

## Blatt 6

Prof. Dr. Reinhard Höpfner

 Dipl.-Math. Michael Diether
 

---

**Aufgabe 1** a) Wir betrachten ein Normalverteilungsmodell mit  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ -verteilten Zufallsvariablen. Wir wollen die Hypothesen

$$\mathbf{H} : \mu_0 = 1, \quad \mathbf{K} : \mu_0 \neq 1$$

auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$  untersuchen. Wir werden mit den Werten  $n = 3$  und  $n = 20$  arbeiten. Berechnen Sie empirisch die zugehörige Gütefunktion und gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Wählen Sie ein geeignetes und genügend feines Gitter von Werten für  $\mu$  und  $\sigma$ .
2. Ziehen Sie eine Stichprobe von  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen und berechnen Sie, ob der  $t$ -Test die oben angegebene Nullhypothese für diese Stichprobe ablehnt oder akzeptiert. Sie können hierzu beispielsweise eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Stichprobe ziehen und den Ablehnungsbereich des  $t$ -Tests geeignet skalieren.
3. Wiederholen Sie den vorigen Schritt 5000-mal und verwenden Sie die relative Häufigkeit des Ablehnens bzw. Akzeptierens der Nullhypothese als empirischen Wert der Gütefunktion an dieser Stelle. Beachten Sie, dass die Vielzahl dieser Wiederholungen einige Rechenzeit in Anspruch nimmt; Sie sollten daher Ihre Programme mit weniger Durchläufen testen.
4. Plotten Sie Ihr Ergebnis in einen `countour`-Plot mit geeigneten Höhenlinien, sowie in einen `persp`-Plot mit geeignetem Blickwinkel.
5. Gehen Sie der Einheitlichkeit halber vom Wert  $\sigma_0^2 = 0,25$  aus und achten Sie bei der Implementierung auf den Unterschied zwischen  $\sigma_0$  und  $\sigma_0^2$ .

Was können Sie über die Gütefunktionen aussagen? Sind die Tests unverfälscht?

b) Wiederholen Sie Ihr Vorgehen aus Aufgabe a) und betrachten Sie nun die Hypothesen

$$\mathbf{H} : \mu_0 \leq 1, \quad \mathbf{K} : \mu_0 > 1.$$

**Aufgabe 2** Betrachten Sie das gleiche Normalverteilungsmodell wie in Aufgabe 1 und untersuchen Sie diesmal empirisch die Gütefunktion des  $\chi^2$ -Tests zu den Hypothesen

$$a) \mathbf{H} : \sigma_0^2 = 0,25, \quad \mathbf{K} : \sigma_0^2 \neq 0,25$$

$$b) \mathbf{H} : \sigma_0^2 \leq 0,25, \quad \mathbf{K} : \sigma_0^2 > 0,25.$$

Beachten Sie dabei, dass die Verteilung des  $\chi^2$ -Tests nicht vom Mittelwert der Zufallsvariablen abhängt. Sie können daher die Gütefunktion allein in Abhängigkeit von  $\sigma^2$  plotten.

Was können Sie über die Gütefunktionen aussagen? Sind die Tests unverfälscht?

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 3** Testen Sie die IQ-Daten von Blatt 5, Aufgabe 2, auf die Hypothesen

a)  $\mathbf{H} : \mu_0 = 100,$        $\mathbf{K} : \mu_0 \neq 100,$

b)  $\mathbf{H} : \mu_0 \leq 100,$        $\mathbf{K} : \mu_0 > 100,$

c)  $\mathbf{H} : \sigma_0 = 15,$        $\mathbf{K} : \sigma_0 \neq 15,$

d)  $\mathbf{H} : \sigma_0 \leq 15,$        $\mathbf{K} : \sigma_0 > 15,$

unter der Modellannahme, dass es sich um  $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ -verteilte Daten handelt. Wählen Sie hierzu ein geeignetes Signifikanzniveau.