Reinhard Höpfner, Vorlesung 'Grundlagen der Stochastik', WS 18/19

Beweise für die Sätze 3.38 und 3.39 aus der Vorlesung am Mittwoch 19.12.18:

December 21, 2018

Sei $N = (N_t)_{t\geq 0}$ ein Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$ wie in Definition 3.33 der Vorlesung, konstruiert aus unabhängigen exponentiellen Wartezeiten

$$(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{i.i.d.} \ \sim \ \mathcal{E}\mathrm{xp}(\lambda) \ .$$

Die Folge der Sprungzeiten von N ist

$$(T_j)_{j\in\mathbb{N}} \quad , \quad T_j := \tau_1 + \ldots + \tau_j \ , \ j \geq 1 \ .$$

In jedem Würfel $(0,t)^n$ bezeichne

$$V := \{(x_1, \ldots, x_n) \in (0,t)^n : 0 < x_1 < \ldots < x_n < t\}$$

das Segment der aufsteigend angeordneten n-Tupel.

3.38 Satz : Für $t > 0$ und $k \geq 1$ gilt im Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} & P\,(\,T_1 \in A_1\,,\,\ldots\,,\,T_k \in A_k \mid N_t = k\,) \\ = \quad & \frac{k\,!}{t^k} \int_0^t ds_1 \ldots \int_0^t ds_k \ 1_V(s_1, \ldots, s_k) \prod_{i=1}^k 1_{A_i}(s_i) \end{aligned}$$

für beliebige Intervalle $A_i = (a_i, b_i]$, $a_i < b_i$, $1 \leq i \leq k$. Gegeben $\{N_t = k\}$ ist also das k-Tupel der Sprungzeiten $(T_1, \ldots, T_k)$ verteilt wie die <u>aufsteigende Anordnung</u> von

$$U_1 \ \ldots \ U_k \quad \text{i.i.d.} \ \sim \ \mathcal{R}(0,t) \ .$$

Beweis : Sei $k \geq 1$. Ausgehend von $\{N_t = k\} = \{T_k \leq t < T_{k+1}\}$ berechnen wir zuerst

$$(+) \qquad P\,(\,T_1 \in A_1\,,\,\ldots\,,\,T_k \in A_k\,,\,N_t = k\,)$$

mit Intervallen $A_i = (a_i, b_i]$, $a_i < b_i$, $1 \le i \le k$. Mit sukzessiver Auswahl von T_k gegeben T_{k-1} durch Auswürfeln einer neuen Wartezeit ist der Ausdruck in (+) gegeben durch

$$\int_0^t \underbrace{ds_1\ \lambda e^{-\lambda s_1}}_{\text{wähle } T_1} \quad \int_{s_1}^t \underbrace{ds_2\ \lambda e^{-\lambda(s_2-s_1)}}_{\text{wähle } T_2 \text{ geg. } T_1} \quad \dots \quad \int_{s_{k-1}}^t \underbrace{ds_k\ \lambda e^{-\lambda(s_k-s_{k-1})}}_{\text{wähle } T_k \text{ geg. } T_{k-1}} \quad *$$

$$* \quad \int_{s_k}^t \underbrace{ds_{k+1}\ \lambda e^{-\lambda(s_{k+1}-s_k)}}_{\text{wähle } T_{k+1} \text{ geg. } T_k} \quad 1_{\{t<s_{k+1}\}} \quad \prod_{i=1}^k 1_{A_i}(s_i) \quad .$$

Die Integration $\int ds_{k+1} \dots$ liefert bei gegebenem Wert von s_k

$$\int_0^\infty d\widetilde{s}\ \lambda e^{-\lambda\widetilde{s}}\ 1_{\{t-s_k<\widetilde{s}\}} \quad = \quad e^{-\lambda(t-s_k)} \ .$$

Damit teleskopieren die Exponentialfaktoren in der obigen Kette von Integrationen zu

$$e^{-\lambda s_1} \prod_{j=2}^k e^{-\lambda(s_j-s_{j-1})}\ e^{-\lambda(t-s_k)} \quad = \quad e^{-\lambda t}$$

und Sammeln der λ-Potenzen zeigt, dass (+) in der Form

$$\begin{aligned}(+) \quad &= \quad \lambda^k\, e^{-\lambda t} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \dots \int_0^t ds_k\ \ 1_V(s_1,\dots,s_k) \ \prod_{i=1}^k 1_{A_i}(s_i) \\ &= \quad \frac{(\lambda t)^k}{k\,!}\, e^{-\lambda t} \quad \cdot \quad \frac{k\,!}{t^k} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 \dots \int_0^t ds_k\ \ 1_V(s_1,\dots,s_k) \ \prod_{i=1}^k 1_{A_i}(s_i)\end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Der erste Faktor auf der rechten Seite ist

$$P\,(\,N_t = k\,)\ ,$$

im zweiten Faktor auf der rechten Seite erscheint die Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche durch Normierung des auf das Segment $V \subset (0,t)^n$ eingeschränkten Lebesguemasses $\lambda\!\!\lambda^n$ auf Gesamtmasse 1 entsteht (vgl. Hilfssatz 3.37): dies ist die Verteilung der <u>aufsteigenden Anordnung</u> der i.i.d. ZV

$$U_1\ \dots\ U_k \quad \text{i.i.d.} \ \sim\ \mathcal{R}(0,t)\ .$$

Bezeichnen wir diese mit Q, so ist gezeigt

$$P\,(\,T_1 \in A_1\,,\ \dots\ ,\, T_k \in A_k\,,\, N_t = k\,) \quad = \quad P\,(\,N_t = k\,)\ Q\left(\mathop{\times}_{i=1}^k A_i \right)$$

und die Behauptung des Hilfssatzes ist bewiesen. $\square$

3.39 Satz : Für beliebiges $\ell \ge 1$ und beliebige Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \dots t_\ell < \infty$ sind im Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$ die Zuwächse

$$\left(\,N_{t_i} - N_{t_{i-1}}\,\right)_{1 \le i \le \ell}$$

unabhängige Zufallsvariable, und es gilt

$$N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \quad \sim \quad \mathcal{P}(\lambda(t_i - t_{i-1})) \quad , \quad 1 \le i \le \ell \, .$$

Beweisidee : Die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung impliziert: zu jedem Zeitpunkt t_i und jedem $k \in \mathbb{N}_0$ mit $N_{t_i} = k$ startet die gerade aktuelle Wartezeit τ_{k+1} zur Zeit t_i neu in die Zukunft $t_i + s$, $s \ge 0$, wegen Hilfssatz 3.36

$$P\,(\,\tau_{k+1} > t_i + s \mid \tau_{k+1} > t_i\,) \;=\; e^{-\lambda s} \quad , \quad s \ge 0\, .$$

Folglich startet zur Zeit t_i ein neuer Poissonprozess $(\,N_{t_i+s} - N_{t_i}\,)_{s\ge 0}$ in die Zukunft. Als Folge aus der Konstruktion des Poissonprozesses aus unabhängigen exponentiellen Wartezeiten und der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung muss der neue Prozess jegliche Vergangenheit bis zur Zeit t_i vergessen haben.

Beweis von 3.39 : Arbeite mit $(\diamond)$ vom Ende des Beweises von 3.35: es gilt

$$(\diamond) \qquad \begin{cases} P(\,\widetilde{\tau}_1 + \ldots + \widetilde{\tau}_k \;\le\; t \;<\; \widetilde{\tau}_1 + \ldots + \widetilde{\tau}_{k+1}\,) \;=\; \frac{(\lambda t)^k}{k\,!}\, e^{-\lambda t} \,, & k \ge 1 \\ P(\,\widetilde{\tau}_1 > t\,) \;=\; e^{-\lambda t} \,, & k = 0\, . \end{cases}$$

für jede Familie von ZV $(\widetilde{\tau}_j)_{j\ge 1}$ i.i.d. $\sim \mathcal{E}\mathrm{xp}(\lambda)$. Definiere eine Funktion $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to [0,1]$ durch

$$F(k,t) \;:=\; \begin{cases} \text{linke Seite von } (\diamond) & \text{falls } k \ge 0 \text{ und } t > 0 \\ 0 & \text{falls } k < 0 \text{ oder } t \le 0\, . \end{cases}$$

I) Betrachte zuerst den Fall $\ell = 2$ und zeige: für $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \infty$ und beliebige $k, m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1) \qquad P\,(\,N_{t_1} = k\,,\, N_{t_2} = k{+}m\,) \;=\; P\,(\,N_{t_1} - N_{t_0} = k\,)\;\, P\,(\,N_{t_2} - N_{t_1} = m\,)\;\, .$$

1) <u>Fall $k = 0$, $m = 0$:</u> die linke Seite von (1) ist in diesem Fall $P(N_{t_2} = 0) = e^{-\lambda t_2}$, dies stimmt überein mit $e^{-\lambda(t_1 - t_0)} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$ auf der rechten Seite.

2) <u>Fall $k = 0$, $m > 0$:</u> Mit Notation $(\diamond)$ schreibt sich die linke Seite von (1) als

$$\int_0^\infty \underbrace{ds_1\; \lambda e^{-\lambda s_1}}_{\text{wähle } T_1}\;\; 1_{\{s_1 > t_1\}}\;\; F(m-1, t_2 - s_1)$$
$$= \quad \int_0^\infty ds_1\; \lambda e^{-\lambda s_1}\;\; 1_{\{t_1 < s_1 < t_2\}}\;\; \frac{(\lambda(t_2 - s_1))^{m-1}}{(m-1)\,!}\; e^{-\lambda(t_2 - s_1)}$$

und Zusammenfassen der Exponentialfaktoren und der λ-Potenzen liefert

$$\frac{\lambda^m}{(m-1)\,!}\, e^{-\lambda t_2} \int_{t_1}^{t_2} ds_1 \, (t_2-s_1)^{m-1} \quad = \quad \frac{\lambda^m}{(m-1)\,!}\, e^{-\lambda t_2}\, \frac{(t_2-t_1)^m}{m} \quad = \quad \frac{\lambda (t_2-t_1)^m}{m\,!}\, e^{-\lambda t_2}$$

$$= \quad \frac{\lambda (t_2-t_1)^m}{m\,!}\, e^{-\lambda(t_2-t_1)} \cdot e^{-\lambda t_1} \quad = \quad P\,(\,N_{t_1}-N_{t_0}=0\,)\; P\,(\,N_{t_2}-N_{t_1}=m\,)$$

was zu zeigen war.

3) Fall $k>0$, $m>0$: Mit 3.34 a), mit $(\diamond)$ und mit Notation $f_{a,\lambda}$ für die Dichte von $\Gamma(a,\lambda)$ wie in 1.25 schreibt sich die linke Seite von (1) als

$$\int_0^\infty \underbrace{ds_1\; f_{k,\lambda}(s_1)}_{\text{wähle } T_k}\; 1_{\{s_1\le t_1\}} \int_0^\infty \underbrace{ds_2\; \lambda e^{-\lambda s_2}}_{\text{wähle } \tau_{k+1}}\; 1_{\{t_1<s_1+s_2\}}\; F(\,m-1\,,\, t_2-(s_1+s_2)\,)\,.$$

Dies ist

$$\int_0^\infty ds_1\, \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} s_1^{k-1} e^{-\lambda s_1}\; 1_{\{s_1\le t_1\}} \int_0^\infty ds_2\; \lambda e^{-\lambda s_2}\; 1_{\{t_1<s_1+s_2<t_2\}}\; \frac{(\lambda(t_2-(s_1+s_2)))^{(m-1)}}{(m-1)\,!}\; e^{-\lambda(t_2-(s_1+s_2))}$$

was man analog wie oben in die Form

$$\frac{\lambda^{k+m}}{(k-1)!\,(m-1)!}\; e^{-\lambda t_2} \int_0^\infty ds_1\, s_1^{k-1}\, 1_{\{s_1\le t_1\}} \int_{t_1-s_1}^{t_2-s_1} ds_2\, (t_2-(s_1+s_2)))^{(m-1)}$$

$$= \quad \frac{\lambda^{k+m}}{(k-1)!\,(m-1)!}\; e^{-\lambda t_2} \int_0^\infty ds_1\, s_1^{k-1}\, 1_{\{s_1\le t_1\}} \int_0^{t_2-t_1} d\widetilde{s}\;\; \widetilde{s}^{m-1}$$

$$= \quad \frac{\lambda^{k+m}}{(k-1)!\; m\,!}\; (t_2-t_1)^m\;\; e^{-\lambda t_2} \int_0^{t_1} ds_1\, s_1^{k-1} \quad = \quad \frac{\lambda^{k+m}}{k\,!\; m\,!}\; e^{-\lambda t_2}\;\; (t_2-t_1)^m\;\; t_1^k$$

$$= \quad \frac{(\lambda t_1)^k}{k\,!}\, e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\lambda(t_2-t_1))^m}{m\,!}\; e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

bringt. Dies ist die rechte Seite von (1).

4) Fall $k>0$, $m=0$: Hier schreibt sich die linke Seite von (1) als

$$\int_0^\infty \underbrace{ds_1\; \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} s_1^{k-1} e^{-\lambda s_1}}_{\text{wähle } T_k}\; 1_{\{s_1\le t_1\}} \int_0^\infty \underbrace{ds_2\; \lambda e^{-\lambda s_2}}_{\text{wähle } \tau_{k+1}}\; 1_{\{t_2<s_1+s_2\}}$$

$$= \quad \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^\infty ds_1\;\; s_1^{k-1} e^{-\lambda s_1}\; 1_{\{s_1\le t_1\}} \cdot e^{-\lambda(t_2-s_1)}$$

$$= \quad \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}\; e^{-\lambda t_2} \int_0^{t_1} ds_1\;\; s_1^{k-1} \quad = \quad \frac{(\lambda t_1)^k}{\Gamma(k)}\; e^{-\lambda t_1} \cdot e^{-\lambda(t_2-t_1)}$$

$$= \quad P\,(\,N_{t_1}-N_{t_0}=k\,)\;\; P\,(\,N_{t_2}-N_{t_1}=0\,)\;\;.$$

II) Die Fälle $\ell>2$ betrachtet man nun mit analogen Techniken, indem man längere Kette von Integralen mit den oben gegebenen Argumenten abarbeitet: dies soll hier nicht mehr im Detail ausgeführt werden. $\square$