Kapitel V

0-1-Gesetze, Dreireihensatz, starkes Gesetz der großen Zahlen

Reinhard Höpfner

Vorlesung Stochastik I

Sommersemester 2003 und 2006

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

21.07.03 und 30.06.06

Übersicht zu Kapitel V :

A. Terminale σ-Algebra und 0-1-Gesetze

5.1 Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, sei $(\mathcal{A}_n)_n$ irgendeine Folge von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{A}$. Dann definiert

$$\mathcal{T}_n := \sigma\Big(\bigcup_{m \geq n} \mathcal{A}_m\Big) , \quad n \geq 1$$

eine absteigende Folge von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{A}$, und man nennt (beachte 1.3.b)

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$$

die *terminale σ-Algebra* zur Folge $(\mathcal{A}_n)_n$.

5.2 Kolmogorov's 0-1-Gesetz: Sind die σ-Algebren $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig unter P, so gilt für die terminale σ-Algebra $\mathcal{T}$

$$P(A) \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{T} \ .$$

Beweis: 1) Definiere zu $(\mathcal{A}_n)_n$ eine aufsteigende Folge $(\mathcal{F}_n)_n$ von σ-Algebren

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n) \ , \ n \geq 1$$

und betrachte die absteigende Folge $(\mathcal{T}_{n+1})_n$ aus 5.1. Ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{F}_n$ ist

$$\mathcal{C}_n := \{ A_1 \cap \ldots \cap A_n \ : \ A_i \in \mathcal{A}_i, \ 1 \leq i \leq n \}$$

und ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{T}_{n+1}$ ist

$$\mathcal{E}_{n+1} := \{ A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_\ell} \ : \ \ell \geq 1, \ \{i_1, \ldots, i_\ell\} \subset \{n+1, n+2, \ldots\} \ , \ A_{i_r} \in \mathcal{A}_{i_r} \ , \ 1 \leq r \leq \ell \} .$$

Aus der vorausgesetzten Unabhängigkeit der σ-Algebren $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt

$$\forall \ n \in \mathbb{N} \ : \quad \mathcal{C}_n \text{ und } \mathcal{E}_{n+1} \text{ sind unabhängig unter } P \ ,$$

woraus nach 4.17 folgt

$$\forall \ n \in \mathbb{N} \ : \quad \mathcal{F}_n \text{ und } \mathcal{T}_{n+1} \text{ sind unabhängig unter } P \ .$$

2) Wir zeigen: unter P ist die terminale σ-Algebra $\mathcal{T}$ unabhängig von sich selbst:

Da $(\mathcal{F}_n)_n$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren ist, gilt für Mengen $F_i \in \mathcal{F}_{n_i}$ stets $F_i \in \mathcal{F}_{n_1 \vee n_2}$, $i = 1, 2$, und damit $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{n_1 \vee n_2}$; folglich ist

$$\mathcal{C}_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

ein $\cap$-stabiles Mengensystem. Nach dem Ergebnis von Schritt 1) ist $\mathcal{C}_\infty$ unabhängig von

$$\mathcal{T} = \bigcap_n \mathcal{T}_{n+1} ,$$

denn für je zwei Mengen $F_1 \in \mathcal{C}_\infty$ und $F_2 \in \mathcal{T}$ gibt es ein m so daß $F_1 \in \mathcal{F}_m$ und $F_2 \in \mathcal{T}_{m+1}$. Wieder mit 4.17 sind dann auch die σ-Algebren $\sigma(\mathcal{C}_\infty)$ und $\mathcal{T}$ unabhängig unter P. Aber

$$\mathcal{T} \subset \sigma\left(\bigcup_m \mathcal{A}_m\right) = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right) = \sigma(\mathcal{C}_\infty) ,$$

damit ist $\mathcal{T}$ unabhängig von sich selbst.

3) Fixiere nun ein $F \in \mathcal{T}$ und betrachte $\mathcal{H}_F := \{A \in \mathcal{A} \,:\, P(A \cap F) = P(A)P(F)\}$. Nach 2) ist $\mathcal{T}$ in $\mathcal{H}_F$ enthalten: also gilt $P(F) = P^2(F)$ für jedes feste $F \in \mathcal{T}$. Folglich kann $P(F)$ für $F \in \mathcal{T}$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen. □

5.3 Beispiel: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine Folge von Ereignissen $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$.

a) Sei $(\mathcal{F}_n)_n$ eine Folge von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft

$$A_n \in \mathcal{F}_n \quad \text{für alle } n \geq 1 .$$

Bilde zu $(\mathcal{F}_n)_n$ die fallende Folge $(\mathcal{T}_n)_n$ und die terminale σ-Algebra $\mathcal{T}$ nach 5.1. Das Ereignis

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_m \bigcup_{r \geq m} A_r \quad \text{'für unendlich viele } n \text{ tritt } A_n \text{ ein'}$$

gehört zu $\mathcal{T}$: da $\bigcup_{r \geq m} A_r$ eine in m absteigende Mengenfolge ist, kann es geschrieben werden als

$$\bigcap_{m \geq N} \bigcup_{r \geq m} A_r \in \mathcal{T}_N$$

für beliebiges $N \in \mathbb{N}$. Ausgehend von $(A_n^c)_n$ statt $(A_n)_n$ gehört $\limsup_n A_r^c = \bigcap_m \bigcup_{r \geq m} A_r^c$ zu derselben terminalen σ-Algebra $\mathcal{T}$, und als Komplement dieser Menge auch

$$\liminf_n A_n := \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} A_n \quad \text{'schließlich alle } A_n \text{ treten ein'} .$$

b) Setze nun voraus, daß die Ereignisse $(A_n)_n$ unabhängig sind unter P. Eine 'minimale' Wahl einer Folge von Sub-σ-Algebren zu der vorgegebenen Folge $(A_n)_n$ von Ereignissen ist

$$\mathcal{A}_n \ := \ \sigma(A_n) \ = \ \{\emptyset, \Omega, A_n, A_n^c\} \ , \quad n \geq 1 \ .$$

Bilde zu $(\mathcal{A}_n)_n$ die fallende Folge $(\mathcal{T}_n)_n$ und die terminale σ-Algebra $\mathcal{T}$ nach 5.1 (diese ist i.a. kleiner als die in a) gebildete !). Wegen 4.17 sind die σ-Algebren $(\mathcal{A}_n)_n$ unabhängig unter P, also gilt nach Kolmogorov's 0-1-Gesetz

$$P(F) \ \in \ \{0,1\} \quad \text{für alle } F \in \mathcal{T} \ .$$

Insbesondere sind unter Unabhängigkeit der $(A_n)_n$ Ereignisse wie

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \ , \quad \liminf_{n\to\infty} A_n$$

entweder Mengen von vollem P-Maß oder P-Nullmengen.

c) Ein explizites Beispiel: betrachte eine unendliche Folge fairer Münzwürfe, bezeichne A_n das Ereignis 'der n-te Wurf liefert Kopf', so suggeriert die Alltagserfahrung

$$\begin{aligned}
P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \ &= \ P\,(\text{'Kopf fällt unendlich oft'}) \ = \ 1 \ , \\
P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \ &= \ P\,(\text{'schließlich alle Würfe zeigen Kopf'}) \ = \ 0 \ .
\end{aligned}$$

Einen Beweis werden wir in 5.5. sehen.

5.4 Beispiel: Sei $(X_n)_n$ eine Folge $\overline{\mathbb{R}}$-wertiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sei $(\mathcal{A}_n)_n$ eine Folge von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{A}$, sei X_n $\mathcal{A}_n$-meßbar für alle $n \geq 1$ (etwa $\mathcal{A}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 1$), sei $\mathcal{T}$ die zu $(\mathcal{A}_n)_n$ gebildete terminale σ-Algebra. Dann sind die $\overline{\mathbb{R}}$-wertigen Zufallsvariablen

$$\liminf_{n\to\infty} X_n \ , \quad \limsup_{n\to\infty} X_n \ , \quad (\lim_{n\to\infty} X_n)\ 1_{\{\liminf_{n\to\infty} X_n = \limsup_{n\to\infty} X_n\}}$$

(siehe 2.2) meßbar bezüglich $\mathcal{T}$: nach 1.42 b) reicht es, für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ zu schreiben

$$\begin{aligned}
\{\liminf_n X_n > c\} \ &= \ \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{X_n \geq c + \frac{1}{k} \ \text{ für schließlich alle } n\} \\
\{\limsup_n X_n > c\} \ &= \ \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{X_n \geq c + \frac{1}{k} \ \text{ für unendlich viele } n\}
\end{aligned}$$

und 5.3 a) zu benutzen. $\square$

5.5 Borel-Cantelli-Lemma: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, betrachte eine Folge von Ereignissen $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$. Dann gilt

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P(\limsup\limits_n A_n) = 0$;

b) $(A_n)_n$ unabhängig und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty \implies P(\limsup\limits_n A_n) = 1$.

Für unabhängige Ereignisse $(A_n)_n$ und $A := \limsup\limits_n A_n$ ergibt sich mit 5.2 die Dichotomie

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \iff P(A) = 1 , \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \iff P(A) = 0 .$$

Beweis: 1) Aussage a) ist sehr einfach: da $\limsup\limits_n A_n \subset \bigcup\limits_{n \geq m} A_n$ für beliebiges m, gilt

$$P(\limsup_n A_n) \leq P(\bigcup_{n \geq m} A_n) \leq \sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

2) Für eine beliebige Zahlenfolge $(\alpha_n)_n \in [0,1]$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty \implies \prod_{n=1}^{\infty} (1-\alpha_n) := \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} (1-\alpha_n) = 0 :$$

Sei $\alpha_n \in [0,1)$ für alle $n \geq 1$ (sonst ist nichts zu zeigen). Dann gilt $\log(1-\alpha_n) \leq -\alpha_n$ und damit

$$\prod_{n=1}^{N} (1-\alpha_n) = e^{\sum\limits_{n=1}^{N} \log(1-\alpha_n)} \leq e^{-\sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n} ,$$

und die Behauptung folgt für $N \to \infty$.

3) Seien nun $(A_n)_n$ unabhängige Ereignisse unter P. Dann gilt

$$P(\bigcap_{n=m}^{N} A_n^c) = \prod_{n=m}^{N} P(A_n^c) = \prod_{n=m}^{N} (1 - P(A_n))$$

und die Voraussetzung $\sum\limits_n P(A_n) = +\infty$ impliziert mit 2) und absteigender Stetigkeit von P

$$0 = \prod_{n=m}^{\infty} (1 - P(A_n)) = P(\bigcap_{n \geq m} A_n^c) \quad \text{für jedes feste } m .$$

Vereinigt man diese P-Nullmengen über $m \geq 1$, so ergibt sich

$$0 = P(\bigcup_m \bigcap_{n \geq m} A_n^c) = P\left(\liminf_n A_n^c\right) = 1 - P\left(\limsup_n A_n\right)$$

und damit b). Die Aussagen a) und b) ergeben – zusammen mit 5.3 b) – den Zusatz. □

5.6 Beispiel: Eine Variante von 5.3 kann populärwissenschaftlich so formuliert werden: jedes Äffchen, das zufällig (und lange genug) auf die Tasten eines Schreibcomputers einschlagen darf, wird irgendwann textgetreu die Urfassung von Shakespeares 'Julius Caesar' reproduziert haben. In der Tat, seien $(X_i)_{i\geq 1}$ iid ZV, gleichverteilt auf der Menge der Buchstaben $\{1, ..., 25\}$, sei für ganzzahlige Vielfache N der Länge L eines vorgegebenen Textes

$$a_1\, a_2\, \ldots\ldots\, a_L$$

das Ereignis A_N definiert als $\{X_{N+i} = a_i \text{ für } 1 \leq i \leq L\}$, so hat man unabhängige Ereignisse $(A_N)_{N=0,L,2L,\ldots}$ von strikt positiver Wahrscheinlichkeit. Der Zusatz zum Borel-Cantelli-Lemma beweist also, daß im langen Lauf der gewünschte Text sogar unendlich oft entstehen wird (was die unbegrenzten Möglichkeiten der Evolution illustriert ...).

B. Konvergenz von Random Walks

5.7 Konvention: Unter *Random Walk* verstehen wir einen 'stochastischen Prozeß'

$$n \to \sum_{i=1}^{n} X_i$$

mit *unabhängigen* Zufallsvariablen X_i, $i \geq 1$ (definiert auf einem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mit Werten in $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$); wir nennen den Random Walk *zentriert* falls $E(X_i) = 0$ für alle i, und *mit endlichen Varianzen* falls $X_i \in L^2(P)$ für alle i; dann

$$\sigma_i^2 := \mathrm{Var}(X_i) < \infty \quad , \ i \geq 1 \ .$$

Im Unterschied zur üblichen Definition werden hier die X_i, $i \geq 1$ nicht als i.i.d. vorausgesetzt.

5.8 Kolmogorov-Ungleichung: Für einen zentrierten Random Walk mit endlichen Varianzen gilt für beliebiges $c > 0$:

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} |\sum_{i=1}^{k} X_i| \geq c \right) \leq \frac{1}{c^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \ .$$

Beweis: Fasse X_n als Gewinn eines Spielers in einem n-ten fairen (wegen $EX_n = 0$ für alle n) Glücksspiel auf. Der stochastische Prozeß

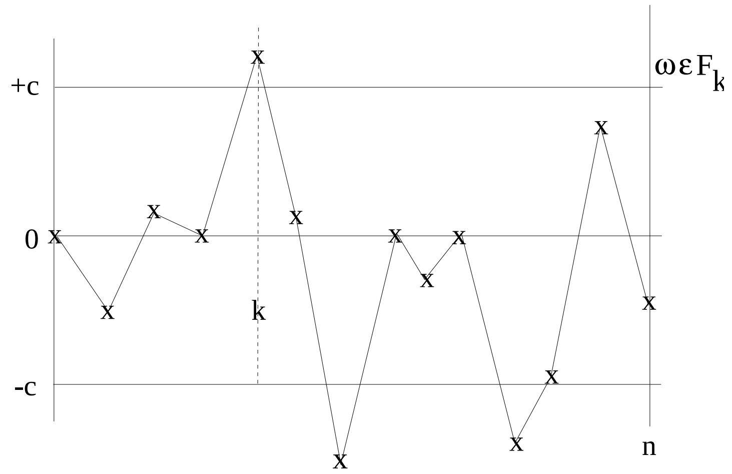
$$n \longrightarrow S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \ , \quad n \geq 1 \ , \quad S_0 \equiv 0$$

beschreibt die Entwicklung des Vermögens des Spielers als Funktion der 'Zeit' $n \in \mathbb{N}_0$. Zerlege das Ereignis

$$F := \{\max_{1 \le k \le n} |S_k| \ge c\}$$

nach dem ersten Zeitpunkt, zu dem das Vermögen des Spielers den Streifen $(-c, +c)$ verläßt:

$$F = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} F_k , \quad F_k := \{ |S_k| \ge c, \ |S_i| < c \quad \text{für } 1 \le i \le k-1 \} , \quad 1 \le k \le n .$$



Betrachte die σ-Algebren

$$\mathcal{F}_k := \sigma(X_1, \ldots, X_k), \quad \overline{\mathcal{F}}_k := \sigma(X_k, \ldots, X_n), \quad 1 \le k \le n.$$

Aus der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $(X_n)_n$ folgt für jedes feste k die Unabhängigkeit der σ-Algebren $\mathcal{F}_k$ und $\overline{\mathcal{F}}_{k+1}$. Insbesondere sind für $k < n$ dann auch die ZV

$$\underbrace{(1_{F_k} S_k)}_{\mathcal{F}_k-\text{meßbar}} , \quad \underbrace{(X_{k+1} + \ldots + X_n)}_{\overline{\mathcal{F}}_{k+1}-\text{meßbar}}$$

unabhängig. Damit gilt

$$E((1_{F_k} S_k)(X_{k+1} + \ldots + X_n)) = E(1_{F_k} S_k) \cdot E(X_{k+1} + \ldots + X_n) = 0 .$$

Aus der Zerlegung $S_n = S_k + (X_{k+1} + \ldots + X_n)$ ergibt sich weiter

$$E(1_{F_k} S_n^2) = E(1_{F_k} S_k^2) + 2 \underbrace{E((1_{F_k} S_k)(X_{k+1} + \ldots + X_n))}_{=0} + \underbrace{E(1_{F_k}(X_{k+1} + \ldots + X_n)^2)}_{\ge 0};$$

und damit nach Definition von F_k

$$(+) \qquad E(1_{F_k} S_n^2) \ \ge \ E(1_{F_k} S_k^2) \ \ge \ c^2 \cdot P(F_k) , \quad \text{für } n \ge k .$$

Summiert man die Ungleichungen (+) über $k = 1, \ldots, n$, erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \;=\; E(S_n^2) \;\geq\; E(1_F S_n^2) \;=\; \sum_{k=1}^{n} E(1_{F_k} S_n^2) \;\geq\; c^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} P(F_k) \;=\; c^2 \cdot P(F)$$

und damit die Behauptung. □

Die Kolmogorov-Ungleichung 5.8 ist das erste Beispiel einer 'Maximalungleichung', d.h. einer Ungleichung für das Maximum eines stochastischen Prozesses, und erlaubt den Beweis eines ersten Konvergenzsatzes.

5.9 Satz: Für einen zentrierten Random Walk mit endlichen Varianzen gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{\infty} X_i \text{ konvergiert } P\text{-fast sicher.}$$

Beweis: Schreibe $S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i\,,\ \ S_0 \equiv 0$; zu zeigen ist: $\lim_{k\to\infty} S_k$ existiert P-fast sicher in $I\!R$. Betrachte

$$M_m \;:=\; \sup_{k\geq 0} |S_{m+k} - S_m|, \quad m \geq 1\ ;$$

M_m mißt eine maximale Fluktuation 'nach m' im Prozeß $(S_k)_k$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Kolmogorov-Ungleichung 5.8 und aufsteigende Stetigkeit 1.17 zeigen

$$P(M_m \geq \varepsilon) \;=\; \lim_{N\to\infty} P\left(\sup_{1\leq k\leq N} |S_{m+k} - S_m| \geq \varepsilon\right) \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{m+k}^2 \;\stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow}\; 0$$

da nach Voraussetzung $\sum_n \sigma_n^2 < \infty$. Also existiert für jedes $\ell \in I\!N$ ein $m(\ell) \in I\!N$ so daß

$$P(M_{m(\ell)} \geq 2^{-\ell}) \;\leq\; 2^{-\ell}\,, \quad \ell \geq 1\,.$$

Borel-Cantelli 5.3 a) zeigt

$$P(\, M_{m(\ell)} \geq 2^{-\ell} \text{ für unendlich viele } \ell\,) \;=\; 0$$

und damit

$$(*) \qquad M_{m(\ell)} < 2^{-\ell} \quad \text{für schließlich alle } \ell, \quad P\text{-fast sicher.}$$

Wegen $(*)$ und $|S_{m(\ell)} - S_{m(\ell+1)}| \leq M_{m(\ell)}$ ist

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \big(S_{m(\ell)} - S_{m(\ell-1)}\big)$$

P-fast sicher wohldefiniert und endlich, stimmt also bis auf P-Äquivalenz überein mit einer $I\!R$-wertigen Limesvariable S. Der Teilprozeß $(S_{m(\ell)})_{\ell\in I\!N}$ konvergiert wegen $(*)$ P-fast sicher gegen S für $\ell \to \infty$. Dann konvergiert aber auch der ganze Prozeß $(S_k)_{k\geq 0}$ P-fast sicher gegen S wegen

$$|S - S_k| \;\leq\; |S - S_{m(\ell)}| + M_{m(\ell)} \quad \text{falls } k \geq m(\ell)\,.$$

Nach Definition von $(S_k)_k$ ist damit gezeigt, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)$ für P-fast alle $\omega \in \Omega$ konvergiert. □

5.10 Beispiel (Zeichenproblem): Sei $(c_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum c_i^2 < \infty$, seien η_i, $i \geq 1$, iid Zufallsvariablen mit $P(\eta_i = -1) = P(\eta_i = +1) = \frac{1}{2}$, interpretiert als eine Folge zufällig gewählter Vorzeichen, und setze $X_i := \eta_i c_i$. Nach Voraussetzung gilt dann $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var} X_i = \sum\limits_i c_i^2 < \infty$, und 5.9 zeigt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i c_i \quad \text{konvergiert } P\text{-fast sicher.}$$

Ein konkretes Beispiel: die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, aber die 'harmonische Reihe mit zufällig gewählten Vorzeichen' $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \eta_n \cdot \frac{1}{n}$ konvergiert P-fast sicher. □

C. Starkes Gesetz der großen Zahlen

Mit dem Namen *starkes Gesetz der großen Zahlen (SLLN)* bezeichnet man Sätze des Typs 'unter gewissen Voraussetzungen an die betrachteten Zufallsvariablen $(X_i)_i$ gilt

$$\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ konvergiert } P\text{-fast sicher für } n \to \infty\text{'.}$$

Solche Sätze hat man in vielen wichtigen Klassen stochastischer Prozesse; ihr Prototyp ist das auf Kolmogorov zurückgehende starke Gesetz 5.14 für unabhängige und identisch verteilte reellwertige Zufallsvariable.

5.11 Kronecker-Lemma: Sei $(c_n)_n \subset I\!R$ beliebig und $0 < a_n \uparrow \infty$. Konvergiert $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{a_i}$, so gilt

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} c_i \quad \longrightarrow \quad 0, \quad n \to \infty.$$

Beweis: Schreibe $B_0 := 0$, $B_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_i}$, $n \geq 1$. Nach Voraussetzung existiert ein $B \in I\!R$ mit $B_n \to B$ für $n \to \infty$. Mit $a_0 := 0$ kann man wegen $c_i = a_i(B_i - B_{i-1})$ schreiben

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} c_i \;=\; \frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} a_i B_{i-1} \;=\; B_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}-a_i}{a_n}\, B_i \ .$$

Die letzte Summe ist dabei ein innerhalb die Folge $(B_n)_n$ gebildetes 'gleitendes Mittel', welches gegen B konvergiert. Genauer: zu $\varepsilon > 0$ beliebig wähle $i_0 = i_0(\varepsilon)$ so daß $B_i \in U_\varepsilon(B)$ für $i \geq i_0$, setze $\overline{B} := \sup_{m\geq 1} |B_m|$, dann gilt wegen Monotonie der $(a_i)_i$

$$\left| \sum_{i=0}^{i_0-1} \frac{a_{i+1}-a_i}{a_n}\, B_i \right| \;\leq\; \sum_{i=0}^{i_0-1} \frac{a_{i+1}-a_i}{a_n}\, \overline{B} \;=\; \frac{a_{i_0}}{a_n}\, \overline{B} \quad \longrightarrow\; 0$$

für $n \to \infty$, und

$$(1 - \frac{a_{i_0}}{a_n})(B - \varepsilon) \;\leq\; \sum_{i=i_0}^{n-1} \frac{a_{i+1}-a_i}{a_n}\, B_i \;\leq\; (1 - \frac{a_{i_0}}{a_n})(B + \varepsilon) \ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden darf, ist gezeigt

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i+1}-a_i}{a_n}\, B_i \quad \longrightarrow\; B\ , \quad n \to \infty\ ;$$

daraus folgt die Behauptung. □

5.12 Satz: Betrachte eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen X_n, $n \geq 1$, in $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, schreibe $\mu_n := E(X_n)$ und $\sigma_n^2 := \mathrm{Var}(X_n)$. Gilt dann

$$\lim_n \mu_n \;=:\; \mu \quad \text{existiert in } I\!R, \text{ und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} \;<\; \infty$$

so folgt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \mu \quad P\text{-fast sicher.}$$

Beweis: Setze $Y_k := \frac{X_k - \mu_k}{k}$, $k \geq 1$. Die Folge $(Y_k)_k$ definiert wegen $E(Y_k) = 0$ und $\mathrm{Var}(Y_k) = \frac{\sigma_k^2}{k^2}$ einen Random Walk, der alle Voraussetzungen von Satz 5.9 erfüllt; daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} Y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k - \mu_k}{k} \quad \text{konvergiert } P\text{-fast sicher.}$$

Wegen Kronecker 5.11 folgt daraus

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu_k) \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \quad P\text{-fast sicher}\ .$$

Zusammen mit Konvergenz der Folge $(\mu_k)_k$ ist das die Behauptung. □

Aus 5.12 erhält man insbesondere:

5.13 Folgerung: Für jede Folge $(X_n)_n$ von iid ZV, $X_1 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, gilt das 'starke Gesetz der großen Zahlen'

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \longrightarrow \quad E(X_1) \quad P\text{-fast sicher für } n \to \infty.$$

5.13' Bemerkung: In der 'Einführung in die Stochastik' hatte man unter denselben Voraussetzungen wie in 5.13 das *schwache Gesetz der großen Zahlen (WLLN)*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \longrightarrow \quad \mu \quad P\text{-stochastisch für } n \to \infty$$

mit einem extrem einfachen Beweis gezeigt (Chebychev-Ungleichung plus Varianzformel 4.21). Diese alte Aussage ist nun wesentlich verschärft.

Man sieht schnell, daß nicht für beliebige iid Folgen ein starkes Gesetz der großen Zahlen gelten kann: sind etwa $X_1, X_2, ...$ iid und Cauchy-verteilt, so hat wegen der für Cauchy-Verteilungen geltenden Skalierungseigenschaft $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ dieselbe Verteilung wie X_1 selbst, für jedes k (siehe Feller II, 1971, S. 173 und S. 51). Kolmogorov hat eine hinreichende und notwendige Bedingung für Gültigkeit des starken Gesetzes für iid Folgen angegeben.

5.14 Hauptsatz (Kolmogorov): Betrachte eine Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ von iid ZV, definiert auf einem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

i) $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ konvergiert P-fast sicher gegen eine $\mathbb{R}$-wertige Limesvariable, $n \to \infty$,

ii) $X_1 \in L^1(P)$.

Dabei gilt unter ii):

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad E(X_1) \quad P\text{-fast sicher.}$$

Beweis: 0) Vorbemerkung: für jede ZV X mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gilt

$$\sum_{m=1}^{\infty} (m-1) P(m-1 < |X| \le m) \;\le\; E(|X|) \;\le\; \sum_{m=1}^{\infty} m P(m-1 < |X| \le m) \;\le\; \infty \,.$$

Umsummieren liefert

$$\sum_{m=1}^{\infty} m P(m-1 < |X| \le m) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} P(|X| > n) \;\le\; \infty$$

und folglich gilt

$$X \in L^1(P) \iff E(|X|) < \infty \iff \sum_m P(|X| > m) < \infty \,.$$

1) Zeige i)$\Longrightarrow$ii): Schreibe $S_k := \sum_{j=1}^{k} X_j$. Unter i) konvergiert $\frac{1}{n} S_n$ P-fast sicher, also

$$\frac{1}{n} X_n \;=\; \frac{1}{n} S_n - \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n-1} S_{n-1} \right) \;\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0 \quad P\text{-fast sicher}$$

und insbesondere für $A_n := \{|X_n| > n\}$

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \;=\; P(\, |\frac{1}{n} X_n| > 1 \text{ für unendlich viele } n\,) \;=\; 0 \,.$$

Mit den ZV $(X_n)_n$ sind die Ereignisse $(A_n)_n$ unabhängig, also mit Borel-Cantelli 5.5

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \;<\; \infty \,.$$

Wegen $\mathcal{L}(X_n|P) = \mathcal{L}(X_1|P)$ gilt $P(A_n) = P(|X_1| > n)$, also ist gezeigt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > n) \;<\; \infty$$

und damit $X_1 \in L^1(P)$.

2) Zeige ii)$\Longrightarrow$i): Aus $X_1 \in L^1(P)$ und $\mathcal{L}(X_n|P) = \mathcal{L}(X_1|P)$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > n) \;<\; \infty \,,$$

also gilt für trunkierte Variable

$$X'_n \;:=\; X_n 1_{\{|X_n| \le n\}} \,, \quad n \ge 1$$

wegen $\{X'_n \neq X_n\} = A_n$ und Borel-Cantelli wie oben

$$(*) \qquad X'_n \neq X_n \quad \text{für höchstens endlich viele } n,\ P\text{-fast sicher.}$$

Die trunkierten Variablen $(X_i')_{i\geq 1}$ aber bilden eine Folge unabhängiger ZV mit

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}(X_i')}{i^2} &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{E((X_i')^2)}{i^2} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{E((X_i)^2 1_{\{|X_i|\leq i\}})}{i^2}\\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\left\{\sum_{k=1}^{i} k^2\, P(k-1<|X_i|\leq k)\right\}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\Bigl\{\underbrace{k\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{i^2}}_{\leq M}\Bigr\} P(k-1<|X_1|\leq k) \quad\leq\quad M\,(E(|X_1|+1) \;<\; \infty\end{aligned}$$

wegen der Voraussetzung $X_1 \in L^1(P)$. Mit dominierter Konvergenz gilt aus demselben Grund

$$\mu_i = E(X_i') \;=\; E(1_{\{|X_i|\leq i\}}X_i) \;=\; E(1_{\{|X_1|\leq i\}}X_1) \quad\overset{i\to\infty}{\longrightarrow}\quad E(X_1) =: \mu\ .$$

Damit erfüllt die Folge $(X_i')_{i\geq 1}$ die beiden Voraussetzungen des Satzes 5.12, und dieser zeigt

$$(**)\qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i' \;\to\; \mu \quad P\text{-fast sicher}\ .$$

(*) und (**) zusammen liefern i) und den Zusatz. □

Das starke Gesetz der grossen Zahlen bildet *die* Grundlage der mathematischen Statistik: beobachtet man iid Zufallsvariable, deren Verteilung man nicht kennt, so wird bei wachsendem Stichprobenumfang n die zugrundeliegende Verteilung immer deutlicher aus den Beobachtungen sichtbar werden, jedoch nie (auch nicht für noch so großes $n<\infty$) ganz.

5.15 Satz von Glivenko-Cantelli: Betrachte eine Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ von iid ZV auf $(\Omega,\mathcal{A},P)$, mit Werten in $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, mit Verteilungsfunktion F. Sei $\widehat{F}_n(\cdot,\cdot)$ die *empirische Verteilungsfunktion*

$$\widehat{F}_n(x,\omega) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}(X_j(\omega))\ ,\quad x\in\mathbb{R},\ \omega\in\Omega$$

zu den Beobachtungen $X_1,...,X_n$: für festes $x\in\mathbb{R}$ ist $\omega\to\widehat{F}_n(x,\omega)$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathcal{A})$, für festes $\omega\in\Omega$ besitzt $x\to\widehat{F}_n(x,\omega)$ die Eigenschaft (1.20) und ist somit eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$(*)\qquad \sup_{x\in\mathbb{R}}|\,\widehat{F}_n(x)-F(x)\,| \quad\to\quad 0 \quad P\text{-fast sicher für } n\to\infty.$$

Beweis: 0) Vorbemerkung: da sowohl $F(\cdot)$ als auch $\widehat{F}(\cdot,\omega)$, $\omega\in\Omega$, rechtsstetige Funktionen sind, kann $\sup_{x\in\mathbb{R}}\ldots$ in $(*)$ ersetzt werden durch $\sup_{x\in\mathbb{Q}}\ldots$; als Supremum über abzählbar viele

ZV ist daher $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\, \widehat{F}_n(x) - F(x)\,|$ eine wohldefinierte $\mathcal{A}$-meßbare ZV.

1) Zu $\varepsilon > 0$ beliebig wähle Punkte $t_1, ..., t_\ell,\ \ell = \ell(\varepsilon)$, in $\mathbb{R}$:

$$-\infty =: t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell < t_{\ell+1} := \infty$$

$$t_{i+1} := \inf\{\, t > t_i : F(t) - F(t_i) > \varepsilon \,\} \quad \text{für } t_i \text{ mit } F(t_i) < 1$$

mit den Konventionen $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, $\inf \emptyset = +\infty$. Notwendig gilt $\ell = \ell(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

2) Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen 5.14 gilt für jedes feste $1 \leq i \leq \ell$

$$\widehat{F}_n(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1_{(-\infty, t_i]}(X_j) \quad \longrightarrow \quad E(1_{(-\infty, t_i]}(X_1)) = F(t_i)$$

P-fast sicher für $n \to \infty$, also

$$M_{n,1} \ := \ \max_{1 \leq i \leq \ell} |\, \widehat{F}_n(t_i) - F(t_i)\,| \quad \longrightarrow \quad 0 \quad P\text{-fast sicher für } n \to \infty.$$

3) Schreibe $U_{i-1} := (t_{i-1}, t_i)$, $1 \leq i \leq \ell + 1$, und betrachte

$$M_{n,2} \ := \ \max_{1 \leq i \leq \ell+1} \ \sup_{t \in U_{i-1}} |\, \widehat{F}_n(t) - F(t)\,| \ .$$

Für $t \in U_{i-1}$ gilt $\widehat{F}_n(t) \leq \widehat{F}_n(t_i^-)$ und $F(t) \leq F(t_i^-) \leq F(t_{i-1}) + \varepsilon$. Dies liefert eine Abschätzung

$$\begin{aligned} |\widehat{F}_n(t) - F(t)| \ &\leq \ \{\widehat{F}_n(t) - \widehat{F}_n(t_{i-1})\} + |\widehat{F}_n(t_{i-1}) - F(t_{i-1})| + \{F(t) - F(t_{i-1})\} \\ &\leq \ \{\widehat{F}_n(t_i^-) - \widehat{F}_n(t_{i-1})\} + |\widehat{F}_n(t_{i-1}) - F(t_{i-1})| + \varepsilon \end{aligned}$$

wobei wieder nach 5.14 für $n \to \infty$

$$\widehat{F}_n(t_i^-) - \widehat{F}_n(t_{i-1}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1_{U_i}(X_j) \quad \xrightarrow{P-fs} \quad E(1_{U_i}(X_j)) = F(t_i^-) - F(t_{i-1}) \leq \varepsilon \ .$$

Damit gilt für jedes einzelne i, $1 \leq i \leq \ell + 1$

$$\sup_{t \in U_{i-1}} |\widehat{F}_n(t) - F(t)| \ > 3\,\varepsilon \quad \text{für höchstens endliche viele } n,\ P\text{-fast sicher,}$$

und damit auch

$$\limsup_{n \to \infty} M_{n,2} \ \leq \ 3\,\varepsilon \quad P\text{-fast sicher.}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung wegen

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(t) - F(t)| \ \leq \ M_{n,1} + M_{n,2} \ . \qquad \square$$

5.15' Bemerkung: Die Aussage von 5.15 gilt analog in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ beliebig: anstelle der Intervalle in $\mathbb{R}$ betrachtet man in Dimension $d > 1$ ein Kompaktum K in $\mathbb{R}^d$ mit $P(K^c) < \varepsilon$ zusammen mit einem d-dimensionalen Gitter, für das die in dieses Gitter eingeschriebenen halboffenen Rechtecke höchstens P-Masse ε tragen. Wegen 1.14' und 1.17' bleibt der Beweis bis auf notationelle Änderungen derselbe.

D. Kolmogorov's Dreireihensatz

In diesem Teilkapitel geht es wieder – unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Konvention 5.7 – um Konvergenz von Random Walks. Allgemeiner als in Teilkapitel B betrachten wir jetzt Random Walks $n \to \sum_{i=1}^n Y_i$ für beliebige Folgen $(Y_i)_i$ von unabhängigen ZV, für die endliche Varianzen nur künstlich – durch geeignetes Trunkieren der $(Y_i)_i$ – eingeführt werden. Auch dieser Satz von Kolmogorov ist zum Prototyp einer ganzen Familie von Konvergenzsätzen in allgemeineren Situationen (etwa Konvergenz von Martingalen anstelle von Random Walks) geworden.

5.16 Dreireihensatz (Kolmogorov): Betrachte eine Folge $(Y_i)_i$ unabhängiger reellwertiger ZV. Mit trunkierten Variablen $Y_{i,c} := Y_i 1_{\{|Y_i| < c\}}$ für festes $0 < c < \infty$ sind folgende Aussagen gleichwertig:

i) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ konvergiert P-fast sicher;

ii) die drei Reihen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(|Y_i| \geq c)$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}(Y_{i,c})$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} E(Y_{i,c})$ konvergieren simultan.

Kann Bedingung ii) dabei für ein $0 < c < \infty$ erfüllt werden, so gilt sie für alle $0 < c < \infty$.

Der Beweis von Satz 5.16 wird in zwei Teilen gegeben (5.17 und 5.23) und erfordert eine Reihe von Zwischenresultaten.

5.17 Beweis für 5.16, Teil 1: Zeige, daß die drei Bedingungen in 5.16 ii) hinreichend sind für Konvergenz des Random Walk $n \to \sum_{i=1}^n Y_i$:
Konvergenz unter ii) der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(|Y_i| \geq c)$ bedeutet nach Borel-Cantelli 5.5

$$Y_i \neq Y_{i,c} \text{ für höchstens endliche viele } i,\ P\text{-fast sicher}$$

wie im Beweis von 5.14. Also bleibt Konvergenz des Random Walk $n \to \sum_{i=1}^n Y_{i,c}$ zu zeigen. $Y_{i,c}$ ist beschränkt für alle i, also ist $n \to \sum_{i=1}^n \big(Y_{i,c} - E(Y_{i,c})\big)$ ein zentrierter Random Walk mit endlichen Varianzen. Unter ii) konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^\infty \mathrm{Var}(Y_{i,c})$, also liefert 5.9 Konvergenz von $n \to \sum_{i=1}^n \big(Y_{i,c} - E(Y_{i,c})\big)$. Unter ii) konvergiert die Reihe der Mittelwerte $\sum\limits_{i=1}^{\infty} E(Y_{i,c})$ separat, also konvergiert der Random Walk $n \to \sum_{i=1}^n Y_{i,c}$. □

Das nächste Lemma ergänzt die Kolmogorov-Ungleichung 5.8 – unter einer Zusatzbedingung – um eine Abschätzung nach unten.

5.18 Hilfssatz: Für einen zentrierten Random Walk $n \to \sum_{i=1}^n X_i$ mit *beschränkten Sprüngen*

$$\text{es gibt ein } K < \infty \text{ so daß } |X_i| \le K \text{ für alle } i \ge 1$$

(insbesondere dann $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(X_i) < \infty$) gilt für beliebiges $c > 0$:

$$1 - \frac{(c+K)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2} \;\le\; P\left(\max_{1\le k\le n} |\sum_{i=1}^{k} X_i| \ge c \right) \;\le\; \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \,.$$

Beweis: Nur die untere Abschätzung ist zu zeigen, die obere ist unverändert aus 5.8 übernommen. Die Bezeichnungen sind dieselben wie im Beweis von 5.8: schreibe $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$, $S_0 \equiv 0$,

$$F \;=\; \{ \max_{k=1,\dots,n} |S_k| \ge c \} \,, \quad F_k \;=\; \{ |S_k| \ge c,\ |S_i| < c \text{ für } 1 \le i \le k-1 \} \,,\ 1 \le k \le n \,,$$

und $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \dots, X_k)$. Zu $F_k \in \mathcal{F}_k$ — das Ereignis, daß der Random Walk den Streifen $(-c, c)$ zum erstenmal zur Zeit k verläßt — betrachte auch

$$G_k \;:=\; \{\, |S_i| < c \;\text{ für } 1 \le i \le k \,\} \;\in \mathcal{F}_k \,,\ 1 \le k \le n \,, \quad G_0 \;:=\; \Omega \,.$$

Die G_k sind absteigend in k, und es gilt

$$G_{k-1} \;=\; F_k \,\dot\cup\, G_k \,, \quad 1 \le k \le n \,, \quad F \,\dot\cup\, G_n \;=\; \Omega \,.$$

Die erste dieser Aussagen impliziert

$$(+) \qquad S_{k-1} 1_{G_{k-1}} + X_k 1_{G_{k-1}} \;=\; S_k 1_{G_{k-1}} \;=\; S_k 1_{G_k} + S_k 1_{F_k} \,.$$

Wir quadrieren jede der Seiten von (+) und bilden Erwartungswerte. X_k ist unabhängig von $\mathcal{F}_{k-1}$, und $E(X_k) = 0$: die linke Seite von (+) liefert dann

$$E\left([\, S_{k-1} 1_{G_{k-1}} + X_k 1_{G_{k-1}} \,]^2 \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= E(S_{k-1}^2\,1_{G_{k-1}}) + E(X_k^2\,1_{G_{k-1}}) + 2\,E(X_k\,\overbrace{S_{k-1}1_{G_{k-1}}}^{\mathcal{F}_{k-1}-\text{meßbar}})\\
&= E(S_{k-1}^2\,1_{G_{k-1}}) + E(X_k^2)P(G_{k-1}) + 2\,E(X_k)E(S_{k-1}1_{G_{k-1}})\\
&\geq E(S_{k-1}^2\,1_{G_{k-1}}) + \mathrm{Var}(X_k)P(G_{k-1}) + 0\\
&\geq E(S_{k-1}^2\,1_{G_{k-1}}) + \sigma_k^2\,P(G_n)
\end{aligned}
$$

da $(G_k)_k$ absteigend. Nach Voraussetzung hat $k \to \sum_{i=1}^k X_i$ beschränkte Sprünge; nach Definition von F_k und Wahl von K gilt also $|S_k| \leq c + K$ auf dem Ereignis F_k. Folglich liefert die rechte Seite von (+)

$$
\begin{aligned}
&E\left([\,S_k 1_{G_k} + S_k 1_{F_k}\,]^2\right)\\
&= E(S_k^2\,1_{G_k}) + E(S_k^2\,1_{F_k}) + E(S_k^2\,\overbrace{1_{G_k}1_{F_k}}^{=0})\\
&\leq E(S_k^2 1_{G_k}) + (c+K)^2 P(F_k)\ .
\end{aligned}
$$

Also erhalten wir aus (+) die Abschätzung

$$
(++) \qquad E(S_{k-1}^2 1_{G_{k-1}}) + \sigma_k^2\,P(G_n) \;\leq\; E(S_k^2\,1_{G_k}) + (c+K)^2 P(F_k)
$$

mit $S_0 = 0$ und $G_0 = \Omega$. Summiert man die Abschätzungen (++) für $k = 1, ..., n$, so ergibt sich wegen $F = F_1 \dot\cup ... \dot\cup F_k$ und $F \dot\cup G_n = \Omega$

$$
(1 - P(F)) \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \;\leq\; E(S_n^2\,1_{G_n}) + (c+K)^2 P(F)\ .
$$

Auf dem Ereignis G_n gilt aber $|S_n| < c < c + K$, also

$$
E(S_n^2 1_{G_n}) \;\leq\; (c+K)^2 P(G_n) \;=\; (c+K)^2 (1 - P(F))
$$

und folglich ist gezeigt

$$
(1 - P(F)) \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \;\leq\; (c+K)^2
$$

was die untere Abschätzung in der Aussage von 5.18 liefert. □

Unter derselben Zusatzbedingung wie in 5.18 kann man Satz 5.9 schärfer fassen:

5.19 Satz: Für einen zentrierten Random Walk mit beschränkten Sprüngen gilt

$$
\sum_{n=1}^\infty \sigma_i^2 < \infty \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{i=1}^\infty X_i \text{ konvergiert } P\text{-fast sicher.}
$$

Beweis: Nach 5.9 ist nur noch die Implikation '$\Longleftarrow$' zu zeigen. Sei S eine $I\!R$-wertige Limesvariable so daß

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} X_k \longrightarrow S \quad P\text{-fast sicher für } k \to \infty \ .$$

Aus dieser Konvergenz folgt mit den im Beweis von 5.9 benutzten Notationen

$$M_m = \sup_{k\geq 0} |S_{m+k} - S_m| \ \longrightarrow \ 0 \quad P\text{-fast sicher für } m \to \infty$$

und also auch P-stochastisch. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $m_0 = m_0(\varepsilon)$ so daß für $m \geq m_0$

$$\frac{1}{2} > P\left(\sup_{k\geq 0} |S_{m+k} - S_m| \geq \varepsilon\right) \ = \ \lim_{N\to\infty} P\left(\max_{k=1,\ldots,N} |\sum_{\ell=1}^{k} X_{m+\ell}| \geq \varepsilon\right) \ \geq \ 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{(\varepsilon + K)^2}{\sum\limits_{k=m+1}^{m+N} \sigma_k^2}$$

nach 5.18: wegen $\frac{1}{2} < 1$ erzwingt dies die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_k \sigma_k^2$. $\square$

5.20 Beispiel: (Zeichenproblem, Fortsetzung von 5.10) Sei $(c_n)_n$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, seien $(\eta_i)_i$ iid ZV mit $P(\eta_i = -1) = P(\eta_i = +1) = \frac{1}{2}$. Satz 5.19 zeigt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i c_i \quad \text{konvergiert } P\text{-fast sicher} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$$

und verschärft damit die Aussage von 5.10.

Der folgende Hilfssatz bereitet ein Argument vor (Erweiterung eines Wahrscheinlichkeitsraumes), das häufig benötigt wird, um verschiedene unabhängige Objekte (stochastische Prozesse, Zufallsvariable etc. ...) auf *demselben* Grundraum betrachten zu können.

5.21 Hilfssatz: Betrachte zwei Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$, $i = 1, 2$, und Familien $\left(f_{ij}\right)_{j\geq 1}$ meßbarer Abbildungen $(\Omega_i, \mathcal{A}_i) \to (E, \mathcal{E})$; dabei sei $(E, \mathcal{E})$ ein beliebiger meßbarer Raum. Man *liftet* f_{ij} auf den Produktraum $(\Omega_1{\times}\Omega_2, \mathcal{A}_1{\otimes}\mathcal{A}_2, P_1{\otimes}P_2)$ durch die Festsetzung

$$\widetilde{f}_{ij} : \Omega_1{\times}\Omega_2 \ \to \ E \ , \quad \widetilde{f}_{ij}(\omega_1, \omega_2) \ := \ f_{ij}(\omega_i) \ , \quad j \geq 1 \ , \ i = 1, 2 \ .$$

Dann gilt:

a) für jedes $i = 1, 2$, $j \geq 1$ ist die Abbildung $\widetilde{f}_{ij}$ $\mathcal{A}_1{\otimes}\mathcal{A}_2$–$\mathcal{E}$–meßbar, mit

$$\mathcal{L}(\widetilde{f}_{ij} | P_1{\otimes}P_2) \ = \ \mathcal{L}(f_{ij} | P_i) \ ;$$

b) für festes $i \in \{1, 2\}$ besitzt die Folge $\left(\widetilde{f}_{ij}\right)_{j\geq 1}$ unter $P_1{\otimes}P_2$ dieselben Eigenschaften wie die Ausgangsfolge $\left(f_{ij}\right)_{j\geq 1}$ unter P_i;

c) die σ-Algebren $\sigma\left(\widetilde{f}_{1j}, j \geq 1\right)$ und $\sigma\left(\widetilde{f}_{2j}, j \geq 1\right)$ auf dem Produktraum $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ sind unabhängig unter $P_1 \otimes P_2$.

Beweis: Für $F \in \mathcal{E}$ beliebig:

$$\{(\omega_1, \omega_2) : \widetilde{f}_{ij}((\omega_1, \omega_2)) \in F\} = \begin{cases} \{\omega_1 : f_{1j}(\omega_1) \in F\} \times \Omega_2 & \text{für } i = 1 \\ \Omega_1 \times \{\omega_2 : f_{2j}(\omega_2) \in F\} & \text{für } i = 2 \end{cases},$$

also $(\widetilde{f}_{ij})^{-1}(F) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \;\forall\, i, j$, und

$$(P_1 \otimes P_2)(\{\widetilde{f}_{ij} \in F\}) = P_i(\{f_{ij} \in F\}).$$

Genauso kann jede Sub-σ-Algebra $\mathcal{F}_i$ von $\mathcal{A}_i$ via

$$\widetilde{\mathcal{F}}_i := \begin{cases} \{\widetilde{F}_1 := F_1 \times \Omega_2 : F_1 \in \mathcal{F}_1\} & \text{für } i = 1 \\ \{\widetilde{F}_2 := \Omega_1 \times F_2 : F_2 \in \mathcal{F}_2\} & \text{für } i = 2 \end{cases}$$

als Sub-σ-Algebra von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ aufgefaßt werden, mit

$$(P_1 \otimes P_2)(\widetilde{F}_i) = P_i(F_i)\ ,\ \widetilde{F}_i \in \widetilde{\mathcal{F}}_i\ ,\ i = 1, 2\,.$$

Dies zeigt a) und b). Für c) genügt es zu sehen, daß mit denselben Bezeichnungen wie oben

$$\begin{aligned} (P_1 \otimes P_2)(\widetilde{F}_1 \cap \widetilde{F}_2) \;&=\; (P_1 \otimes P_2)\left([F_1 \times \Omega_2] \cap [\Omega_1 \times F_2]\right) \\ =\; (P_1 \otimes P_2)\,(F_1 \times F_2) \;&=\; \prod_{i=1}^{2} P_i(F_i) \;=\; \prod_{i=1}^{2} (P_1 \otimes P_2)(\widetilde{F}_i) \end{aligned}$$

gilt, für beliebige $\widetilde{F}_i \in \widetilde{\mathcal{F}}_i$, und dies auf $\mathcal{F}_i := \sigma\left(f_{ij} : j \geq 1\right)$ anzuwenden. □

5.22 Beispiel: Seien $\left(X_j\right)_{j \geq 1}$ iid ZV, definiert auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$; wir wollen den Random Walk

$$(S_n)_n\ ,\quad S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j\ ,\ n \geq 1\ ,\quad S_0 \equiv 0$$

zu unabhängigen zufälligen Zeiten auswerten. Dies macht man so.
Sei $\mathcal{Q} := \{Q_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Faltungsfamilie auf $\mathbb{N}_0$, $\Lambda = \mathbb{N}$ oder $\Lambda = (0, \infty)$:

$$\text{für beliebige } \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \text{ gilt } Q_{\lambda_1} * Q_{\lambda_2} = Q_{\lambda_1 + \lambda_2}\ .$$

Fixiere ein $Q \in \mathcal{Q}$. Auf einem zweiten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ bereite vor eine Familie $\left(\tau_j\right)_{j \geq 1}$ von $\mathbb{N}_0$-wertigen iid ZV mit Verteilung Q, bilde

$$T_0 := 0\ ,\quad T_n := \sum_{\ell=1}^{n} \tau_j\ ,\ n \geq 1\ .$$

Stets gibt es dann nach 5.21 einen *gemeinsamen* Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, auf dem $\big(X_j\big)_{j\geq 1}$ und $(\tau_\ell)_{\ell\geq 1}$ definiert und *unabhängig* sind. Auf diesem sind die Variablen

$$Y_n \ := \sum_{j=T_{n-1}+1}^{T_n} X_j \ , \ n \geq 1 \ , \quad Y_0 \equiv 0$$

wohldefinierte iid ZV, die Zuwächse im Random Walk $(S_n)_n$ zwischen den zufälligen Zeiten T_{n-1} und T_n beschreiben (alle Details überlege man sich als Übungsaufgabe).

Wählt man die Faltungfamilie aller Poissonverteilungen, so ist $Q = \mathcal{P}(\lambda)$ für ein festes $\lambda > 0$, und man betrachtet *Poisson-Summen* von Zuwächsen im Random Walk.

Wählt man als Faltungsfamilie die Negativ-Binomialverteilungen $\mathcal{Q} := \{\mathcal{B}^-(\ell,p) : \ell \in I\!N\}$ mit festem Parameter $0 < p < 1$,

$$\mathcal{B}^-(\ell,p)(\{k\}) \ := \ \binom{k+\ell-1}{k} \ p^\ell \ (1-p)^k \ , \quad k \in I\!N_0$$

(im unendlichen Münzwurf mit Einzelerfolgswahrscheinlichkeit p ist die Anzahl der Mißerfolge vor dem ℓ-ten Erfolg $\mathcal{B}^-(\ell,p)$-verteilt) und $Q = \mathcal{B}^-(1,p) = \mathcal{G}(1-p)$ geometrisch, so hat man den ursprünglichen Random Walk $(S_n)_n$ *nach unabhängigen geometrisch verteilten Wartezeiten* ausgewertet. □

Nun können wir den Beweis des Dreireihensatzes abschließen.

5.23 Beweis für 5.16, Teil 2: Wir zeigen, daß die drei Bedingungen in 5.16 ii) notwendig sind für Konvergenz des Random Walk $n \to \sum_{i=1}^n Y_i$; wegen 5.17 sind sie dann notwendig und hinreichend, was den Beweis von Satz 5.16 abschließt.

Sei also $(S_n)_n$ ein konvergenter Random Walk, mit unabhängigen Zuwächsen $(Y_i)_i$, definiert auf einem Grundraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sei S eine $I\!R$-wertige ZV auf $(\Omega, \mathcal{A})$ so daß

(+) $$S_n := \sum_{i=1}^n Y_i \ \longrightarrow \ S \quad P\text{-fast sicher für } n \to \infty.$$

1) die Reihe $\sum\limits_{i=1}^\infty P(|Y_i| \geq c)$: wie im Beweis von 5.14 folgt aus (+) notwendig

$$|Y_i| \geq c \quad \text{für höchstens endlich viele } i,\ P\text{-fast sicher.}$$

Das bedeutet nach Borel-Cantelli 5.5 – wegen Unabhängigkeit der $(Y_i)_i$ – Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=1}^\infty P(|Y_i| \geq c)$. Zugleich bedeutet es auch

(++) $$P\left(\limsup_{i\to\infty}\{Y_i \neq Y_{i,c}\}\right) \ = \ 0 \ .$$

2) die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}(Y_{i,c})$: Es bleibt ein konvergenter Random Walk $n \to \sum_{i=1}^{n} Y_{i,c}$ mit beschränkten Sprüngen zu betrachten, wegen (+) und (++). Wäre dieser schon zentriert, würde Satz 5.19 sofort Konvergenz der Reihe $\sum_i \mathrm{Var}(Y_{i,c})$ liefern, und damit den Beweis abschließen.
Um von $n \to \sum_{i=1}^{n} Y_{i,c}$ zu einem zentrierten Random Walk überzugehen, ohne dabei Information über die Reihe $\sum_i E(Y_{i,c})$ vorwegzunehmen, liftet man (Details im nächsten Beweisschritt) die unabhängigen ZV $(Y_{i,c})_{i\geq 1}$ nach 5.21 auf eine Erweiterung $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{P})$ von $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, auf der eine unabhängige Kopie $(Z_{i,c})_{i\geq 1}$ der Folge $(Y_{i,c})_{i\geq 1}$ zur Verfügung steht, und betrachtet dann den zentrierten Random Walk mit beschränkten Sprüngen

$$(*) \qquad n \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \big(Z_{i,c} - Y_{i,c}\big)$$

auf $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{P})$. Für diesen gilt $\mathrm{Var}\big(Z_{i,c} - Y_{i,c}\big) = 2\mathrm{Var}Y_{i,c}$. Hat man sich überlegt, daß auch der Random Walk $(*)$ fast sicher konvergiert, so liefert Anwendung von Satz 5.19 auf $(*)$ die gewünschte Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}(Y_{i,c})$.
3) Details zu der Erweiterung in Beweisschritt 2): auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ schreibt man $Y_{i,c}(\omega) =: f_i(\omega)$ und setzt $A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_i(\omega) \text{ existiert in } I\!R\}$. Wegen (+) und (++) gilt $P(A) = 1$. Nun bildet man den Produktraum

$$\widetilde{\Omega} := \Omega{\times}\Omega \ , \ \widetilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A}{\otimes}\mathcal{A} \ , \ \widetilde{P} := P{\otimes}P$$

und definiert neu

$$Y_{i,c}(\omega_1, \omega_2) := f_i(\omega_1) \ , \ Z_{i,c}(\omega_1, \omega_2) := f_i(\omega_2) \ , \ i \geq 1 \ , \ (\omega_1, \omega_2) \in \widetilde{\Omega} \ .$$

Für jedes $(\omega_1, \omega_2) \in A \times A$ – einer Menge von vollem $\widetilde{P}$-Maß in $\widetilde{\mathcal{A}}$ – konvergieren nun

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_{i,c}(\omega_1, \omega_2) \ , \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_{i,c}(\omega_1, \omega_2) \ , \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \big(Z_{i,c} - Y_{i,c}\big)(\omega_1, \omega_2) \ .$$

4) die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} E(Y_{i,c})$: Rechne nun wieder auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nach Schritt 2) konvergiert $\sum_i \mathrm{Var}(Y_{i,c})$, nach 5.9 muß also der zentrierte Random Walk $n \to \sum_{i=1}^{n} (Y_{i,c} - E(Y_{i,c}))$ gegen eine endliche Limesvariable konvergieren, P-fast sicher. Aber P-fast sichere Konvergenz von $n \to \sum_{i=1}^{\infty} Y_{i,c}$ gegen eine endliche Limesvariable war ohnehin vorausgesetzt, vgl. (+) und (++). Also ist auch die aus den Erwartungswerten gebildete Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} E(Y_{i,c})$ konvergent. Damit ist Satz 5.16 vollständig bewiesen. $\square$