Blatt 3

Prof. Dr. Reinhard Höpfner Dipl.-Math. Michael Diether

Aufgabe 1 (Ein weiterer ML-Schätzer; Fortsetzung von Aufgabe 1 von Blatt 2)

a) Die *Doppelexponentialverteilung* mit Lageparameter $m \in \mathbb{R}$ und Rate $\lambda > 0$ hat die Dichtefunktion

$$g_{m,\lambda}(x) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x-m|}{\lambda}\right).$$

Simulieren Sie $n = 10.000$ Zufallszahlen mit dieser Verteilung, $m = 0$, $\lambda = 1$, zeichnen Sie ein Histogramm und plotten Sie die Dichtefunktion in das Histogramm hinein.

Hinweis: Hier sind, anders als auf Blatt 2, keine Parameter, sondern nur Vorzeichen „auszuwürfeln".

b) Überlegen Sie sich, wie Sie aus den Daten einen ML-Schätzer für m und λ erhalten können.

c) Berechnen Sie die log-Likelihoodflächen zu $n = 5$, $n = 20$ und $n = 100$ Beobachtungen einer Doppelexponentialverteilung. Zeichnen Sie Ihren Schätzwert und den „wahren" Parameter in das Diagramm ein. Wie verhält sich der ML-Schätzer?

Aufgabe 2 (Ein Zentraler Grenzwertsatz für die empirische Verteilungsfunktion)

a) Generieren Sie jeweils $n = 50, 500, 5000$ Zufallszahlen der

- Gleichverteilung auf $[0, 1]$,
- Betaverteilung $B\left(\frac{3}{2}, 2\right)$,
- Standardnormalverteilung.

Sei F die jeweils zugehörige Verteilungsfunktion und $\hat{F}_n$ die empirische Verteilungsfunktion Ihrer Daten. Plotten Sie die Funktion $\sqrt{n}\left(\hat{F}_n\left(F^{-1}(t)\right) - t\right)$ in einem genügend feinen Gitter. Welche Art von Pfad entsteht?

b) Wählen Sie sich zwei Zahlen $0 < t_1 < t_2 < 1$ und untersuchen Sie die Verteilung von $\sqrt{n}\left(\hat{F}_n\left(F^{-1}(t_i)\right) - t_i\right)$ für $n = 5000$ mit Hilfe eines Histogramms. Untersuchen Sie auch die Kovarianz zwischen den beiden Zeitpunkten, d. h.

$$\mathrm{Cov}\left(\sqrt{n}\left(\hat{F}_n\left(F^{-1}(t_1)\right) - t_1\right), \sqrt{n}\left(\hat{F}_n\left(F^{-1}(t_2)\right) - t_2\right)\right).$$

Vergleichen Sie die Kovarianz mit dem für $n \to \infty$ erreichten Wert $\min(t_1, t_2) - t_1 t_2$.

Abgabe: Per E-Mail an `diethem@uni-mainz.de` bis Montag, 23. 5. 2011, 23.59 Uhr