

Blatt 4

Prof. Dr. Reinhard Höpfner

Dipl.-Math. Michael Diether

Aufgabe 1 a) Schreiben Sie einen eigenen Generator für auf $[0, 1]$ gleichverteilte (Pseudo-) Zufallszahlen mit Hilfe der folgenden Vorschriften:

1. $X_{i+1} = (2^{16} + 3) \cdot X_i \pmod{2^{31}}$;
2. $X_{i+1} = X_{i-54} + X_{i-23} \pmod{2^{32}}$;

Wählen Sie die Startwerte („Seeds“) X_0 bzw. X_0, \dots, X_{54} von 0 verschieden, aber ansonsten beliebig.

- b) Testen Sie die Qualität der Generatoren aus a) mit Hilfe des Kolmogorov-Smirnov-Tests anhand einer Stichprobe von 25 generierten Zahlen. Plotten Sie dazu ein Histogramm der empirischen Verteilung der Kolmogorov-Smirnov-Statistik und zeichnen Sie einige empirische Quantile der Teststatistik in Ihr Histogramm ein. Kennzeichnen Sie den Wert, den die Statistik bei Ihrer Stichprobe annimmt. Geben Sie auch eine obere und untere Schranke für den p -Wert ihrer Stichprobe an.

Was können Sie ausgehend von diesem Test über die Qualität der Generatoren aussagen?

Hinweis: Um die empirischen Quantile der zugehörigen Teststatistik zu berechnen, generieren Sie 100.000 Mal jeweils eine Stichprobe von 25 gleichverteilten Zufallszahlen (wir wollen hierbei fest darauf vertrauen, dass `runif` ein zuverlässiger und umfassend getesteter Zufallsgenerator ist) und berechnen die Statistik. Die Quantile erhalten Sie mit Hilfe des Befehls `quantile`.

- c) Wiederholen Sie anschließend das Experiment 1000 Mal und plotten Sie ein Histogramm der unteren Schranken der p -Werte. Was besagt das Ergebnis über die Qualität der Generatoren?
- d) Erstellen Sie für die Generatoren aus a) einen dreidimensionalen Plot, in dem jeweils die Zahlen $X_{3i-2}, X_{3i-1}, X_{3i}$, ($i = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, $n = 300.000$) einen Punkt bilden (die Punkte sollen nicht verbunden werden; es entsteht ein so genannter „scatterplot“). Verwenden Sie dafür etwa den R-Befehl `plot3d` aus dem Package `rgl`. Was besagt das Ergebnis über die Qualität der Generatoren?