Blatt 2

Prof. Dr. Reinhard Höpfner Dipl.-Math. Michael Diether

Aufgabe 1 (Die gemischte Normalverteilung und ein „unbrauchbarer“ ML-Schätzer)

a) Sei $\alpha \in (0,1)$. Generieren Sie $n = 10.000$ Zufallszahlen, die gemäß der gemischten Normaldichte

$$f_\alpha(x) = (1-\alpha)\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) + \alpha\varphi_{\mu,\tau^2}(x)$$

verteilt sind. Dabei sei φ_{μ,σ^2} die Dichtefunktion von $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Wählen Sie für Ihre Simulation $\alpha = 0{,}1$, $\mu = 0$, $\sigma^2 = 2$ und $\tau^2 = 1$. Zeichnen Sie ein Histogramm und plotten Sie die Dichtefunktion in das Histogramm hinein.

Hinweis: Eine gemischte Normalverteilung entsteht aus einem zweistufigen Experiment, bei dem im ersten Schritt die Parameter μ und σ^2 gemäß einer vorgegebenen Verteilung „ausgewürfelt“ werden, und im zweiten Schritt eine normalverteilte Zufallsvariable mit diesen Parametern betrachtet wird. Hier können Sie etwa durch Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit α entscheiden, ob σ^2 oder τ^2 für die Varianz der Normalverteilung verwendet wird.

b) (Fortsetzung von Aufgabe 5 von Blatt 1) Ersetzen Sie das Normalverteilungsmodell durch die gemischte Normalverteilung aus Teil *a)* mit den Parametern $\mu_0 = 0$, $\sigma_0^2 = 2$, $\tau_0^2 = 1$, $\alpha = 0{,}1$. Erstellen Sie nur den `contour`-Plot für $n = 4$ und $n = 20$ Beobachtungen. Welche log-Likelihood-Flächen entstehen bei dieser Verteilung? Was bedeutet das für den ML-Schätzer?

Hinweis: Berechnen Sie die log-Likelihoods für geeignete Werte von μ und σ (fassen Sie also die „Störung“ τ und das „Ausmaß der Störung“ α als bekannt und fest auf). Die „interessanten“ Stellen der log-Likelihood-Flächen liegen bei $(\mu,\sigma) = (X_i, 0)$, wobei X_i die Beobachtungen sind. Sie können zur Verdeutlichung diese Punkte in Ihrem Plot einzeichnen und ein genügend feines Gitter wählen, um zu sehen, was dort passiert.

Aufgabe 2 (Ein Minimum-Distanz-Schätzer)

Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{P}(\mu)$-verteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Parameter $\mu \in (0, 5)$. Mit Hilfe der Laplace-Transformation soll ein Minimum-Distanz-Schätzer für μ berechnet werden. Die Laplace-Transformierte der $\mathcal{P}(\mu)$-Verteilung ist die Funktion

$$\kappa_\mu : \lambda \mapsto \exp\bigl(\mu(e^{-\lambda} - 1)\bigr), \qquad \lambda \in (0, \infty)$$

die empirische Laplace-Transformation der Beobachtungen X_i ist

$$\hat{\kappa} : \lambda \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp(-\lambda X_i), \qquad \lambda \in (0, \infty).$$

a) Generieren Sie $n = 250$ Beobachtungen mit dem „wahren" Parameter $\mu = 2$. Berechnen Sie im Hilbertraum $L^2([0, 1])$ mit der vom Lebesgue-Maß induzierten Metrik die Abstandsfunktionen zwischen den empirischen und den „wahren" Laplace-Transformierten für einige geeignete Werte von μ.

b) Wiederholen Sie die Schätzung aus *a*) 100 mal mit immer neuen $\mathcal{P}(2)$-verteilten Daten (der Befehl `replicate` ist hier sehr hilfreich) und zeichnen Sie ein Histogramm der gefundenen Minimum-Distanz-Schätzer.

Abgabe: Per E-Mail an `diethermCuni-mainz.de` bis Montag, 9. 5. 2011, 23.59 Uhr