h

$$E_h(\tau) \;\leq\; E_h\,(T_a) \;=\; \frac{2\,a}{h}\,, \quad h > 0$$

(mit Revuz und Yor 1991, Ch. II, 4° und 2° in (3.14)) und damit

$$\lim_{h \uparrow \infty} E_h(\tau) \;=\; 0\,.$$

Dies illustriert die Eigenschaft (+) sehr deutlich. Alternativ zu (+) hätte man auch argumentieren können, daß für diese Stopzeiten τ im Modell (6.10) die bedingten Verteilungen $P_0^{X_\tau | \tau = j}$, $j \in \mathbb{R}$, nach Konstruktion auf die zweielementige Menge $\{a, -b\}$ konzentriert sind und deshalb keine Normalverteilungen sein können; nach 6.3 ii) ergibt sich auch auf diesem Wege, daß das Experiment (6.10) nicht gemischt normal sein kann. □

6.12 Beispiel: Sei $\mathcal{J}$ eine deterministische $d{\times}d$-Matrix, symmetrisch und strikt positiv definit. Auf einem Grundraum $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ bereiten wir *unabhängige* Prozesse B und φ vor:

i) $B = (B_t)_{t \geq 0}$ ist eine d-dimensionale Standard-Brownsche Bewegung mit $B_0 \equiv 0$;

ii) $\varphi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ hat die Pfadeigenschaften

$$\forall\, \omega \in \Omega' : \quad t \;\rightarrow\; \varphi_t(\omega) \;\text{ ist stetig, nichtfallend, mit } \varphi_0(\omega) = 0 \text{ und } \lim_{t \to \infty} \varphi_t(\omega) = +\infty\,;$$

$$\forall\, t \in (0, \infty) : \quad 0 < \varphi_t < \infty \quad P'\text{-fast sicher}\,.$$

Wir wollen den Prozeß φ zur Zeittransformation der Brownschen Bewegung benutzen; wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von B und φ hat man

$$(+)\qquad P'\Big(\,(B_{\varphi_{t_j}}-B_{\varphi_{t_{j-1}}})\in A_j\,,\,1\le j\le\ell\mid\varphi_{t_j}\,,\,1\le j\le\ell\Big)\;=\;\prod_{j=1}^{\ell}\mathcal{N}(0,\varphi_{t_j}-\varphi_{t_{j-1}})(A_j)$$

für beliebige $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_\ell<\infty$, und für beliebige $A_j\in\mathcal{B}(I\!R^d)$, $1\le j\le\ell$.

1) Für die d-dimensionale Brownsche Bewegung B benutzen wir wie in 5.11 und 6.9 den kanonischen Pfadraum $(C,\mathcal{C},\mathbb{G})$. Bezeichnet C^+ die Menge aller stetigen und nichtfallenden Funktionen $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ mit $g(0)=0$ und $\lim_{t\to\infty}g(t)=+\infty$, versehen mit der durch die Koordinatenprojektionen erzeugten σ–Algebra $\mathcal{C}^+$, so ist $(C^+,\mathcal{C}^+)$ ein kanonischer Pfadraum für den Prozeß φ. Auf einem Produktraum der Bauart

$$(\Omega,\mathcal{A},I\!F)\;:=\;\big(\,C\times C^+\,,\,\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}^+\,,\,(\mathcal{G}_t\otimes\mathcal{C}^+)_{t\ge0}\,\big)$$

(beachte die Konstruktion der Filtration) betrachten wir Wahrscheinlichkeitsmaße

$$P_h\;:=\;\mathcal{L}\bigg(\Big(\mathcal{J}^{1/2}\,B_{\varphi_t}+(\mathcal{J}\,h)\,\varphi_t\;,\;\varphi_t\Big)_{t\ge0}\mid P'\bigg)\;,\quad h\in I\!R^d\,.$$

P_h ist die Verteilung der durch $\mathcal{J}$ skalierten Brownschen Bewegung mit Driftparameter h, unabhängig zeittransformiert durch φ, zusammen mit dem Zeittransformationsprozeß. Wir schreiben (X,V) für den kanonischen Prozeß auf dem Produktraum $C\times C^+$, und $X_1,\ldots,X_d$ für die Komponenten von X. Die Wahl der Filtration $I\!F=(\mathcal{G}_t\otimes\mathcal{C}^+)_{t\ge0}$ in (6.13) entspricht einer Beobachtung des kanonischen Prozesses (X,V) in der folgenden Weise: bei bekanntem *Gesamtverlauf der zweiten Komponente* V beobachtet man die erste Komponente X bis zur Zeit t, $t\ge0$. Insbesondere ist X unter P_0 wegen $(+)$ ein stetiges lokales $I\!F$–Martingal mit vorhersehbarer quadratischer Variation $\langle X\rangle=\mathcal{J}\cdot V$. Weiter hängt $\mathcal{L}(V|P_h)$ nicht vom Parameter $h\in I\!R^d$ ab.

2) Für das in Schritt 1) definierte Modell

$$(6.13)\qquad \Big(\Omega,\mathcal{A},I\!F,\{P_h:h\in I\!R^d\}\Big)$$

kann man – wie in 5.11 d), mit Liptser und Shiryaev (2001, Thm. 7.7) bzw. mit Jacod und Shiryaev (1987, Thm. III.3.4) – folgendes zeigen:

α) für jedes feste $t<\infty$ sind alle Wahrscheinlichkeitsmaße P_h^t, $h\in I\!R^d$, zueinander äquivalent (dabei bezeichnet P_h^t die Restriktion von P_h auf $\mathcal{F}_t=\mathcal{G}_t\otimes\mathcal{C}^+$);

β) für jedes $h\in I\!R^d$ ist der Prozeß $L^{h/0}=\Big(L_t^{h/0}\Big)_{t\ge0}$

$$(++)\qquad L_t^{h/0}\;:=\;\exp\Big(h^\top X_t\;-\;\frac12\,(h^\top\mathcal{J}\,h)\,V_t\Big)\;=\;\exp\Big(h^\top X_t\;-\;\frac12\,h^\top\langle X\rangle_t\,h\Big)$$

eine Festlegung des Dichteprozesses von P_h zu P_0 relativ zur Filtration $I\!F$. Für jedes feste $t < \infty$ liefert $L_t^{h/0}$ also eine Version der Dichte von P_h^t zu P_0^t.

c) Fixiere $t < \infty$. Das statistische Modell

$$\mathcal{E} \;:=\; \left(\Omega\,,\,\mathcal{F}_t\,,\,\{P_h^t : h \in I\!R^d\}\right) \tag{6.14}$$

ist wegen (++) zunächst ein quadratisches Modell $\mathcal{E}(S,J)$ im Sinne von 6.1 mit

$$S \;=\; X_t\;, \quad J \;=\; \mathcal{J}\cdot V_t \;=\; \langle X\rangle_t\;.$$

Dabei gilt nach Konstruktion in (6.13) wegen $\mathcal{L}\,(V_t|P_h) = \mathcal{L}\,(\varphi_t|P')$:

$$\mathcal{L}\,(J\mid P_h) \quad \text{ist unabhängig von } h \in I\!R^d\;.$$

Damit ist das Modell (6.14) gemischt normal im Sinne von 6.2–6.3; die zentrale Statistik

$$Z \;=\; J^{-1}S \;=\; \mathcal{J}^{-1}\begin{pmatrix} X_t^1\,/\,V_t \\ \dots \\ X_t^d\,/\,V_t \end{pmatrix}$$

ist nach 6.8–6.10 zugleich Maximum-Likelihood-Schätzer für den unbekannten Parameter h in $I\!R^d$, Minimax-Schätzer, und bestkonzentrierter stark äquivarianter Schätzer. Die parameterunabhängige Verteilung der Schätzfehler von Z ist die 'Varianzmischung'

$$P_h\,(Z-h\in A) \;=\; \int_0^\infty P'\,(\varphi_t\in ds)\;\mathcal{N}\left(0\,,\,\mathcal{J}^{-1}\frac{1}{s}\right)(A)\;,\quad A\in\mathcal{B}(I\!R^d)\;,\;h\in I\!R^d\;.$$

d) Im Spezialfall deterministischer φ_t in Schritt b) reduziert sich das gemischt normale Modell (6.14) auf ein Gauß-Shift-Modell $\mathcal{E}(\mathcal{J}\cdot\varphi_t)$ in der Notation aus 5.2.

e) Hier ein Beispiel für einen Prozeß $\varphi = (\varphi_t)_t$ mit den eingangs geforderten Eigenschaften: Sei auf dem Grundraum $(\Omega',\mathcal{A}',P')$ unabhängig von der Brownschen Bewegung $B = (B^1,\dots,B^d)$ ein stabiler wachsender Prozeß S^α mit Index $\alpha\in(0,1)$ gegeben. Dies ist ein Prozeß mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen, deren Laplace-Transformierte durch

$$E\left(e^{-\lambda S_t^\alpha}\right) \;=\; e^{-\,t\,\lambda^\alpha}\;,\quad \lambda\ge 0\,,t\ge 0$$

gegeben ist. Die Pfade von S^α sind wachsend und P'–fast sicher nirgends konstant, sie wachsen nur durch Sprünge. Definiere φ als Prozeß der level-crossing-Zeiten von S^α:

$$\varphi_t \;:=\; \inf\{s>0 : S_s^\alpha > t\}\;,\quad t\ge 0\;.$$

Die Pfade von φ sind stetig und nichtfallend; sie besitzen alle eingangs geforderten Eigenschaften. In diesem Fall ist $\mathcal{L}(\varphi_t|P')$ explizit bekannt, hat die Laplacetransformierte

$$E_{P'}\left(e^{-\lambda\,\varphi_t} \right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{\Gamma(1+n\alpha)}\, t^{n\alpha} \;, \quad \lambda \geq 0\;,\; t \geq 0$$

(Mittag-Leffler-Verteilung), und besitzt endliche Momente beliebiger Ordnung. Siehe Feller (1971, insbesondere p. 453), Bingham, Goldie und Teugels (1987), oder Höpfner und Löcherbach (2003, Section 2) mit den dort angegebenen Referenzen. □