Kapitel VIII

Rangstatistiken und lokal asymptotische Normalität: ein Zweistichprobenproblem

Reinhard Höpfner

Vorlesung Mathematische Statistik, Winter 2004/2005 und Sommer 2005

Institut für Mathematik, FB 08, Johannes Gutenberg Universität Mainz

17.06.05

Übersicht zu Kapitel VIII :

A. LAN und Schärfe von Rangtests

B. Beweis von Hauptsatz 8.8

A. LAN und Schärfe von Rangtests

8.1 Ein Zweistichprobenproblem: A) Betrachtet wird das folgende Zweistichprobenproblem: man hat unabhängige ZV

$$(+) \qquad X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n , \quad n = 2m ,$$

so daß mit unbekanntem $F \in \mathcal{F}_c$, der Klasse aller stetigen Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$, und mit unbekannten Verschiebungsparametern $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, die Aussage

$$X_i \sim F(\cdot - \mu_1) , \ 1 \leq i \leq m , \quad X_i \sim F(\cdot - \mu_2) , \ m+1 \leq i \leq n$$

gilt. In äquivalenter Formulierung: man hat

$$(X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} (Y_1 + \mu_1, \ldots, Y_m + \mu_1, Y_{m+1} + \mu_2, \ldots, Y_n + \mu_2)$$

mit $Y_1, \ldots, Y_n$ iid $\sim F \in \mathcal{F}_c$, und mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Beobachtung (+) soll eine Entscheidung zwischen den Hypothesen

$$\mathcal{H} : \mu_1 \leq \mu_2 \quad \text{vs.} \quad \mathcal{K} : \mu_1 > \mu_2$$

getroffen werden. Da $F \in \mathcal{F}_c$ unbekannt ist, benutzt man Rangstatistiken. Der *Rang* der Beobachtung X_i in der Gesamtstichprobe (+) ist

$$R_i := \sum_{\ell=1}^{n} 1_{\{X_\ell \leq X_i\}} = \sum_{\ell=1}^{n} 1_{(-\infty, X_i]}(X_\ell) , \quad 1 \leq i \leq n .$$

Dies ist die Zahl aller Beobachtungen in (+), die X_i nicht übersteigen. Ist nun der Verschiebungsparameter μ_1 im ersten Block von (+) größer als der Verschiebungsparameter μ_2 im zweiten, so sollten die Beobachtungen $X_1, \ldots, X_m$ des ersten Blocks tendenziell höhere Ränge in der Gesamtstichprobe (+) einnehmen als die Beobachtungen $X_{m+1}, \ldots, X_n$ des zweiten Blocks. Mit einer Rangstatistik S der Form

$$S := \sum_{i=1}^{m} a(R_i) , \quad a : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{nichtfallend}$$

mißt man diese Verschiebung der Ränge, und kann einen Test für $\mathcal{H}$ gegen $\mathcal{K}$ als Rangtest

$$\varphi := \left(1_{(c,\infty)} + \gamma \, 1_{\{c\}} \right) \circ S , \quad c \in \mathbb{R} , \ \gamma \in [0,1]$$

ansetzen. Bekannte Beispiele sind der *Wilcoxon-Test*

$$S := \sum_{i=1}^{m} R_i , \quad \text{mit} \quad a(\cdot) = \mathrm{id} ,$$

der *Median-Test*

$$S \;:=\; \sum_{i=1}^{m} 1_{\{R_i \,>\, \frac{n+1}{2}\}} \;=\; \sum_{i=1}^{m} a(R_i) \quad \text{mit} \quad a(k) = 1_{(\frac{1}{2},1)}(\frac{k}{n+1}) \;,\; 1 \le k \le n$$

und der *van der Waerden-Test*

$$S \;:=\; \sum_{i=1}^{m} \Phi^{-1}\left(\frac{R_i}{n+1}\right) \;, \quad \Phi(\cdot) \text{ die Verteilungsfunktion von } \mathcal{N}(0,1).$$

B) Wir präzisieren die Problemstellung aus A). Das in A) betrachtete statistische Modell kann äquivalent geschrieben werden als

$$\left(\Omega' \,,\, \mathcal{A}' \,,\, \mathcal{P} := \left\{ P_{F,\mu} \;:=\; [\bigotimes_{i=1}^{m} F(\cdot - \mu)] \otimes [\bigotimes_{i=m+1}^{n} F(\cdot + \mu)] \;:\; \mu \in I\!R \,,\, F \in \mathcal{F}_c \right\}\right)$$

womit einer der Verschiebungsparameter aus A) eingespart ist. Hierbei ist

$$\Omega' \;:=\; \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n : \text{ es gilt } x_i \neq x_j \text{ für alle } i \neq j \right\} \;\in\; \mathcal{B}(I\!R^n)$$

der um 'Mehrfachbeobachtungen' (die wegen $F \in \mathcal{F}_c$ nur mit Wahrscheinlichkeit 0 vorkommen) bereinigte $I\!R^n$, mit Spur-σ-Algebra $\mathcal{A}'$. Wir schreiben $(X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ für die kanonische Variable auf $(\Omega', \mathcal{A}')$. Die Hypothesen aus A) haben als Teilmengen von $\mathcal{P}$ die Gestalt

$$\mathcal{H} \;=\; \left\{P_{F,\mu} : F \in \mathcal{F}_c \,,\, \mu \le 0\right\} \quad \text{vs.} \quad \mathcal{K} \;=\; \left\{P_{F,\mu} : F \in \mathcal{F}_c \,,\, \mu > 0\right\}$$

und der *Rand der Hypothesen* ist

$$\mathcal{H}_0 \;:=\; \left\{P_{F,0} : F \in \mathcal{F}_c\right\} \;.$$

Für jedes feste $F \in \mathcal{F}_c$ entsteht 'eindimensional' ein parametrisches Submodell

$$\mathcal{P}^F \;:=\; \{P_{F,\mu} : \mu \in I\!R\} \;.$$

C) Die folgende einfache Aussage ist die Grundlage aller elementaren Betrachtungen über Rangstatistiken: für jedes $P \in \mathcal{H}_0$ besteht die *Gesamtstichprobe* $(X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n)$ in (+) aus iid Beobachtungen, folglich gilt

$$\forall\, F \in \mathcal{F}_c \;:\quad \mathcal{L}\left((R_1, \ldots, R_n) \mid P_{F,0} \right) \;=\; \text{Gleichverteilung auf } \mathcal{S}_n$$

wobei $\mathcal{S}_n$ die Gruppe aller Permutationen von n Gegenständen bezeichnet. Unter $P \in \mathcal{H}_0$ ist also das Tupel der Ränge $(R_1, \ldots, R_n)$ eine zufällig gewählte Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$. □

8.2 Hilfssatz: Zu jedem nichtfallenden $a(\cdot) : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow I\!R$ und zu jedem vorgegebenen $\alpha \in (0, 1)$ gibt es $c_\alpha \in I\!R$ und $\gamma_\alpha \in [0, 1]$ so daß der Rangtest

$$\varphi \;:=\; \left(1_{(c_\alpha, \infty)} \;+\; \gamma_\alpha \; 1_{\{c_\alpha\}} \right) \circ S \quad \text{mit} \quad S \;=\; \sum_{i=1}^{m} a(R_i)$$

unverfälscht ist für $\mathcal{H}$ gegen $\mathcal{K}$ mit Niveau α: es gilt

$$E_P(\varphi) \;=\; \alpha \quad \text{für jedes } P \in \mathcal{H}_0 \;,$$

$$E_P(\varphi) \;\leq\; \alpha \quad \text{für jedes } P \in \mathcal{H} \;, \quad E_P(\varphi) \;\geq\; \alpha \quad \text{für jedes } P \in \mathcal{K} \;.$$

Beweis: 1) Beachte zunächst: S kann nur endlich viele Werte annehmen. Unter $P_{F,\mu}$ gilt

$$(X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n) \;\stackrel{d}{=}\; (Y_1 + \mu, \ldots, Y_m + \mu, Y_{m+1} - \mu, \ldots, Y_n - \mu)$$

für $F \in \mathcal{F}_c$, $\mu \in I\!R$, also sind wegen Monotonie von $a(\cdot)$ alle Abbildungen

$$\mu \;\longrightarrow\; P_{F,\mu}(S \geq x) \quad , \quad \mu \;\longrightarrow\; P_{F,\mu}(S > x)$$

nichtfallend, für beliebiges festes x. Damit sind Gütefunktionen von Tests φ wie in 8.1 A) bei festgehaltetem $F \in \mathcal{F}_c$

$$\mu \;\longrightarrow\; E_{P_{F,\mu}}(\varphi) \;=\; (1 - \gamma)\, P_{F,\mu}(S > c) \;+\; \gamma\, P_{F,\mu}(S \geq c)$$

nichtfallend.

2) Wegen 8.1 C) hängt auf dem Rand $\mathcal{H}_0$ der Hypothesen der Wert $E_{P_{F,0}}(\varphi)$ nicht von der zugrundeliegenden Verteilungsfunktion $F \in \mathcal{F}_c$ ab. Also ist nach Schritt 1) jeder Test φ wie in 8.1 A) unverfälscht für $\mathcal{H}$ gegen $\mathcal{K}$.

3) Seien $y_1 > y_2 > \ldots > y_k$ die möglichen (verschiedenen) Werte der Statistik S in absteigender Reihenfolge. Durch einfaches 'Auszählen' auf $\mathcal{S}_n$ bestimmt man daher – unabhängig von $F \in \mathcal{F}_c$ wegen 2) – die Wahrscheinlichkeiten $P_{F,0}(S \geq y_j)$ sukzessiv in $j = 1, 2, \ldots, k$, und setzt

$$c_\alpha \;:=\; \max\left\{ y_j : P_{F,0}(S \geq y_j) > \alpha \right\} \quad , \quad \gamma_\alpha := \frac{\alpha - P_{F,0}(S > c_\alpha)}{P_{F,0}(S = c_\alpha)}$$

(mit Konvention $\frac{0}{0} := 0$ für γ_α). Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Was kann man über die Schärfe von Rangtests aussagen ? Angesichts der komplexen Struktur der Alternative $\mathcal{K}$ gibt es keinerlei Hoffnung, die Schärfe $E_P(\varphi)$ eines Rangtests φ nach 8.2 explizit an beliebigen Stellen $P \in \mathcal{K}$ berechnen zu können.

8.3 Bemerkung: Neyman-Pearson-Argumente (der aus klassischen parametrischen Modellen vertrauten Art) können auf der Suche nach guten Tests für $\mathcal{H}$ gegen $\mathcal{K}$ nicht weiterhelfen.
i) Betrachte einen Punkt $P = P_{F,\mu} \in \mathcal{K}$ mit $\mu > 0$ und mit $F \in \mathcal{F}_c$. Als Test der einfachen Hypothese $\{P_{F,0}\}$ gegen die einfache Alternative $\{P_{F,\mu}\}$ zum Niveau α unterliegt der Rangtest φ aus 8.2 notwendig dem Neyman-Pearson Test

$$\varphi^* \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{auf} & \left\{L_F^{\mu/0} \;>\; \widetilde{c}_\alpha\right\} \\ 0 & \text{auf} & \left\{L_F^{\mu/0} \;<\; \widetilde{c}_\alpha\right\} \\ \widetilde{\gamma}_\alpha & \text{auf} & \left\{L_F^{\mu/0} \;=\; \widetilde{c}_\alpha\right\} \end{array} \right\}$$

zu demselben Niveau α, welcher mit dem Dichtequotienten $L_F^{\mu/0}$ von $P_{F,\mu}$ zu $P_{F,0}$ auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ arbeitet; hierbei ist gesetzt (mit Konvention $\frac{0}{0} := 0$ für $\widetilde{\gamma}_\alpha$)

$$\widetilde{c}_\alpha \;:=\; \sup\{y : P_{F,0}\left(L_{n,F}^{\mu/0} \geq y\right) > \alpha\} \quad , \quad \widetilde{\gamma}_\alpha := \frac{\alpha - P_{F,0}\left(L_{n,F}^{\mu/0} > \widetilde{c}_\alpha\right)}{P_{F,0}\left(L_{n,F}^{\mu/0} = \widetilde{c}_\alpha\right)} \;.$$

Dieser Neyman-Pearson Test φ^* ist auf die konkrete Wahl von F und μ zugeschnitten. Nicht einmal im 'einfachsten' Fall $F \ll \lambda\!\!\lambda$ mit stetiger und strikt positiver Dichte $f = \frac{dF}{d\lambda\!\!\lambda}$, in dem

$$L_{n,F}^{\mu/0}(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \frac{\prod_{i=1}^m f(x_i - \mu) \prod_{i=m+1}^n f(x_i + \mu)}{\prod_{i=1}^n f(x_i)}$$

gilt, liefert der Test φ^* einen guten Test für einparametrige Alternativen

$$\mathcal{H}^F := \{P_{F,\mu} : \mu \leq 0\} \quad \text{gegen} \quad \mathcal{K}^F := \{P_{F,\mu} : \mu > 0\}$$

in einer *hinreichend allgemeinen Klasse von Dichten* f (bzw. von Verteilungsfunktionen F). Wir begründen dies in ii).
ii) Fixiere in i) $F \in \mathcal{F}_c$ so daß das einparametrige Modell $\mathcal{P}^F$ (vgl. 8.2) eine suffiziente Statistik T^F und 'monotone Dichtequotienten' besitzt (siehe Witting (1985, Kap. 2.2.1 und 2.2.3) und Pfanzagl (1994, Ch. 4.5); dies ist das allgemeinste klassische Argument zur Konstruktion guter Tests in einparametrigen Familien). Dann nimmt der in i) oben (mit beliebig fixiertem $\mu > 0$) betrachtete Test φ^* die Form

$$\varphi^* \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{auf} & \left\{T^F \;>\; \widehat{c}_\alpha\right\} \\ 0 & \text{auf} & \left\{T^F \;<\; \widehat{c}_\alpha\right\} \\ \widehat{\gamma}_\alpha & \text{auf} & \left\{T^F \;=\; \widehat{c}_\alpha\right\} \end{array} \right\}$$

an, und ist im Modell $\mathcal{P}^F$ ein UMP Test mit Niveau α für

$$\mathcal{H}^F := \{P_{F,\mu} : \mu \leq 0\} \quad \text{gegen} \quad \mathcal{K}^F := \{P_{F,\mu} : \mu > 0\} \; .$$

Betrachte nun ein weiteres $G \in \mathcal{F}_c$; die einparametrige Familie $\mathcal{P}^G$ besitze ebenfalls eine suffiziente Statistik T^G – verschieden von T^F, genauer: das Ereignis $\{T^F > \widehat{c}_\alpha\}$ stimme nicht $\lambda\!\!\lambda$-fast sicher mit einem der Ereignisse $\{T^G > c\}$, $c \in I\!R$, überein – und monotone Dichtequotienten.
Dann wird der mit T^F gebildete Test $\varphi^* =: \varphi^{F,*}$ – UMP im Modell $\mathcal{P}^F$ – als Test für

$$\mathcal{H}^G := \{P_{G,\mu} : \mu \leq 0\} \quad \text{gegen} \quad \mathcal{K}^G := \{P_{G,\mu} : \mu > 0\}$$

in $\mathcal{P}^G$ im allgemeinen weder das Niveau α besitzen noch unverfälscht sein. Analog wird der mit T^G zum Niveau α in $\mathcal{P}^G$ gebildete Test $\varphi^{G,*}$ für $\mathcal{H}^G$ gegen $\mathcal{K}^G$ – UMP im Modell $\mathcal{P}^G$ – in $\mathcal{P}^F$ als Test für $\mathcal{H}^F$ gegen $\mathcal{K}^F$ unbrauchbar sein. $\square$

8.4 Definition: Bezeichne $\mathcal{F}^*$ die Teilklasse aller Verteilungsfunktionen $F \in \mathcal{F}_c$, so daß gilt
i) es gibt eine strikt positive und stetig differenzierbare Lebesgue-Dichte $f = \frac{dF}{d\lambda\!\!\lambda}$;
ii) es gibt eine endliche Fisher-Information

$$I_F \;\; := \;\; \int_{I\!R} \left(-\frac{f'}{f} \right)^2 dF \;\; < \;\; \infty$$

im Lokationsmodell $\{f(\cdot - \mu) d\lambda\!\!\lambda : \mu \in I\!R\}$, vgl. 1.4.

Das erste Hauptwerkzeug zur Analyse der Schärfe von Rangtests ist LAN. Wir formulieren ein 'zweites Le Cam Lemma' für das Zweistichprobenproblem:

8.5 Hauptsatz: Schreibe $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathcal{P}_n)$ statt $(\Omega', \mathcal{A}', \mathcal{P})$, abhängig von $n \in I\!N$. Schreibe $\mathcal{P}_n^F$ statt $\mathcal{P}^F$, und $P_{F,\mu}^n$ statt $P_{F,\mu}$. Für jedes $F \in \mathcal{F}^*$ ist die Folge von Experimenten $\left(\mathcal{P}_n^F\right)_n$ lokal asymptotisch normal an der Stelle 0: es gilt

$$\Lambda_{n,F}^{h_n/0} \quad = \quad \log \left(\frac{d\, P_{F,h_n/n}^n}{d\, P_{F,0}^n} \right) \quad = \quad h_n\, \Delta_n^F \; - \; \frac{1}{2} h_n^2\, I_F \; + \; o_{(P_{F,0}^n)_n}(1)$$

$$\Delta_n^F \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^{m} \left(-\frac{f'}{f} \right) (X_i) \; - \; \sum_{i=m+1}^{n} \left(-\frac{f'}{f} \right) (X_i) \right]$$

für beliebige beschränkte Folgen $(h_n)_n$ in $I\!R$, für $n \to \infty$, mit

$$\mathcal{L}\left(\Delta_n^F \mid P_{F,0}^n\right) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{N}(\,0\,,\, I_F\,) \; .$$

Beweis: 1) Wir zeigen: Für $F \in \mathcal{F}^*$ ist das Lokationsmodell $\{f(\cdot - \mu)d\lambda\!\!\lambda : \mu \in I\!\!R\}$ an jeder Stelle $\mu \in I\!\!R$ L^2-differenzierbar mit Score

$$V_\mu \;=\; \left(-\frac{f'}{f}\right)(\cdot - \mu)$$

und Fisher-Information I_F (unabhängig vom Parameter) wie in 8.4 ii) definiert:
Für $F \in \mathcal{F}^*$ ist nach 1.4 V_μ der Score in μ und $E_\mu(V_\mu^2) = I_F$ die Fisher-Information in μ, im elementaren Sinn aus 1.2. Schreibe $V := V_0$; wegen $V_\mu = V(\cdot - \mu)$ und $f_\mu = f(\cdot - \mu)$ bleibt nach 4.1' zum Nachweis der Behauptung 1) zu zeigen

$$\int_{I\!\!R} \left| \sqrt{f(x-\eta)} \;-\; \sqrt{f(x)} \;-\; \frac{1}{2}\sqrt{f(x)}\,\eta\, V(x) \right|^2 dx \;\;=\;\; o(\eta^2) \quad \text{für } \eta \to 0\ .$$

Betrachte Kompakta $K = [-C, +C]$. Auf K^c hat man mit einer elementaren Abschätzung

$$\sup_{|\eta| \le 1} \int_{K^c} \left(\sqrt{f(x-\eta)} \;-\; \sqrt{f(x)} \right)^2 dx \;\;\le\;\; 2 \int_{[-C+1, C-1]^c} f(v)\, dv\ ,$$

was durch große Wahl von C beliebig klein gemacht werden kann, genauso wie

$$\sup_{|\eta| \le 1} \int_{K^c} \left(\frac{1}{2}\sqrt{f(x)}\,\eta\, V(x) \right)^2 dx \;\;=\;\; \frac{1}{4} \int_{K^c} \left(-\frac{f'}{f} \right)^2 dF\ .$$

Auf K gilt aber wegen dominierter Konvergenz für $\eta \to 0$

$$\frac{1}{\eta^2} \int_K \left| \sqrt{f(x-\eta)} \;-\; \sqrt{f(x)} \;-\; \frac{1}{2}\sqrt{f(x)}\,\eta\, V(x) \right|^2 dx \;\;\longrightarrow\;\; 0\ .$$

2) Wegen Schritt 1) kann man Le Cam's Zweites Lemma 4.11 für iid Experimente separat auf die beiden Blöcke $(X_1, \ldots, X_m)$ und $(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ im Zweistichprobenmodell $\mathcal{P}_n$ anwenden, und erhält für $n \to \infty$ sofort die Behauptung des Satzes 8.4. $\square$

Als nächstes sollen die Rangstatistiken in eine Form gebracht werden, die eine Anwendung von Le Cam's Drittem Lemma (3.6 und 3.6') gestattet.

8.6 Voraussetzung: Wir indizieren auch $a(\cdot)$ und S in 8.1 A) durch n:

$$a_n : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow I\!\!R \quad \text{nichtfallend}\ , \quad S_n = \sum_{i=1}^{m} a_n(R_i)\ , \quad \text{mit } 2m = n\ .$$

Die Schar $a_n(\cdot)$ stabilisiere sich für $n \to \infty$ in folgendem Sinn: es gibt $\psi \in L^2\left((0,1)\,,\, \lambda\!\!\lambda\right)$ mit

$$\int_0^1 \left(\, a_n(1 + [xn]) - \psi(x)\, \right)^2 dx \;\;\longrightarrow\;\; 0\ , \quad n \to \infty\ ,$$

dabei sei ψ nichtfallend und nichtkonstant auf $(0,1)$, mit Zentrierung

$$\int_0^1 \psi(v)\, dv \;=\; 0 \;.$$

8.6' Bemerkungen: a) Die Stabilisierungsbedingung aus 8.6 ist insbesondere erfüllt, falls gilt:

$$\psi : (0,1) \to I\!R \;\text{ nichtfallend, rechtsstetig (oder: linksstetig), beschränkt,}$$
$$a_n(j) \;:=\; \psi\left(\frac{j}{n+1}\right) \quad , \quad 1 \le j \le n \quad , \quad n \ge 1 \;;$$

dies sieht man mit dominierter Konvergenz.

b) Die in 8.6 vorgenommene Zentrierung von $\psi(\cdot)$ stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Addiert man bei der Konstruktion eines Rangtests zum Niveau α in 8.2 zu der Funktion $a_n(\cdot)$ eine Konstante c, so reicht es, die in 8.2 für dieses n festgelegten kritischen Werte $c_{n,\alpha}$ um dieselbe Konstante c zu verschieben. Analoges gilt für Multiplikation von $a_n(\cdot)$ mit einer Konstanten.

c) Entsprechend der Vorschrift aus a) waren bereits die Funktionen $a_n(\cdot)$ für den van der Waerden-Test in 8.1 A) angesetzt worden. In diesem Fall hat man

$$\psi(v) \;:=\; \Phi^{-1}(v) \;, \quad 0 < v < 1$$

wobei wegen $\Phi^{-1}(U) \sim \mathcal{N}(0,1)$ für auf $(0,1)$ gleichverteiltes U gilt

$$\int_0^1 \psi(v)dv \;=\; \int_0^1 u\,\Phi(du) \;=\; 0 \quad , \quad \int_0^1 \psi^2(v)dv \;=\; \int_0^1 u^2\,\Phi(du) \;=\; 1 \;.$$

Für den Median-Test hat man

$$\psi(v) \;:=\; 1_{(\frac{1}{2},1)}(v) - \frac{1}{2} \;, \quad 0 < v < 1$$

wobei die Verschiebung um $\frac{1}{2}$ nach b) irrelevant ist. Dasselbe gilt für den Wilcoxon-Test, mit

$$\psi(v) \;:=\; v - \frac{1}{2} \;, \quad 0 < v < 1 \;,$$

denn es ist nach b) unerheblich, ob man in 8.1 A) für festes n die Wilcoxon-Rangstatistik S in Form $\sum_{i=1}^m R_i$ oder in Form $\sum_{i=1}^m \frac{R_i}{n+1}$ angesetzt hatte.

8.7 Bezeichnungen: Definiere Koeffizienten

$$c_{n,i} := \frac{1}{\sqrt{n}} \;,\; 1 \le i \le m \;, \quad c_{n,i} := -\frac{1}{\sqrt{n}} \;,\; m{+}1 \le i \le n \;,$$

dann haben für $F \in \mathcal{F}^*$ mit Dichte f die Δ_n^F aus 8.5 die Form

$$\Delta_n^F \;:=\; \sum_{i=1}^n c_{n,i} \left(-\frac{f'}{f}\right)(X_i)\;.$$

Definiert man

$$\check{S}_n \;:=\; \sum_{i=1}^n c_{n,i}\, a_n(R_i) \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}}\,(2\,S_n - \overline{a}_n) \quad , \quad \overline{a}_n \;:=\; \sum_{j=1}^n a_n(j) \;=\; \sum_{i=1}^n a_n(R_i)\;,$$

so gilt in dieser Darstellung

$$(+) \qquad E_{P^n_{F,0}}\left(\check{S}_n\right) \;=\; 0 \quad \text{für jedes } F \in \mathcal{F}_c\;.$$

Zum Beweis der Aussage (+) beachte man, daß nach 8.1 C)

$$E_{P^n_{F,0}}\left(\sum_{i=1}^n c_{n,i}\, a_n(R_i)\right) \;=\; \frac{1}{n\,!}\sum_{\pi\in\mathcal{S}_n}\left[\sum_{i=1}^n c_{n,i}\, a_n(\pi_i)\right] \;=\; \frac{1}{n\,!}\sum_{\pi\in\mathcal{S}_n}\left[\sum_{i=1}^n c_{n,i}\, a_n((\eta\circ\pi)_i)\right]$$

gilt, für jedes feste $\eta \in \mathcal{S}_n$. Wähle speziell $\eta := (m{+}1, m{+}2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, m)$, dann folgt wegen des Vorzeichenwechsels in den Koeffizienten $c_{n,i}$

$$\sum_{i=1}^n c_{n,i}\,(a_n\circ\eta)(\pi_i) \;=\; -\sum_{i=1}^n c_{n,i}\, a_n(\pi_i) \quad \text{für jedes } \pi \in \mathcal{S}_n$$

und damit die Behauptung. Wir nennen $\check{S}_n$ eine *zentrierte und skalierte Rangstatistik.* □

Wir formulieren nun einen Satz, der neben 8.5 das zweite Hauptwerkzeug zur Analyse der Schärfe von Rangtests sein wird. Der (lange) Beweis des Satzes wird in Teilkapitel B gegeben werden.

8.8 Hauptsatz: Seien $a_n(\cdot)$, $n \geq 1$, und $\psi(\cdot)$ wie in 8.6. Dann gilt für $F \in \mathcal{F}_c$

$$E_{P^n_{F,0}}\left(\check{S}_n - T_n^F\right)^2 \;\longrightarrow\; 0 \quad , \quad T_n^F \;:=\; \sum_{i=1}^n c_{n,i}\,\psi(F\circ X_i)$$

für $n \to \infty$. Man nennt T_n^F *Vergleichsstatistik für* $\check{S}_n$ *unter* $P^n_{F,0}$. □

8.9 Bemerkung: Sei $F \in \mathcal{F}_c$. Dann sind $U_i := F\circ X_i$, $1 \leq i \leq n$, iid und auf $(0,1)$ gleichverteilt; damit hat die Folge $\left(T_n^F\right)_n$ unter $\left(P^n_{F,0}\right)_n$ die Eigenschaften

$$E_{P^n_{F,0}}\left(T_n^F\right) \;=\; 0 \quad , \quad Var_{P^n_{F,0}}\left(T_n^F\right) \;=\; \int_0^1 \psi^2(x)dx$$

$$\mathcal{L}\left(T_n^F \mid P^n_{F,0}\right) \;\longrightarrow\; \mathcal{N}\left(0\,,\int_0^1 \psi^2(x)dx\right) \quad , \quad n\to\infty\;.$$

Wegen 8.8 – und (+) in 8.7 – hat man damit auch

$$E_{P^n_{F,0}}\left(\check{S}_n\right) \;=\; 0 \quad , \quad Var_{P^n_{F,0}}\left(\check{S}_n\right) \;\longrightarrow\; \int_0^1 \psi^2(x)dx \;, \quad n \to \infty$$

$$\mathcal{L}\left(\,\check{S}_n \mid P^n_{F,0}\right) \;\longrightarrow\; \mathcal{N}\left(0\,,\int_0^1 \psi^2(x)dx\right)\;, \quad n \to \infty$$

für die zentrierte und skalierte Rangstatistik. □

8.10 Hilfssatz: Seien $a_n(\cdot)$, $n \geq 1$, und $\psi(\cdot)$ wie in 8.6. Dann gilt für $F \in \mathcal{F}^*$

$$\lim_{n\to\infty}\;\sup_{|h|\leq C}\; P^n_{F,h/\sqrt{n}}\left(\,\left|\check{S}_n - T^F_n\right| > \varepsilon\,\right) \;=\; 0$$

mit $\varepsilon > 0$, $C < \infty$ beliebig.

Beweis: Fixiere $F \in \mathcal{F}^*$. Nach Satz 8.5 ist die Folge der Experimente $\left(\mathcal{P}^F_n\right)_n$ an der Stelle 0 lokal asymptotisch normal. 7.3 zeigt wechselseitige Benachbartheit

$$\left(P^n_{F\,,\,h_n/\sqrt{n}}\right)_n \;\;\lhd\rhd\;\; \left(P^n_{F,0}\right)_n$$

für beliebige beschränkte Folgen $(h_n)_n$ in $I\!R$. Nach 8.8 weiß man

$$\check{S}_n \;=\; T^F_n \;+\; o_{\left(P^n_{F,0}\right)_n}(1)\;, \quad n \to \infty\;,$$

woraus mit Benachbartheit die Aussage

$$\check{S}_n \;=\; T^F_n \;+\; o_{\left(P^n_{F\,,\,h_n/\sqrt{n}}\right)_n}(1)\;, \quad n \to \infty$$

folgt. Diese gilt für jede beschränkte Folge $(h_n)_n$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

8.11 Satz: Seien $a_n(\cdot)$, $n \geq 1$, und $\psi(\cdot)$ wie in 8.6. Dann gilt für $F \in \mathcal{F}^*$ mit Dichte f

$$\mathcal{L}\left(\,\check{S}_n \mid P^n_{F\,,\,h_n/\sqrt{n}}\right) \;\longrightarrow\; \mathcal{N}\left(h\cdot\left\langle\psi,\left(-\frac{f'}{f}\right)\circ F^{-1}\right\rangle\,,\,\|\psi\|^2\right)\;, \quad n \to \infty$$

für beliebige konvergente Folgen $h_n \to h$, wobei $\langle g_1, g_2\rangle = \int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx$ das Skalarprodukt und $\|g\| = \left[\int_0^1 g^2(x)dx\right]^{1/2}$ die Norm in $L^2((0,1),\lambda\!\!\lambda)$ bezeichnet.

Beweis: Fixiere $F \in \mathcal{F}^*$ mit Dichte f und schreibe

$$\Psi \;=\; \Psi_F \;:=\; \left(-\frac{f'}{f}\right)\circ F^{-1}\;.$$

Wegen $F \in \mathcal{F}^*$ und wegen Definition von Score (vgl. 1.2) und Information im Lokationsmodell aus 8.4 gilt

$$\Psi \in L^2((0,1),\lambda\!\!\lambda) \,, \quad \int_0^1 \Psi(v)\,dv \;=\; 0 \,, \quad \int_0^1 \Psi^2(v)\,dv \;=\; I_F \,.$$

Aus der Darstellung der log-Likelihoodratios nach 8.5

$$\Lambda_{n,F}^{h_n/0} \;=\; h_n\,\Delta_n^F \;-\; \frac{1}{2}h_n^2\,I_F \;+\; o_{\left(P_{F,0}^n\right)_n}(1) \,, \quad n \to \infty$$

und dem Vergleich der Größen

$$\Delta_n^F \;=\; \sum_{i=1}^n c_{n,i}\,\Psi(F \circ X_i) \quad , \quad T_n^F \;=\; \sum_{i=1}^n c_{n,i}\,\psi(F \circ X_i)$$

folgt für konvergente Folgen $h_n \to h$ wie in 8.9 schwache Konvergenz für $n \to \infty$:

$$(+) \qquad \mathcal{L}\left(\Lambda_{n,F}^{h_n/0}\,,\, T_n^F \mid P_{F,0}^n\right) \;\longrightarrow\; \mathcal{N}\left(\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2}h^2 I_F \\ 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} h^2 I_F & h\,\langle \Psi, \psi\rangle \\ h\,\langle \Psi, \psi\rangle & \|\psi\|^2 \end{array}\right)\right) .$$

Nach Le Cam's Drittem Lemma tritt beim Wechsel zu benachbarten Wahrscheinlichkeitsmaßen ein Mittelwertshift auf: 7.3 und 3.6' angewandt auf (+) zeigen

$$(++) \qquad \mathcal{L}\left(\Lambda_{n,F}^{h_n/0}\,,\, T_n^F \mid P_{F\,,\,h_n/\sqrt{n}}^n\right) \;\longrightarrow\; \mathcal{N}\left(\left(\begin{array}{c} +\frac{1}{2}h^2 I_F \\ h\,\langle \Psi, \psi\rangle \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} h^2 I_F & h\,\langle \Psi, \psi\rangle \\ h\,\langle \Psi, \psi\rangle & \|\psi\|^2 \end{array}\right)\right) .$$

Hilfssatz 8.10 erlaubt nun, die Vergleichsstatistik T_n^F in (++) durch die zentrierte und skalierte Rangstatistik $\check{S}_n$ zu ersetzen. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

8.12 Satz: Seien $a_n(\cdot)$, $n \geq 1$, und $\psi(\cdot)$ wie in 8.6. Betrachte für wachsendes n Rangtests

$$\varphi_n \;:=\; \left(1_{(c_{n,\alpha},\infty)} \;+\; \gamma_{n,\alpha}\,1_{\{c_{n,\alpha}\}}\right) \circ S_n \quad \text{mit} \quad S_n \;=\; \sum_{i=1}^m a_n(R_i)$$

zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ (mit $c_{n,\alpha}$, $\gamma_{n,\alpha}$ wie in 8.2 festgelegt, und mit $2m = n$) als Tests für

$$\mathcal{H}_{\text{loc}} \;:=\; \left\{P_{F\,,\,h/\sqrt{n}}^n : F \in \mathcal{F}_c\,,\, h \leq 0\right\} \quad \text{gegen} \quad \mathcal{K}_{\text{loc}} \;:=\; \left\{P_{F\,,\,h/\sqrt{n}}^n : F \in \mathcal{F}_c\,,\, h > 0\right\} .$$

Fixiere $F \in \mathcal{F}^*$, mit Dichte f. Über einparametrige Pfade durch $P_{F,0}^n$

$$\mathcal{P}_{\text{loc}}^F \;:=\; \left\{P_{F\,,\,h/\sqrt{n}}^n : h \in I\!R\right\} \,, \quad n \geq 1$$

konvergieren die Gütefunktionen der φ_n, $n \geq 1$, gleichmäßig auf kompakten h-Mengen:

$$\sup_{|h| \leq C} \left| E_{\left(P_{F\,,\,h/\sqrt{n}}^n\right)}(\varphi_n) \;-\; \left[1 \;-\; \Phi\left(u_{1-\alpha} \;-\; h \cdot \frac{\left\langle \psi\,,\, \left(-\frac{f'}{f}\right) \circ F^{-1}\right\rangle}{\|\psi\|}\right)\right]\right| \quad \longrightarrow \quad 0$$

für $n \to \infty$, mit Verteilungsfunktion $\Phi(\cdot)$ und oberem α-Quantil $u_{1-\alpha}$ von $\mathcal{N}(0,1)$.

Beweis: 1) Nach 8.2 ist für jedes $n \geq 1$ der Test φ_n ein unverfälschter Test für $\mathcal{H}_{\text{loc}}$ gegen $\mathcal{K}_{\text{loc}}$ mit geeigneten, durch 'Auszählen' auf $\mathcal{H}_0$ festgelegten $c_{n,\alpha}$ und $\gamma_{n,\alpha}$. Beim Übergang zur zentrierten und standardisierten Rangstatistik schreibt sich φ_n in Form

$$(*) \qquad \varphi_n \;:=\; \left(1_{(\check{c}_{n,\alpha},\infty)} \;+\; \check{\gamma}_{n,\alpha}\, 1_{\{\check{c}_{n,\alpha}\}} \right) \circ \check{S}_n$$

wobei wie in 8.7

$$\check{S}_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}}\,(2S_n \;-\; \overline{a}_n) \;, \quad \check{c}_{n,\alpha} \;=\; \frac{1}{\sqrt{n}}\left(2c_{n,\alpha} \;-\; \overline{a}_n\right) \;, \quad \check{\gamma}_{n,\alpha} \;=\; \gamma_{n,\alpha} \;.$$

Unverfälschtheit und Niveau α von ϕ_n als Test für $\mathcal{H}_{\text{loc}}$ gegen $\mathcal{K}_{\text{loc}}$ werden davon nicht tangiert.
2) Sei $F \in \mathcal{F}_c$. Nach 8.9 gilt für $n \to \infty$

$$\mathcal{L}\left(\check{S}_n \mid P^n_{F,0}\right) \;\longrightarrow\; \mathcal{N}(0, \|\psi\|^2) \;.$$

Dies erzwingt über einen Vergleich mit $(*)$

$$\check{c}_{n,\alpha} \;=\; \|\psi\|\, u_{1-\alpha} \;+\; o(1) \;, \text{ und damit } \quad P^n_{F,0}\left(\check{S}_n = \check{c}_{n,\alpha}\right) \;=\; o(1) \;, \quad n \to \infty \;.$$

Insbesondere werden die $\check{\gamma}_{n,\alpha} \in [0,1]$ für wachsendes n irrelevant, und man hat

$$(**) \qquad \varphi_n \;=\; 1_{(\,\|\psi\|\, u_{1-\alpha}\,,\,\infty\,)} \circ \check{S}_n \;+\; o_{\left(P^n_{F,0}\right)_n}(1) \;, \quad n \to \infty \;.$$

3) Erst jetzt werden Eigenschaften der Klasse $\mathcal{F}^*$ ausgenutzt: für $F \in \mathcal{F}^*$ mit Dichte f ist

$$\Psi \;=\; \Psi_F \;:=\; \left(-\frac{f'}{f}\right) \circ F^{-1}$$

in $L^2\left((0,1)\,,\,\lambda\!\!\lambda\right)$, und in der Folge lokaler Modelle $\left\{P^n_{F\,,\,h/\sqrt{n}} : h \in I\!\!R\right\}$ gilt nach 8.11 für $n \to \infty$

$$\mathcal{L}\left(\,\check{S}_n \mid P^n_{F\,,\,h_n/\sqrt{n}}\right) \;\longrightarrow\; \mathcal{N}\left(\,h \cdot \langle\psi, \Psi\rangle \;,\; \|\psi\|^2\,\right)$$

für beliebige konvergente Folgen $h_n \to h$. Aus $(**)$ und Benachbartheit 7.3 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E_{\left(P^n_{F\,,\,h_n/\sqrt{n}}\right)}(\varphi_n) \;&=\; \lim_{n\to\infty} E_{\left(P^n_{F\,,\,h_n/\sqrt{n}}\right)}\left(\check{S}_n > \|\psi\|\, u_{1-\alpha}\right) \\
&=\; \mathcal{N}\left(\,h \cdot \langle\psi, \Psi\rangle \;,\; \|\psi\|^2\,\right)\left((\,\|\psi\|\, u_{1-\alpha}\,,\,\infty\,)\right) \\
&=\; \mathcal{N}\left(\,0\,,\,\|\psi\|^2\,\right)\left((\,\|\psi\|\, u_{1-\alpha} - h \cdot \langle\psi, \Psi\rangle \;,\; \infty\,)\right) \\
&=\; \mathcal{N}\,(\,0\,,\,1\,)\left(\left(\,u_{1-\alpha} - h \cdot \frac{\langle\psi, \Psi\rangle}{\|\psi\|}\;,\;\infty\right)\right)
\end{aligned}$$

und damit die Aussage

$$\lim_{n\to\infty} E_{\left(P^n_{F,\,h_n/\sqrt{n}}\right)}(\varphi_n) \quad = \quad 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha} - h \cdot \frac{\langle \psi\,,\, \Psi \rangle}{\|\psi\|} \right) .$$

Dabei ist $h_n \to h$ eine beliebige konvergente Folge. Ein Teilfolgenargument liefert nun Konvergenz gleichmäßig in kompakten h-Mengen, wie in der Aussage des Satzes behauptet. □

8.13 Bemerkung: Sei $F \in \mathcal{F}^*$ mit Dichte f, sei $\psi \in L^2((0,1),\lambda\!\!\lambda)$ mit $\int_0^1 \psi(v)dv = 0$ eine nichtfallende (und nichtkonstante) Funktion.

a) Wir betrachten die in Satz 8.12 erzielte Limes-Gütefunktion

$$(+) \qquad I\!\!R \ni h \quad \longrightarrow \quad 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha} - h \cdot \frac{\left\langle \psi\,,\, \left(-\frac{f'}{f}\right)\circ F^{-1}, \right\rangle}{\|\psi\|} \right) \quad \in (0,1) .$$

Cauchy-Schwarz liefert für (+) auf der Alternative $h > 0$ eine obere Schranke

$$(++) \qquad 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha} - h \cdot \left\| \left(-\frac{f'}{f} \right) \circ F^{-1} \right\| \right) \quad = \quad 1 - \Phi\left(u_{1-\alpha} - h \cdot I_F^{1/2} \right) ,$$

in der (vgl. Beweis von 8.11) die Fisher-Information I_F des Lokationsmodells $\{f(\cdot - \mu) : \mu \in I\!\!R\}$ auftaucht.

b) Dabei stimmen (+) und (++) für $h \in (0,\infty)$ genau dann überein, wenn ψ (bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstanten) mit $\left(-\frac{f'}{f}\right) \circ F^{-1}$ zusammenfällt.

c) Insbesondere ist die obere Schranke (++) nur für die Teilklasse aller $F \in \mathcal{F}^*$ mit Eigenschaft

$$(+++) \qquad \text{die Funktion } \left(-\frac{f'}{f} \right) \circ F^{-1} \text{ ist nichtfallend}$$

eine *erreichbare* Schranke. Beachte, daß die Bedingung (+++) restriktiv ist.

Wir illustrieren (+++) durch einige Beispiele.

8.13' Beispiele: a) Für die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ ist (+++) aus 8.13 erfüllt: Für $F := \Phi \in \mathcal{F}^*$ sieht man wegen der Gestalt der Dichte f

$$(*) \qquad -\frac{f'}{f} = \mathrm{id}_{|I\!\!R} \quad , \quad \text{also} \quad \left(-\frac{f'}{f} \right) \circ F^{-1} = \Phi^{-1} .$$

Die Fisher-Information ist $I_\Phi = \int_0^1 [\Phi^{-1}(v)]^2\, dv = \int_{I\!\!R} x^2\, \Phi(dx) = 1$.

b) Für t-Verteilungen ist (+++) aus 8.13 nicht erfüllt, obwohl die Dichten mit wachsender Zahl von Freiheitsgraden auf festen Kompakta in $I\!\!R$ einer Standardnormaldichte sehr ähnlich werden:

die Dichte der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden ist

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

so daß

$$-\frac{f'}{f}(x) = -\frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{n\,x}{n-1+x^2}$$

nicht global auf $\mathbb{R}$ nichtfallend ist. Im Spezialfall $n=2$ ergibt sich die Cauchy-Verteilung.

c) Wir geben eine große Klasse von Verteilungen $F \in \mathcal{F}^*$ an, welche (+++) aus 8.13 erfüllt: Betrachte Wahrscheinlichkeitsmaße F mit Lebesgue-Dichte f der Form

$$f(x) = c\,e^{-\int_0^x g(y)\,dy}, \quad x \in \mathbb{R}$$

wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, nichtfallend, mit

$$g(x) = \operatorname{sgn}(x)\,|x|^\eta, \quad x \notin K$$

für ein beliebig groß zu wählendes Kompaktum K und ein $\eta \geq 0$. Dann ist $-\frac{f'}{f} = g$ nichtfallend, und $\{f(\cdot - \mu) : \mu \in \mathbb{R}\}$ ein Lokationsmodell, welches allen Voraussetzungen aus 8.4 genügt. Im Fall $\eta = 0$ erhält man Verteilungen vom Typ der Doppelexponentialverteilung. $\square$

Mit Bemerkung 8.13 sind die folgenden beiden Schlüsselaussagen über das Verhalten von Rangtests für das Testen von $\mathcal{H}$ gegen $\mathcal{K}$ im Zweistichprobenproblem bereits bewiesen.

8.14 Fazit 1: Seien $a_n(\cdot)$, $n \geq 1$, und $\psi(\cdot)$ wie in 8.6.
Gibt es einen Punkt $F \in \mathcal{F}^*$ mit Dichte f so daß gilt

$$\psi = c \cdot \left(-\frac{f'}{f}\right) \circ F^{-1}, \quad c > 0 \text{ geeignet },$$

so kann die Folge der mit $a_n(\cdot)$, $n \geq 1$, zu festem Niveau $\alpha \in (0,1)$ gebildeten Rangtests φ_n, $n \geq 1$, auf den einparametrigen Pfaden

$$\mathcal{P}^F_{\text{loc}} = \left\{P^n_{F,h/\sqrt{n}} : h \in \mathbb{R}\right\}$$

als Tests für

$$\mathcal{H}^F_{\text{loc}} := \left\{P^n_{F,h/\sqrt{n}} : h \leq 0\right\} \quad \text{gegen} \quad \mathcal{K}^F_{\text{loc}} := \left\{P^n_{F,h/\sqrt{n}} : h > 0\right\}$$

für $n \to \infty$ durch keine andere Folge von Rangtests $\widetilde{\varphi}_n$, $n \geq 1$, nach 8.6 (mit $\widetilde{a}_n(\cdot)$, $n \geq 1$, und $\widetilde{\psi}(\cdot)$ wie dort, wobei $\widetilde{\psi} \neq \psi$, zu demselben Niveau α) in ihrer Schärfe auf $\mathcal{K}^F_{\text{loc}}$ übertroffen werden.

8.15 Fazit 2: Seien für $k = 1, \ldots, N$ Verteilungen $F_k \in \mathcal{F}^*$ hervorgehoben, mit Dichten f_k, so daß alle $-\frac{f'_k}{f_k}$ monoton wachsend sind. Dann können die gemäß 8.6 mit

$$\widetilde{\psi}_k \;:=\; \left(-\frac{f'_k}{f_k}\right) \circ F_k^{-1} \quad , \quad 1 \leq k \leq N$$

gebildeten Rangtests $\widetilde{\varphi}_{k,n}$, $n \geq 1$, zu demselben Niveau α, $1 \leq k \leq N$, als Test für

$$\mathcal{H}^*_{\text{loc}} \;:=\; \left\{P^n_{F\,,h/\sqrt{n}} : F \in \mathcal{F}^*\,,\, h \leq 0\right\} \quad \text{gegen} \quad \mathcal{K}^*_{\text{loc}} \;:=\; \left\{P^n_{F\,,h/\sqrt{n}} : F \in \mathcal{F}^*\,,\, h > 0\right\}$$

nicht auf der Alternative $\mathcal{K}^*_{\text{loc}}$ global verglichen werden.

Als Beispiel folgt aus 8.13 und 8.14

8.16 Beispiel: An der Stelle $F := \Phi \in \mathcal{F}^*$ (Standardnormalverteilung) betrachte $\mathcal{P}^\Phi_{\text{loc}}$.
a) Der van der Waerden Test (mit $\psi = \Phi^{-1}$ in 8.6) ist der beste Rangtest in einem lokal asymptotischen Sinn für $\mathcal{H}^\Phi_{\text{loc}}$ gegen $\mathcal{K}^\Phi_{\text{loc}}$ zum Niveau α. Die Limes-Gütefunktion ist (wegen $\|\Phi^{-1}\| = 1$)

$$h \quad \longrightarrow \quad 1 \;-\; \Phi\left(u_{1-\alpha} \;-\; h \cdot \|\Phi^{-1}\|\right) \;=\; 1 \;-\; \Phi\,(\,u_{1-\alpha} \;-\; h\,)\ .$$

b) Der Wilcoxon-Test als Test für $\mathcal{H}^\Phi_{\text{loc}}$ gegen $\mathcal{K}^\Phi_{\text{loc}}$ zum Niveau α hat die Limes-Gütefunktion

$$h \;\longrightarrow\; 1 \;-\; \Phi\left(u_{1-\alpha} \;-\; h \cdot \frac{\int_0^1 (v-\frac{1}{2})\Phi^{-1}(v)dv}{\sqrt{\int_0^1 (v-\frac{1}{2})^2 dv}}\right) \;\approx\; 1 \;-\; \Phi\,(\,u_{1-\alpha} \;-\; h \cdot 0.977\,)$$

(numerische Berechnung). Er steht dem besten Rangtest auf $\mathcal{P}^\Phi_{\text{loc}}$ nur unwesentlich nach.
c) Rechnet man analog für den Median-Test ($\psi(v) = 1_{(\frac{1}{2},1)}(v) - \frac{1}{2}$) auf $\mathcal{P}^\Phi_{\text{loc}}$, so erhält man

$$h \;\longrightarrow\; 1 \;-\; \Phi\left(u_{1-\alpha} \;-\; h \cdot 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \Phi^{-1}(v)dv\right) \;\approx\; 1 \;-\; \Phi\,(\,u_{1-\alpha} \;-\; h \cdot 0.798\,)$$

was sich von den Ergebnissen aus a) und b) deutlich unterscheidet. □

B. Beweis von Hauptsatz 8.8

Die Darstellung in diesem Teilkapitel folgt im wesentlichen Janssen (1998, S. 74–79); die folgenden Aussagen zur gemeinsamen Verteilung von Ordnungsstatistiken findet man z.B. in Witting und Müller-Funk (1995, Kap. 7.2.2).

8.17 Bemerkung zu Ordnungsstatistiken: Bezeichne

$$U_{n\uparrow 1} \;\le\; U_{n\uparrow 2} \;\le\; \dots \;\le\; U_{n\uparrow n}$$

die aufsteigende Umordnung von iid Zufallsvariablen $U_1, \dots, U_n$ mit Verteilung $\mathcal{R}(0,1)$ (mit Bezeichnung $\mathcal{R}(a,b)$ für die Gleichverteilung auf einem Intervall (a,b)).
a) $\mathcal{L}\left(U_{n\uparrow 1}, \dots, U_{n\uparrow n}\right)$ ist konzentriert auf den Simplex

$$\Sigma(n) \;:=\; \{x \in I\!R^n : x = (x_1, \dots, x_n) \text{ mit } 0 < x_1 < x_2 < \dots x_n < 1\} \;,$$

und die Lebesgue-Dichte auf $I\!R^n$ ist

$$x \quad\longrightarrow\quad n!\; 1_{\Sigma(n)}(x) \;, \quad x \in I\!R^n \;.$$

2) Durch Ausintegrieren erhält man die Dichte von $\mathcal{L}(U_{n\uparrow j})$

$$v \quad\longrightarrow\quad 1_{(0,1)}(v)\, \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j)!}\, v^{j-1}\,(1-v)^{n-j} \;, \quad v \in I\!R$$

und die Dichte von $\mathcal{L}(U_{n\uparrow i}, U_{n\uparrow j})$ mit $i<j$:

$$(v_1, v_2) \quad\longrightarrow\quad 1_{\Sigma(2)}(v_1, v_2)\, \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!}\, v_1^{i-1}\,(v_2 - v_1)^{j-i-1}\,(1-v_2)^{n-j} \;.$$

3) Wegen dieser Gestalt der Dichten ist die Berechnung von Momenten einfach: man erhält

$$E(U_{n\uparrow j}) = \frac{j}{n+1} \;, \quad E(U_{n\uparrow j}^2) = \frac{(j+1)j}{(n+2)(n+1)} \;,$$

also

$$Var(U_{n\uparrow j}) \;=\; \frac{j(n-j+1)}{(n+2)(n+1)^2} \;\le\; \frac{1}{4(n+2)} \;,$$

und für $i<j$

$$E\left(U_{n\uparrow i}(1 - U_{n\uparrow j})\right) \;=\; \frac{i(n-j+1)}{(n+2)(n+1)} \;, \quad E\left(U_{n\uparrow i} U_{n\uparrow j}\right) \;=\; \frac{i(j+1)}{(n+2)(n+1)} \;,$$

also

$$Cov\left(U_{n\uparrow i}, U_{n\uparrow j}\right) = \frac{i(n-j+1)}{(n+2)(n+1)^2} . \square$$

8.18 Hilfssatz: Betrachte Funktionen $a_n(\cdot)$, $n \geq 1$, ψ wie in 8.6. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_n^2(j) \longrightarrow \|\psi\|^2 , \quad n \to \infty .$$

Ist zusätzlich eine weitere Schar nichtfallender Funktionen $a_n'(\cdot) : \{1, \ldots, n\} \to I\!R$ gegeben, $n \geq 1$, so sind folgende Aussagen i) und ii) gleichwertig:

(i) $$\int_0^1 \left(a_n'(1 + [xn]) - \psi(x)\right)^2 \, dx \longrightarrow 0 , \quad n \to \infty ,$$

(ii) $$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_n(j) - a_n'(j) \right|^2 \longrightarrow 0 , \quad n \to \infty .$$

Beweis: Für Stufenfunktionen berechnet sich die Norm in $L^2\left((0,1), \lambda\!\!\lambda\right)$ elementar:

$$\|a_n(1 + [\cdot\, n])\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_n^2(j) ,$$

und die Dreiecksungleichung in $L^2\left((0,1), \lambda\!\!\lambda\right)$ liefert

$$\begin{aligned} \|a_n(1 + [\cdot\, n]) - a_n'(1 + [\cdot\, n])\| &\leq \|a_n(1 + [\cdot\, n]) - \psi(\cdot)\| + \|a_n'(1 + [\cdot\, n]) - \psi(\cdot)\| \\ \|a_n'(1 + [\cdot\, n]) - \psi(\cdot)\| &\leq \|a_n(1 + [\cdot\, n]) - \psi(\cdot)\| + \|a_n(1 + [\cdot\, n]) - a_n'(1 + [\cdot\, n])\| . \end{aligned}$$

Damit folgen die Aussagen. $\square$

8.19 Hilfssatz: Sei $\psi \in L^2((0,1), \lambda\!\!\lambda)$ nichtfallend und zentriert. Definiere

(+) $$a_n'(j) := n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \psi(v)\, dv , \quad 1 \leq j \leq n , \quad n \geq 1$$

oder mit den Notationen aus 8.17

(++) $$a_n'(j) := E\left(\psi(U_{n\uparrow j})\right) , \quad 1 \leq j \leq n , \quad n \geq 1 .$$

In beiden Fällen gilt

$$\int_0^1 \left(a_n'(1 + [xn]) - \psi(x)\right)^2 \, dx \longrightarrow 0 , \quad n \to \infty .$$

Beweis: 1) Wir führen den Beweis zuerst für die durch (+) definierten Funktionen $a'_n(\cdot)$, $n \geq 1$.

α) Sei zuerst ψ nichtfallend und beschränkt.

Definiere $\psi(0) := \psi(0+)$, $\psi(1) := \psi(1-)$ und schreibe mit (+)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (a'_n(1+[xn]) - \psi(x))^2 \, dx &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} (a'_n(j) - \psi(v))^2 \, dx \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left[n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \psi^2(v)\, dv - [a'_n(j)]^2 \right] \quad =: \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n A(n,j) \; .\end{aligned}$$

Mit unabhängigen ZV $V_{n,j} \sim \mathcal{R}(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})$, $1 \leq j \leq n$, interpretiere den Term $A(n,j)$ – d.h den Term in eckigen Klammern – als Varianz der Zufallsvariable $\psi(V_{n,j})$; wegen des beschränkten Trägers der Verteilung von $V_{n,j}$ und wegen Monotonie von ψ hat man eine triviale Abschätzung

$$A(n,j) \;=\; Var(\psi(V_{n,j})) \;\leq\; \left|\psi(\frac{j}{n}) - \psi(\frac{j-1}{n})\right|^2 \;, \quad 1 \leq j \leq n \; .$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1 (a'_n(1+[xn]) - \psi(x))^2 \, dx &\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left|\psi(\frac{j}{n}) - \psi(\frac{j-1}{n})\right|^2 \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (\psi(1) - \psi(0)) \cdot \left(\psi(\frac{j}{n}) - \psi(\frac{j-1}{n}) \right) \\ &= \frac{1}{n}(\psi(1) - \psi(0))^2 \quad \longrightarrow \quad 0 \quad \text{für } n \to \infty \; .\end{aligned}$$

β) Sei $\psi \in L^2((0,1), \lambda\!\!\lambda)$ nichtfallend und zentriert. Definiere $\psi_k(v) := (-k) \wedge \psi(v) \vee k$, $v \in (0,1)$. Dann gilt $\psi_k \to \psi$ in $L^2((0,1), \lambda\!\!\lambda)$, und für jedes feste k hat ψ_k die Eigenschaften aus α); setze

$$a'_{k,n}(j) \;:=\; n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \psi_k(v)\, dv \;, \quad 1 \leq j \leq n \;,\; n \geq 1$$

für jedes feste k. Dann gilt

$$\|a'_n(1+[\cdot\, n]) - \psi\| \;\leq\; \|a'_n(1+[\cdot\, n]) - a'_{k,n}(1+[\cdot\, n])\| + \|a'_{k,n}(1+[\cdot\, n]) - \psi_k\| + \|\psi_k - \psi\|$$

wobei der zweite Term auf der rechten Seite nach α) für $n \to \infty$ verschwindet, für jedes feste k, und der dritte Term durch große Wahl von k beliebig klein gemacht werden kann. Bleibt also nur der erste Term auf der rechten Seite zu betrachten. Für diesen gilt nach 8.17

$$\|a'_n(1+[\cdot\, n]) - a'_{k,n}(1+[\cdot\, n])\|^2 \;=\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left| a'_n(j) - a'_{k,n}(j) \right|^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left| n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \psi_k(v)\, dv - n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} \psi(v)\, dv \right|^2 \quad \leq \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left(n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} |\psi_k - \psi|(v)\, dv \right)^2 \; ,$$

was mit Jensen bezüglich der Gleichverteilungen $\mathcal{R}(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})$, $1 \leq j \leq n$, weiter zu

$$\leq \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(n \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} |\psi_k - \psi|^2(v)\, dv \right) \quad = \quad \|\psi_k - \psi\|^2$$

abgeschätzt werden kann. Durch große Wahl von k wird dies beliebig klein. Zusammen ist gezeigt

$$\lim_{n \to \infty} \|a'_n(1 + [\cdot\, n]) - \psi\| \quad = \quad 0 \ ;$$

damit ist der Hilfssatz für die nach (+) definierten Funktionen $a'_n(\cdot)$, $n \geq 1$, bewiesen.

2) Betrachte nun die die nach (++) definierten Funktionen $a'_n(\cdot)$, $n \geq 1$:

$$a'_n(j) \ := \ E\left(\psi(U_{n\uparrow j})\right) \ , \quad 1 \leq j \leq n$$

mit Ordnungsstistiken $U_{n\uparrow j}$ wie in 8.17.

α) Sei zuerst ψ stetig und beschränkt auf $(0,1)$. Aus

$$E(U_{n\uparrow j}) \ = \ \frac{j}{n+1} \quad , \quad Var(U_{n\uparrow j}) \ \leq \ \frac{1}{4(n+2)}$$

wie dort folgt für festes $v \in (0,1)$ die Verteilungskonvergenz

$$\mathcal{L}\left(U_{n\uparrow(1+[v\, n])}\right) \ \longrightarrow \ \epsilon_v \quad , \quad n \to \infty$$

und damit punktweise in v die Konvergenz

$$E\left(\psi(U_{n\uparrow(1+[v\, n])})\right) \ \longrightarrow \ \psi(v) \quad , \quad n \to \infty \ ,$$

und weiter mit dominierter Konvergenz

$$\int_0^1 \left|\psi(v) - E\left(\psi(U_{n\uparrow(1+[v\, n])})\right)\right|^2 dv \ \longrightarrow \ 0 \quad , \quad n \to \infty \ .$$

In (++) war aber angesetzt worden

$$a'_n(1 + [\cdot\, n]) \ = \ E\left(\psi(U_{n\uparrow(1+[\cdot\, n])})\right) \ ,$$

also ist der Beweis im Fall (++) für beschränktes und stetiges ψ abgeschlossen.

β) Betrachte nun ein allgemeines $\psi \in L^2((0,1), \lambda\!\!\lambda)$ wie in 8.6. Da die stetigen und beschränkten Funktionen in $L^2((0,1), \lambda\!\!\lambda)$ dicht liegen, wählt man eine Folge ψ_k stetiger und beschränkter Funktionen mit $\|\psi_k - \psi\| \longrightarrow 0$, und definiert zu jedem ψ_k eine Folge von Funktionen

$$a'_{k,n}(j) \ := \ E\left(\psi_k(U_{n\uparrow j})\right) \ , \quad 1 \leq j \leq n \ , \quad n \geq 1$$

gemäß (++). Dann hat man analog Schritt 1) β) eine Dreiecksungleichung

$$\|a'_n(1+[\cdot\, n]) - \psi\| \;\leq\; \|a'_n(1+[\cdot\, n]) - a'_{k,n}(1+[\cdot\, n])\| + \|a'_{k,n}(1+[\cdot\, n]) - \psi_k\| + \|\psi_k - \psi\|$$

und eine Abschätzung

$$\begin{aligned} \|a'_n(1+[\cdot\, n]) - a'_{k,n}(1+[\cdot\, n])\|^2 \;&=\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big|a'_n(j) - a'_{k,n}(j)\Big|^2 \\ \leq\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big(E\left(|\psi_k-\psi|(U_{n\uparrow j})\right)\big)^2 & \\ \leq\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left(|\psi_k-\psi|^2(U_{n\uparrow j})\right) \;&=\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left(|\psi_k-\psi|^2(U_j)\right) \\ =\; E\left(|\psi_k-\psi|^2(U)\right) \;&=\; \|\psi_k-\psi\|^2\,. \end{aligned}$$

Durch große Wahl von k wird dies beliebig klein, und zusammen hat man

$$\lim_{n\to\infty} \|a'_n(1+[\cdot\, n]) - \psi\| \;=\; 0\,.$$

Damit ist die Behauptung des Hilfssatzes auch für Funktionen $a'_n(\cdot)$, $n \geq 1$, bewiesen, welche nach (++) definiert sind. $\square$

8.20 Hilfssatz: Betrachte für jedes $n \geq 1$ auf dem Grundraum $(\Omega'_n, \mathcal{A}'_n)$ aus 8.1 B) die Sub-σ-Algebra $\mathcal{G}_n$, welche vom Vektor der Ränge in der Gesamtstichprobe erzeugt wird:

$$\mathcal{G}_n \;:=\; \sigma(R_1,\ldots,R_n) \quad\subset\quad \sigma(X_1,\ldots,X_n) \;=\; \mathcal{A}'_n\,.$$

Sei $\psi \in L^2((0,1),\lambda\!\!\lambda)$ nichtfallend und zentriert, sei $F \in \mathcal{F}_c$. Für

$$T_n^F \;:=\; \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\,\psi(F\circ X_i)$$

gilt dann

$$E_{P^n_{F,0}}\left(T_n^F \mid \mathcal{G}_n\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\,a'_n(R_i)$$

wobei die Funktionen $a'_n(\cdot)$ – nichtfallend und zentriert für jedes $n \geq 1$ – gegeben sind durch

$$a'_n(j) \;:=\; E\left(\psi(U_{n\uparrow j})\right)\,, \quad 1 \leq j \leq n\,.$$

Beweis: Wegen $F \in \mathcal{F}_c$ gilt: $U_i := F\circ X_i$, $1 \leq i \leq n$, sind iid $\sim\, \mathcal{R}(0,1)$. Damit gilt

$$E_{P^n_{F,0}}\left(T_n^F \mid \mathcal{G}_n\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\,E_{P^n_{F,0}}\left(\psi(F\circ X_i) \mid \mathcal{G}_n\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\, E\,(\,\psi(U_i) \mid \mathcal{G}_n\,) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\, E\left(\,\psi(U_{n\uparrow R_i})\,\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\, a_n'(R_i)
\end{aligned}
$$

denn für jede Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ gilt

$$
\mathcal{L}\,(\,(U_1,\ldots,U_n) \mid (R_1,\ldots,R_n) = \pi\,) \;=\; \mathcal{L}\left(\,(U_{n\uparrow\pi_1},\ldots,U_{n\uparrow\pi_n})\,\right) \;.
$$

Zusammen mit der offenkundigen Monotonie von $a_n'(\cdot)$ und mit

$$
\sum_{j=1}^{n} a_n'(j) \;=\; \sum_{j=1}^{n} E\left(\psi(U_{n\uparrow j})\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} E\left(\psi(U_i)\right) \;=\; n\,E\left(\psi(U_1)\right) \;=\; n\int_0^1 \psi(v)dv \;=\; 0
$$

ist der Hilfssatz bewiesen. □

8.21 Hilfssatz: Für die Funktionen $a_n'(\cdot)$ aus 8.20 gilt

$$
E_{P^n_{F,0}}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\, a_n'(R_i)\right) \;=\; 0\;;
$$

$$
E_{P^n_{F,0}}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\, a_n'(R_i)\right)^2 \;=\; \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (a_n'(j))^2 \;\longrightarrow\; \|\psi\|^2\,, \quad n\to\infty\;.
$$

Beweis: 1) Aus $E_{P^n_{F,0}}\left(T_n^F\right) = 0$, vgl. den ersten Teil der Bemerkung 8.9, folgt dieselbe Zentrierung für die bedingte Erwartung von T_n^F gegeben $\mathcal{G}_n$.

2) Die behauptete Konvergenz gegen $\|\psi\|^2$ für $n\to\infty$ folgt nach Definition der $a_n'(\cdot)$ in 8.20

$$
a_n'(j) \;:=\; E\left(\psi(U_{n\uparrow j})\right)\;, \quad 1\le j\le n
$$

sofort aus den Hilfssätzen 8.19 und 8.18. Also bleibt nur die Berechnung der zweiten Momente auszuführen. Beachte, daß in 8.20 für jedes n die Zentrierung $\sum_{j=1}^n a_n'(j) = 0$ gilt.

3) Zur Berechnung der zweiten Momente unter $P^n_{F,0}$ für festes n schreiben wir kurz

$$
b(j) \;:=\; a_n'(j)\;, \quad 1\le j\le n\;,
$$

und E für den Erwartungswert unter $P^n_{F,0}$. Die Zentrierung von $b(\cdot)$ liefert

$$
E\left(\sum_{i=1}^{n} b(R_i)\right)^2 \;=\; E\left(\sum_{j=1}^{n} b(j)\right)^2 \;=\; 0\;,
$$

und weiter gilt

$$0 \;=\; E\left(\sum_{i=1}^{n} b(R_i)\right)^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} E\left(b^2(R_i)\right) \;+\; 2 \sum_{1\le i<j\le n} E\left(b(R_i)b(R_j)\right)$$
$$=\; n\,E\left(b^2(R_1)\right) \;+\; n(n-1)\,E\left(b(R_1)b(R_2)\right)$$

aus folgendem Grund: $(R_1, \ldots, R_n)$ sind die Ränge von iid Variablen $(X_1, \ldots, X_n)$; für diese gilt $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n) = \mathcal{L}(X_{\pi_1}, \ldots, X_{\pi_n})$ für jedes $\pi \in \mathcal{S}_n$, also folgt $\mathcal{L}\left((R_i, R_j)\right) = \mathcal{L}((R_1, R_2))$ für jedes Paar $i \neq j$. Zusammen erhält man

$$E\left(b(R_1)b(R_2)\right) \;=\; -\frac{1}{n-1}\, E\left(b^2(R_1)\right) \;.$$

Damit berechnen wir

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_{n,i} b(R_i)\right)^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} E\left(c_{n,i}^2 b^2(R_i)\right) \;+\; 2 \sum_{1\le i<j\le n} E\left(c_{n,i} b(R_i)\, c_{n,j} b(R_j)\right)$$
$$=\; E\left(b^2(R_1)\right) \;+\; 2 \sum_{1\le i<j\le n} c_{n,i}c_{n,j}\; E\left(b(R_1)b(R_2)\right)$$
$$=\; E\left(b^2(R_1)\right) \left[1 \;-\; \frac{2}{n-1} \sum_{1\le i<j\le n} c_{n,i}c_{n,j}\right] \;.$$

Da R_1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ jeden der Werte $1, \ldots, n$ annimmt, gilt

$$E\left(b^2(R_1)\right) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b^2(j) \;,$$

und nach Definition der $c_{n,i}$ hat man

$$2 \sum_{1\le i<j\le n} c_{n,i}c_{n,j} \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\right)^2 \;-\; \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}^2 \;=\; 0-1 \;=\; -1\;.$$

Zusammen liefert das

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_{n,i} b(R_i)\right)^2 \;=\; \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} b^2(j) \;,$$

und der Hilfssatz ist bewiesen. □

Nun können wir Satz 8.8 beweisen und damit das Teilkapitel abschließen.

8.22 Beweis von Hauptsatz 8.8: 1) Wir starten von der Aussage des Hilfssatzes 8.20:

$$E_{P^n_{F,0}}\left(T_n^F \mid \mathcal{G}_n\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\; a'_n(R_i) \quad , \quad a'_n(j) \;:=\; E\left(\psi(U_{n\uparrow j})\right) \;, \quad 1\le j\le n\;.$$

Die Variable T_n^F liegt in $L^2\left(\Omega'_n, \mathcal{A}'_n, P^n_{F,0}\right)$. Ihre bedingte Erwartung gegeben $\mathcal{G}_n$ – die von den Rängen $(R_1, \ldots, R_n)$ in der Gesamtstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ erzeugte Sub-σ-Algebra – ist eine Projektion im $L^2\left(\Omega'_n, \mathcal{A}'_n, P^n_{F,0}\right)$ auf den Teilraum $L^2\left(\Omega'_n, \mathcal{G}_n, P^n_{F,0}\right)$ der $\mathcal{G}_n$-meßbaren Funktionen. Insbesondere hat man wegen 8.20

$$T_n^F \; - \; \sum_{i=1}^n c_{n,i}\, a'_n(R_i) \quad \perp \quad L^2\left(\Omega'_n, \mathcal{G}_n, P^n_{F,0}\right)$$

und damit – alle betrachteten Variablen sind zentriert – die Aussage

$$E_{P^n_{F,0}}\left(T_n^F\right)^2 \;=\; E_{P^n_{F,0}}\left(T_n^F \; - \; \sum_{i=1}^n c_{n,i}\, a'_n(R_i)\right)^2 \; + \; E_{P^n_{F,0}}\left(\sum_{i=1}^n c_{n,i}\, a'_n(R_i)\right)^2 .$$

Nun hat man aber das Moment auf der linken Seite in 8.9 zu $\|\psi\|^2$ berechnet; in 8.21 wurde gezeigt, dass der zweite Term auf der rechten Seite für $n \to \infty$ gegen $\|\psi\|^2$ strebt. Also ist gezeigt

$$(+) \qquad E_{P^n_{F,0}}\left(T_n^F \; - \; \sum_{i=1}^n c_{n,i}\, a'_n(R_i)\right)^2 \quad \longrightarrow \quad 0 \quad , \quad n \to \infty .$$

2) In Satz 8.8 werden Rangstatistiken

$$\check{S}_n \;=\; \sum_{i-1}^n c_{n,i}\, a_n(R_i)$$

betrachtet, für eine gegebene Folge von Funktionen $a_n(\cdot)$, $n \geq 1$, welche der Bedingung 8.6 genügt:

$$(\circ) \qquad \int_0^1 |\, a_n(1 + [\cdot\, n]) - \psi(\cdot)\,|^2 \;\; \longrightarrow \;\; 0 \quad , \quad n \to \infty .$$

Nach Konstruktion in 8.7 können wir stets annehmen, daß die Funktionen $a_n(\cdot)$, $n \geq 1$, zentriert sind; nach (+) in 8.7 gilt $E_{P^n_{F,0}}\left(\check{S}_n\right) = 0$; die Limesfunktion ψ in ($\circ$) ist dieselbe wie in 1) oben. Für die in Schritt 1) benutzten Funktionen $a'_n(\cdot)$, $n \geq 1$, gilt nach 8.19 ebenfalls

$$(\circ\circ) \qquad \int_0^1 |a'_n(1 + [\cdot\, n]) - \psi(\cdot)|^2 \;\; \longrightarrow \;\; 0 \quad , \quad n \to \infty \, ;$$

folglich zeigt Hilfssatz 8.18

$$(\diamond) \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n |a_n(j) - a'_n(j)|^2 \;\; \longrightarrow \;\; 0 \quad , \quad n \to \infty .$$

Für die Differenz der Rangstatistiken

$$\check{S}_n \; - \; \sum_{i=1}^n c_{n,i}\, a'_n(R_i) \;\; = \;\; \sum_{i=1}^n c_{n,i}\, (a_n - a'_n)(R_i)$$

berechnet man genau wie in 8.21 die zweiten Momente, und erhält wegen ($\diamond$)

$$(++) \qquad E_{P^n_{F,0}} \left(\check{S}_n \; - \; \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} \; a'_n(R_i) \right)^2 \;\; = \;\; \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} |a_n(j) - a'_n(j)|^2 \;\; \longrightarrow \;\; 0$$

für $n \to \infty$. Kombiniert man (+) und (++), ist die Aussage von Satz 8.8

$$E_{P^n_{F,0}} \big(\check{S}_n \; - \; T_n^F \big)^2 \quad \longrightarrow \quad 0 \, , \quad n \to \infty$$

bewiesen. □