Kapitel IV

Produkträume, Produktmaße, Unabhängigkeit

Reinhard Höpfner

Vorlesung Stochastik I

Sommersemester 2003, 2006, 2010

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

08.07.03, 20.06.06, 10.06.10

Übersicht zu Kapitel IV :

A. Endliche Produkträume

Produkt-σ-Algebra, Rechtecke als Erzeuger 4.1–4.2

Produktmaß: Existenz, Eindeutigkeit, Fubini 4.3

Hilfssatz zur Eindeutigkeit 4.4

Hilfssätze zur Meßbarkeit von Schnitten 4.5–4.7

Hilfssatz zur Existenz 4.8

Satz von Fubini 4.9

Beweis von Satz 4.3

B. Produkträume allgemein

Produkt-σ-Algebra, Säulen mit Rechteckbasis als Erzeuger 4.11–4.12

Satz (ohne Beweis) zum Produktmaß 4.13–4.13'

C. Unabhängigkeit

Bemerkung zur Produkt-σ-Algebra für separable metrische Räume 4.14

Unabhängigkeit von Ereignissen, σ-Algebren, Zufallsvariablen 4.14'–4-18

Produktformel und Produktdichten 4.19–4.21

C. Laplacetransformierte und Faltungsformeln

Exkurs: Laplace-Transformierte 4.22–4.22'

Exkurs: Multivariate Normalverteilungen 4.23

Faltung von Wahrscheinlichkeitsmaßen 2.24–4.25

A. Endliche Produkte

4.1 Voraussetzungen für Teilkapitel A: Wir betrachten für $1 \le i \le n$ σ-endliche Maße μ_i auf meßbaren Räumen $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. Wir benutzen häufig die Abkürzung MNF wie in 2.1.

4.1' Definition: Die *Produkt-σ-Algebra* $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$ auf dem Produktraum

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} \Omega_i \;:=\; \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \;:\; \omega_j \in \Omega_j,\; 1 \le j \le n\}$$

ist die kleinste σ-Algebra $\widetilde{\mathcal{A}}$, welche für $1 \le i \le n$ die Koordinatenprojektionen π_i

$$\pi_i \;:\; \mathop{\times}_{i=1}^{n} \Omega_i \;\ni\; (\omega_1, \dots, \omega_n) \longrightarrow \omega_i \;\in\; \Omega_i$$

$\widetilde{\mathcal{A}}$–$\mathcal{A}_i$–meßbar macht (vergleiche 1.36):

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \;:=\; \sigma\left(\pi_i : 1 \le i \le n\right) \;.$$

Das Urbild der σ-Algebra $\mathcal{A}_j$ unter der Projektion $\pi_j : \mathop{\times}_{i=1}^{n} \Omega_i \to \Omega_j$ ist

$$(\pi_j)^{-1}(\mathcal{A}_j) \;=\; \left\{ \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i : \; A_i = \Omega_i \text{ für } i \ne j,\; A_j \in \mathcal{A}_j \right\} ,$$

woraus sofort folgt:

4.2 Hilfssatz: Die Klasse $\mathcal{S}$ aller 'Rechtecke mit Kanten in $\mathcal{A}_i$'

$$\mathcal{S} \;:=\; \left\{ R \subset \mathop{\times}_{i=1}^{n} \Omega_i \;:\; R = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i \;,\; A_i \in \mathcal{A}_i \;,\; 1 \le i \le n \right\}$$

ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$.

Ziel des Teilkapitels ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

4.3 Satz: a) Es gibt genau ein σ-endliches Maß $\widetilde{\mu}$ auf dem Produktraum $(\mathop{\times}_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$ mit

$$(*) \qquad \widetilde{\mu}(R) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i) \quad \text{falls} \quad R = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}.$$

Dieses heißt *Produktmaß* zu den *Marginalien* μ_i, $1 \le i \le n$; die übliche Schreibweise ist $\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$.

b) (Fubini) Ist eine MNF f auf $(\mathsf{X}_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$ entweder nichtnegativ oder in $L^1(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i)$, so kann das Integral von f bezüglich $\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ durch sukzessives Ausintegrieren in beliebiger Reihenfolge berechnet werden: es gilt

$$\int_{\mathsf{X}_{i=1}^{n} \Omega_i} f \, d(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n) \;=\; \int \left(\ldots \left(\int \left(\int f(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mu_{i_1}(d\omega_{i_1}) \right) \mu_{i_2}(d\omega_{i_2}) \right) \ldots \right) \mu_{i_n}(d\omega_{i_n})$$

für beliebige Permutationen $(i_1, \ldots i_n)$ von $(1, \ldots, n)$, wobei alle hier sukzessiv auftretenden Integrationen wohldefiniert sind.

Der Beweis von Satz 4.3 wird über eine Reihe von Zwischenresultaten – darunter eine sorgfältige Formulierung des Satzes von Fubini in 4.9 – in 4.10 gegeben werden.

4.4 Hilfssatz: Es gibt höchstens ein Maß $\widetilde{\mu}$ auf $(\mathsf{X}_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$, welches die Bedingung $(*)$ aus 4.3 erfüllt, und dieses ist notwendig σ-endlich.

Beweis: 1) Sei $\widetilde{\mu} : \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion mit der Eigenschaft $(*)$ aus 4.3. Für $1 \le i \le n$ sind μ_i auf $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ σ-endlich, also existieren $(B_{i_k})_k \subset \mathcal{A}_i$ so daß

$$B_{i_k} \uparrow \Omega_i \ , \ k \to \infty \ ; \quad \mu(B_{i_k}) < \infty \ , \ k \ge 1 \ .$$

Dann liefert $\widetilde{B}_k := \mathsf{X}_{i=1}^{n} B_{i_k}$ eine Folge in $\mathcal{S}$ mit

$$\widetilde{B}_k \ \uparrow \ \widetilde{\Omega} \ := \ \mathsf{X}_{i=1}^{n} \Omega_i \ , \quad \widetilde{\mu}(\widetilde{B}_k) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \mu_i(B_{i_k}) \ < \ \infty.$$

2) Seien nun $\widetilde{\mu}_1, \widetilde{\mu}_2$ Maße auf $(\mathsf{X}_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$, welche $(*)$ erfüllen. Dann stimmen $\widetilde{\mu}_1$ und $\widetilde{\mu}_2$ überein auf dem $\cap$-stabilen System $\mathcal{S}$ der Rechtecke aus 4.2. Dieses erfüllt nach 1) die Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes 1.13. Also stimmen $\widetilde{\mu}_1$ und $\widetilde{\mu}_2$ überein auf $\sigma(\mathcal{S}) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$. $\square$

Wir betrachten zuerst den Fall $n = 2$.

4.5 Hilfsatz: Betrachte zwei meßbare Räume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. Für eine beliebige Teilmenge $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ und $\omega_i \in \Omega_i$ definiere ω_i-Schnitte durch A:

$$A_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}, \quad A_{\omega_2} := \{\omega_1 \in \Omega_1 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}.$$

Für Mengen $A \in \bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$ sind dann 'alle Schnitte meßbar':

$$A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2 \quad \forall\, \omega_1 \in \Omega_1 \ , \quad A_{\omega_2} \in \mathcal{A}_1 \quad \forall\, \omega_2 \in \Omega_2 \ .$$

Beweis: Schreibe $\widetilde{\Omega} := \Omega_1 \times \Omega_2$ und betrachte für $\omega_1 \in \Omega_1$ beliebig fest

$$\mathcal{H} := \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \ : \ A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2\}.$$

Dann ist $\mathcal{H}$ eine σ-Algebra: es gilt $\widetilde{\Omega} \in \mathcal{H}$ wegen $\widetilde{\Omega}_{\omega_1} = \Omega_2$; mit $A \in \mathcal{H}$ ist $A^c \in \mathcal{H}$ wegen $(A^c)_{\omega_1} = (\widetilde{\Omega} \backslash A)_{\omega_1} = \Omega_2 \backslash A_{\omega_1}$; sind A_n, $n \geq 1$, in $\mathcal{H}$, dann $\bigcup_n A_n \in \mathcal{H}$ wegen $(\bigcup_n A_n)_{\omega_1} = \bigcup_n (A_n)_{\omega_1}$. Auch umfaßt $\mathcal{H}$ das System $\mathcal{S}$: für Rechtecke $R = A_1 \times A_2 \in \mathcal{S}$ gilt

$$R_{\omega_1} = \left\{ \begin{array}{ll} A_2 & \text{falls } \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{array} \right\} \in \mathcal{A}_2 \ .$$

Folglich gilt $\mathcal{H} \supset \sigma(\mathcal{S})$ und damit $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, für jedes feste $\omega_1 \in \Omega_1$. Der Beweis geht analog mit ω_2 statt ω_1. □

4.6 Hilfssatz: Für jedes $A \in \bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$ gilt:

$$\begin{array}{lll} \omega_1 & \to & \mu_2(A_{\omega_1}) \quad \text{ist } \mathcal{A}_1\text{–}\mathcal{B}(\overline{I\!R})\text{–meßbar ,} \\ \omega_2 & \to & \mu_1(A_{\omega_2}) \quad \text{ist } \mathcal{A}_2\text{–}\mathcal{B}(\overline{I\!R})\text{–meßbar.} \end{array}$$

Beweis: Wegen Symmetrie in ω_1 und ω_2 reicht es, die erste Behauptung zu zeigen.

1) Sei zunächst μ_2 sogar ein endliches Maß. Für $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ schreibe

$$f_A \ : \ \Omega_1 \ni \ \omega_1 \longrightarrow \mu_2(A_{\omega_1}) \ \in [0, \infty) \ .$$

Dann ist die Klasse

$$\mathcal{H} \ := \ \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \ : \ f_A : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \longrightarrow (I\!R, \mathcal{B}(I\!R)) \ \text{ ist meßbar}\}$$

ein Dynkin-System: es gilt $\widetilde{\Omega} := \Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{H}$, denn $f_{\widetilde{\Omega}}(\cdot) \equiv \mu_2(\Omega_2)$ ist als konstante Funktion $\mathcal{A}_1$-meßbar; mit $A \in \mathcal{H}$ ist $A^c \in \mathcal{H}$, wegen $f_{A^c}(\cdot) = \mu_2(\Omega_2) - f_A(\cdot)$; mit paarweise disjunkten Mengen A_n, $n \geq 1$, in $\mathcal{H}$ ist auch $\dot{\bigcup}_n A_n$ in $\mathcal{H}$, wegen $f_{\dot{\bigcup}_{n\geq 1} A_n}(\cdot) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} f_{A_n}(\cdot)$.

Wieder ist die Klasse aller Rechtecke enthalten in $\mathcal{H}$: für $R = A_1 \times A_2 \in \mathcal{S}$ gilt

$$f_{A_1\times A_2}(\omega_1) \;=\; \mu_2((A_1 \times A_2)_{\omega_1}) \;=\; \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}(\omega_1) \;.$$

Da $\mathcal{S}$ $\cap$-stabil ist, zeigt 1.11 $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$ und damit $\mathcal{H} = \bigotimes\limits_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$.

2) Im allgemeinen Fall eines σ-endlichen Maßes μ_2 wählt man eine Zerlegung

$$\Omega_2 \;=\; \dot{\bigcup_{n\geq 1}} E_{2,n} \;, \quad E_{2n} \in \mathcal{A}_2 \;,\; \mu_2(E_{2,n}) < \infty \;,\; n \geq 1 \;.$$

Für jedes der endlichen Maße $\mu_2(\cdot \cap E_{2,n})$ gilt die Behauptung nach Schritt 1), also gilt sie auch für $\mu_2(A_{\omega_1}) = \sum\limits_n \mu_2(A_{\omega_1} \cap E_{2,n})$. □

Indem man eine nichtnegative MNF aufsteigend durch Elementarfunktionen approximiert ('Aufbau meßbarer Funktionen'), verallgemeinern sich 4.5 und 4.6 sofort zu

4.7 Hilfssatz: Sei f eine nichtnegative MNF auf $(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{2} \Omega_i, \bigotimes\limits_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i)$. Dann gilt:
Für jedes feste $\omega_1 \in \Omega_1$ ist der 'ω_1-Schnitt'

$$f_{\omega_1} :\; \Omega_2 \ni \;\omega_2 \quad \longrightarrow \quad f(\omega_1, \omega_2) \;\in [0, \infty]$$

$\mathcal{A}_2$–$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$–meßbar, und das Integral

$$\Omega_1 \ni \;\omega_1 \quad \longrightarrow \quad \int_{\Omega_2} f_{\omega_1}(\omega_2)\, \mu_2(d\omega_2) \;\in [0, \infty]$$

ist $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$–meßbar. Analoge Aussagen gelten mit vertauschten Rollen $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$.

4.8 Hilfssatz: Es gibt ein Maß $\widetilde{\mu}$ auf $(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{2} \Omega_i, \bigotimes\limits_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i)$ mit der Eigenschaft $(*)$ aus 4.3:

$$\widetilde{\mu}(R) \;=\; \prod_{i=1}^{2} \mu_i(A_i) \quad \text{für alle Rechtecke} \;\; R = A_1 \times A_2 \in \mathcal{S} \;.$$

Beweis: Definiere eine Mengenfunktion $\widetilde{\mu} : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to [0, \infty]$ durch

$$(**) \qquad \widetilde{\mu}(F) \;:=\; \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} (1_F)_{\omega_1}(\omega_2)\mu_2(d\omega_2) \right] \mu_1(d\omega_1) \;, \quad F \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \;.$$

Da nach 4.7 der Integrand in $(**)$ eine $\mathcal{A}_1$-meßbare Funktion von ω_1 ist, ist $\widetilde{\mu}$ als Mengenfunktion wohldefiniert. Sicher gilt $\widetilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Zum Nachweis der σ-Additivität von $\widetilde{\mu}$ wendet man zweimal den Satz von der monotonen Konvergenz 2.7 an. Sei F_n, $n \geq 1$, eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Zuerst gilt

$$\begin{aligned} g(\omega_1) &:= \int_{\Omega_2} (1_{\bigcup\limits_n^\infty F_n})_{\omega_1}(\omega_2)\, \mu_2(d\omega_2) \\ &= \sup_m \int_{\Omega_2} (1_{\bigcup\limits_{n=1}^m F_n})_{\omega_1}(\omega_2)\, \mu_2(d\omega_2) \\ &= \sup_m \underbrace{\sum_{n=1}^m \int_{\Omega_2} (1_{F_n})_{\omega_1}(\omega_2)\, \mu_2(d\omega_2)}_{=:g_m(\omega_1)} \;=\; \sup_m \; g_m(\omega_1) \end{aligned}$$

wobei jedes $g_m(\cdot)$ nach 4.7 wohldefiniert und $\mathcal{A}_1$-meßbar ist. Dann aber folgt weiter

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}(\dot{\bigcup_{n\geq 1}} F_n) &= \int_{\Omega_1} g(\omega_1)\, \mu_1(d\omega_1) \;=\; \sup_m \int_{\Omega_1} g_m(\omega_1)\, \mu_1(d\omega_1) \\ &= \sup_m \left(\sum_{n=1}^m \widetilde{\mu}(F_n) \right) \;=\; \sum_{n=1}^\infty \widetilde{\mu}(F_n)\ , \end{aligned}$$

damit ist $\widetilde{\mu}$ ein Maß auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Für Rechtecke $F = A_1 \times A_2 \in \mathcal{S}$ gilt stets $\widetilde{\mu}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$, nach Konstruktion in $(**)$. Das ist $(*)$ in 4.3. □

Wir geben nun eine sorgfältige Formulierung des Satzes von Fubini im Fall $n = 2$.

4.9 Satz von Fubini: Seien μ_i σ-endliche Maße auf $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$; sei f eine meßbare numerische Funktion auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, entweder nichtnegativ oder in $L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$.

a) Ist f nichtnegativ, so gilt

$$(+) \qquad \begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1}(\omega_2)\, \mu_2(d\omega_2) \right) \mu_1(d\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2}(\omega_1)\, \mu_1(d\omega_1) \right) \mu_2(d\omega_2) \quad \in \; [0, \infty]\ . \end{aligned}$$

b) Für $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ gilt $(+)$ mit '$\in [0, \infty]$' ersetzt durch '$\in \mathbb{R}$', und

$$\begin{aligned} f_{\omega_1} \in L^1(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) &\qquad \text{für} \quad \mu_1\text{-fast alle} \;\; \omega_1 \in \Omega_1\ , \\ f_{\omega_2} \in L^1(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) &\qquad \text{für} \quad \mu_2\text{-fast alle} \;\; \omega_2 \in \Omega_2\ . \end{aligned}$$

Beweis: 1) In 4.8 wäre die Konstruktion $(**)$ auch mit vertauschten Rollen $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$ möglich gewesen. Nach Hilfssatz 4.4 kann es nur ein Maß geben, welches die Eigenschaft $(*)$ aus 4.3

besitzt. Also führen beide Wege zu demselben Maß $\widetilde{\mu}$ auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Damit ist a) für Indikatorfunktionen bewiesen, die allgemeine Aussage folgt mit 'Aufbau meßbarer Funktionen'.
2) Für $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ gilt $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty$. Wegen a) muß dann

$$N_1 \;:=\; \{\omega_1 \in \Omega_1 : \;\; \underbrace{\int_{\Omega_2} |f|_{\omega_1}(\omega_2)\, \mu_2(d\omega_2)}_{\mathcal{A}_1-\text{meßbare Funktion von } \omega_1} \;=+\infty\,\} \quad \in\; \mathcal{A}_1$$

eine μ_1-Nullmenge sein, vgl. 2.11, und

$$N_2 \;:=\; \{\omega_2 \in \Omega_2 : \;\; \underbrace{\int_{\Omega_1} |f|_{\omega_2}(\omega_1)\, \mu_1(d\omega_1)}_{\mathcal{A}_2-\text{meßbare Funktion von } \omega_2} \;=+\infty\,\} \quad \in\; \mathcal{A}_2$$

eine μ_2-Nullmenge. Damit ist b) bewiesen.
3) Das Argument aus 2) zeigt auch: für $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ ist die Funktion

$$\widetilde{f} \;:=\; f \cdot 1_{\{|f|<\infty\}} \cdot 1_{N_1^c \times \Omega_2} \cdot 1_{\Omega_1 \times N_2^c}$$

$\mu_1 \otimes \mu_2$–äquivalent zu f, und man hat *alle* Schnitte $\widetilde{f}_{\omega_1}$ in $L^1(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, $\omega_1 \in \Omega_1$, sowie *alle* Schnitte $\widetilde{f}_{\omega_2}$ in $L^1(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $\omega_2 \in \Omega_2$. Also können die Elemente aus $L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ stets so festgelegt werden, daß beliebige Schnitte integrierbar sind. □

Jetzt ergibt sich ein kurzer Beweis für Satz 4.3.

4.10 Beweis von Satz 4.3: 1) Wir zeigen a). Eindeutigkeit und σ-Endlichkeit eines Maßes mit Eigenschaft $(*)$ aus 4.3 sind für beliebiges $n \in I\!N$ durch 4.4 gesichert. Die Existenz wurde im Fall $n = 2$ in 4.8 bewiesen. Nur die Existenz im Fall $n > 2$ bleibt zu zeigen. Dies geschieht mit Induktion nach n. Ist für ein $n \geq 2$ schon die Existenz des n-fachen Produktmaßes $\bigotimes_{i=1}^n \mu_i$ auf $(\times_{i=1}^n \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i)$ nachgewiesen, mit der Eigenschaft

$$(*n) \qquad (\bigotimes_{i=1}^n \mu_i)(R) \;=\; \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i) \quad \text{falls } R = \times_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}$$

so betrachtet man für eine nichtnegative MNF f auf $(\times_{i=1}^{n+1} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i)$ Schnitte

$$(\circ) \qquad f_{\omega_{n+1}} \;:\; (\omega_1, \ldots, \omega_n) \;\longrightarrow\; f(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1})$$

und definiert auf

$$(\times_{i=1}^{n+1} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i) \;=\; \Big((\times_{i=1}^{n} \Omega_i) \times \Omega_{n+1}, (\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i) \otimes \mathcal{A}_{n+1} \Big)$$

wie in 4.8

$$\widetilde{\mu}(f) := \int_{\Omega_{n+1}} \Big[\int_{\times_{i=1}^{n} \Omega_i} f_{\omega_{n+1}} \, d(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i) \Big] \, d\mu_{n+1} .$$

Für Indikatorfunktionen $f = 1_F$ von Mengen F aus $\bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i$ hat man so wegen $(*n)$ und wegen 4.8 ein Maß $\widetilde{\mu}$ auf $\bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i$ definiert. Wegen $(*n)$ und 4.8 erfüllt dieses die Bedingung $(*(n+1))$. Da es nach 4.4 nur ein Maß auf $(\times_{i=1}^{n+1} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i)$ mit der Eigenschaft $(*(n+1))$ geben kann, ist das gesuchte Produktmaß $\bigotimes_{i=1}^{n+1} \mu_i$ auf $(\times_{i=1}^{n+1} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i)$ gefunden.

2) Die Fubini-Aussage b) für $(\pi_1, \ldots, \pi_n) := (1, \ldots, n)$ erhält man in derselben Weise, per Induktion nach n, aus 4.9.

3) Anstelle der in 1) und 2) gewählten Anordnung hätte man in den Aussagen $(*n)$ und $(\circ)$ entlang einer beliebigen Permutation $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ der Koordinaten $(1, \ldots, n)$ vorgehen können, um dasselbe Produktmaß $\bigotimes_{i=1}^{n+1} \mu_i$ auf $(\times_{i=1}^{n+1} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i)$ (beachte 4.4) und die Fubini-Aussage entlang $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ zu erhalten. $\square$

B. Unendliche Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen

4.11 Voraussetzungen für Teilkapitel B: Sei I eine beliebige Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei μ_i ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf einem meßbaren Raum $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$. $\mathcal{H}(I)$ bezeichne das System aller endlichen Teilmengen von I. Zu jedem $J \in \mathcal{H}(I)$ benutzen wir die Kurzschreibweise

$$\Omega_J := \times_{i \in J} \Omega_i \ , \quad \mathcal{A}_J := \bigotimes_{i \in J} \mathcal{A}_i \ , \quad P_J := \bigotimes_{i \in J} \mu_i \ , \quad \mathcal{S}_J := \text{ Klasse der Rechtecke in } \mathcal{A}_J$$

für die J zugeordneten endlichen Produkträume nach Teilkapitel A.

4.11' Definition: Die Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$ auf dem Produktraum

$$\times_{i \in I} \Omega_i := \{(\omega_i)_{i \in I} \ : \ \omega_i \in \Omega_i \ \text{ für alle } i \in I\}$$

ist die kleinste σ-Algebra $\widetilde{\mathcal{A}}$, welche für beliebiges $J \in \mathcal{H}(I)$ die Projektion

$$\pi_J : \quad \times_{i \in I} \Omega_i \ \ni \ (\omega_i)_{i \in I} \quad \longrightarrow \quad (\omega_i)_{i \in J} \ \in \ \Omega_J$$

$\widetilde{\mathcal{A}}$–$\mathcal{A}_J$–meßbar macht:

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i \quad := \quad \sigma\,(\,\pi_J : J \in \mathcal{H}(I)\,) \ .$$

4.12 Hilfssatz: a) Das System aller *Säulen mit Rechteckbasis* im Produktraum $\mathop{\times}\limits_{i\in I} \Omega_i$

$$\mathcal{S} \ := \ \{ \ R = \mathop{\times}\limits_{i\in I} A_i : \ \ A_i \in \mathcal{A}_i \text{ für alle } i \in I, \ \ A_i \neq \Omega_i \text{ für höchstens endlich viele } i \ \}$$

ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger der Produkt-σ-Algebra $\bigotimes\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

b) Sind Erzeuger $\mathcal{C}_i$ von $\mathcal{A}_i$ gegeben, $i \in I$, so ist auch das Teilsystem $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$

$$\mathcal{S}' \ := \ \{ \ R = \mathop{\times}\limits_{i\in I} A_i \ : \ \ A_i \neq \Omega_i \text{ für höchstens endlich viele } i, \ \ A_i \in \mathcal{C}_i \text{ falls } A_i \neq \Omega_i \ \}$$

ein Erzeuger von $\bigotimes\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

Beweis: 1) Sei zuerst $J \in \mathcal{H}(I)$ fest. Nach 4.2 wird die σ-Algebra $\mathcal{A}_J$ auf Ω_J von dem System

$$\mathcal{S}_J \ = \ \{R \subset \Omega_J \ : \ R = \mathop{\times}\limits_{j\in J} A_j \ , \ A_j \in \mathcal{A}_j \ , \ j \in J\}$$

der Rechtecke in $\mathcal{A}_J$ erzeugt. Sei $\widetilde{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra auf $\mathop{\times}\limits_{i\in I} \Omega_i$. $\widetilde{\mathcal{A}}$–$\mathcal{A}_J$–Meßbarkeit der Projektion $\pi_J : \mathop{\times}\limits_{i\in I} \Omega_i \to \Omega_J$ ist nach 1.34 gleichwertig mit $(\pi_J)^{-1}(\mathcal{S}_J) \subset \widetilde{\mathcal{A}}$. Aber

$$(\pi_J)^{-1}(\mathcal{S}_J) \ = \ \left\{ R = \mathop{\times}\limits_{i\in I} A_i : \ \ A_i = \Omega_i \text{ falls } i \in I \setminus J, \text{ und } A_i \in \mathcal{A}_i \text{ falls } i \in J \ \right\}$$

ist die Klasse aller Säulen im Produktraum $\mathop{\times}\limits_{i\in I} \Omega_i$, deren Basis ein Rechteck in $\mathcal{S}_J$ ist.

Für $J \in \mathcal{H}(I)$ beliebig erhält man damit

$$\sigma\left(\pi_J : J \in \mathcal{H}(I)\right) \ = \ \sigma(\mathcal{S}) \ .$$

2) Mit demselben Argumenten beweist man analog

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i \ = \ \sigma\left(\pi_r : r \in I\right) \quad , \quad \pi_r \ : \ \mathop{\times}\limits_{i\in I} \Omega_i \ \ni \ (\omega_i)_{i\in I} \ \longrightarrow \ \omega_r \ \in \ \Omega_r \ .$$

Ist dann für $r \in I$ ein Erzeuger $\mathcal{C}_r$ von $\mathcal{A}_r$ gegeben, so gilt mit 1.34

$$\sigma\left(\pi_r : r \in I\right) \ = \ \sigma\left(\bigcup_{r\in I} \pi_r^{-1}(\mathcal{C}_r) \right) \ = \ \sigma(\mathcal{S}') \ .$$

Damit ist auch $\mathcal{S}'$ ein Erzeuger der Produkt-σ-Algebra $\bigotimes\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ (i.a. ist $\mathcal{S}'$ nicht $\cap$-stabil). $\square$

4.13 Satz: Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen aus 4.11 gilt:

a) Es gibt genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\widetilde{P}$ auf $(\mathop{\times}\limits_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i)$ mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad \widetilde{P}(R) \ = \ \prod_{i\in I} \mu_i(A_i) \quad \text{falls} \quad R = \mathop{\times}\limits_{i\in I} A_i \ \in \mathcal{S} \ .$$

Man nennt $\widetilde{P}$ *Produktwahrscheinlichkeit* und schreibt $\bigotimes_{i\in I}\mu_i$ (beachte: in $(*)$ gilt $A_i = \Omega_i$ für alle bis auf endlich viele i, also ist wegen $\mu_i(\Omega_i) = 1$ das Produkt in $(*)$ stets wohldefiniert).

b) Die Eigenschaft $(*)$ ist gleichwertig mit Gültigkeit von

$$(**) \qquad P_J \;=\; \mathcal{L}(\pi_J|\widetilde{P}) \quad \text{auf} \quad (\Omega_J, \mathcal{A}_J)\,, \quad \text{für alle } \; J \in \mathcal{H}(I)\,.$$

Zum Beweis: a) Den auf ein 'iteriertes Fubiniargument' aufgebauten Beweis von a) lese man im Buch von Bauer nach (Paragraph 33 in der Ausgabe von 1978, Paragraph 9 in der Ausgabe von 1991, die spätere Version ist besser lesbar). Dieser Beweis benutzt nur die bis einschließlich 4.12 entwickelten Hilfmittel.

Wir werden eine 4.13 a) entsprechende Aussage (unter etwas stärkeren Voraussetzungen) als Nebenprodukt des Kolmogorov-Konsistenzsatzes (12.6 und 12.7) beweisen: dieser Beweis ist schöner und (insbesondere mit Blick auf die Konstruktion stochastischer Prozesse) wichtiger, und braucht ebenfalls nur Hilfsmittel, die bis einschließlich 4.12 bereitgestellt wurden.

b) Wir zeigen die Behauptung b) in drei Schritten.

i) Für $J \in \mathcal{H}(I)$ ist nach 4.3 jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_J, \mathcal{A}_J)$ durch seine Werte auf den Rechtecken aus $\mathcal{S}_J$ eindeutig festgelegt.

ii) Betrachte auf $(\times_{i\in I}\Omega_i, \bigotimes_{i\in I}\mathcal{A}_i)$ eine Säule mit Rechteckbasis $R = \times_{i\in I} A_i \in \mathcal{S}$.
Zu R gibt es $J \in \mathcal{H}(I)$, $J = J_R$, so daß

$$R \;=\; \mathop{\times}_{i\in I} A_i \quad \text{wobei } A_i \neq \Omega_i \text{ höchstens für } i \in J$$

und damit gilt

$$R \;=\; (\pi_J)^{-1}\left(\mathop{\times}_{i\in J} A_i\right)\,, \qquad \mathop{\times}_{i\in J} A_i \in \mathcal{S}_J\,.$$

iii) Für $\widetilde{P} = \bigotimes_{i\in I}\mu_i$ auf $(\times_{i\in I}\Omega_i, \bigotimes_{i\in I}\mathcal{A}_i)$ und für R, $J = J_R$ wie in ii) gilt einerseits

$$\widetilde{P}(R) \;=\; \prod_{i\in I} \underbrace{\mu_i(A_i)}_{=1 \text{ falls } i\notin J} \;=\; \prod_{i\in J}\mu_i(A_i) \;=\; P_J\left(\mathop{\times}_{i\in J} A_i\right)\,, \qquad \mathop{\times}_{i\in J} A_i \in \mathcal{S}_J$$

wegen $(*)$ in 4.3, und andererseits wegen ii)

$$\widetilde{P}(R) \;=\; \widetilde{P}\left((\pi_J)^{-1}\left(\mathop{\times}_{i\in J} A_i\right)\right) \;=\; \widetilde{P}\left(\left\{\pi_J \in \mathop{\times}_{i\in J} A_i\right\}\right)\,.$$

Ein Vergleich der letzten beiden Aussagen zeigt $P_J = \mathcal{L}(\pi_J \mid \widetilde{P})$, wegen i). $\square$

Als Folgerung aus 4.13 ergibt sich:

4.13' Bemerkung: Sei $J \in \mathcal{H}(I)$ fest, $|J| = n$. Betrachte eine MNF f auf $(\times_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i)$, nichtnegativ oder in $L^1(\bigotimes_{i\in I} \mu_i)$, welche von ihrem Argument $\omega = (\omega_i)_{i\in I}$ nur durch die endlich vielen Koordinaten $(\omega_j)_{j\in J}$ abhängt. Dann gibt es eine MNF h auf $(\Omega_J, \mathcal{A}_J)$ so daß f darstellbar ist als $f = h \circ \pi_J$, und das Integral von f bezüglich $\bigotimes_{i\in I} \mu_i$ kann durch sukzessives Ausintegrieren

$$\int_{\times_{i\in I} \Omega_i} f \, d(\bigotimes_{i\in I} \mu_i) = \int \left(\dots \left(\int \left(\int h((\omega_j)_{j\in J}) \, \mu_{j_1}(d\omega_{j_1}) \right) \mu_{j_2}(d\omega_{j_2}) \right) \dots \right) \mu_{j_n}(d\omega_{j_n})$$

entlang beliebiger Permutationen $(j_1, \dots j_n)$ der Elemente von J berechnet werden.

Beweis: Für f wie angegeben folgt

$$\int_{\times_{i\in I} \Omega_i} f \, d(\bigotimes_{i\in I} \mu_i) \;=\; \int_{\times_{i\in I} \Omega_i} h \circ \pi_J \, d(\bigotimes_{i\in I} \mu_i) \;=\; \int_{\Omega_J} h \, dP_J$$

nach Definition eines Bildmaßes, und wegen $\mathcal{L}(\pi_J | \bigotimes_{i\in I} \mu_i) = P_J$, 4.13 b), mit Fubini 4.3 b). □

C. Unabhängigkeit

4.14 Hilfssatz: Für jedes $l \in I\!N$ gilt $\bigotimes_{r=1}^{\ell} \mathcal{B}(I\!R) \;=\; \mathcal{B}(I\!R^{\ell})$.

Beweis: Diese Aussage folgt allein aus der Separabilität von $I\!R$, vgl. 1.6'. Wegen Separabiliät läßt sich jede offene Menge in $I\!R^l$ als abzählbare Vereinigung offener Kugeln

$$\{ \, B_r(x) : \; x \in \mathbb{Q}^l \, , \, r \in \mathbb{Q}^+ \, \}$$

oder als abzählbare Vereinigung offener Würfel

$$\widehat{\mathcal{C}} \;:=\; \{ \, \times_{i=1}^{l} (x_i - r, x_i + r) \; : \; x = (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{Q}^l \, , \, r \in \mathbb{Q}^+ \, \}$$

schreiben, damit ist $\widehat{\mathcal{C}}$ nach 1.6 ein Erzeugendensystem für die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(I\!R^l)$. Nach 4.12 b) ist $\widehat{\mathcal{C}}$ aber auch ein Erzeuger der Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{r=1}^{\ell} \mathcal{B}(I\!R)$. □

Bemerkung: Die Aussage $\bigotimes_{r=1}^{\ell} \mathcal{B}(E_i) \;=\; \mathcal{B}(\times_{i=1}^{\ell} E_i)$ gilt allgemein für separable metrische Räume (E_i, d_i), $1 \le i \le \ell$ (siehe Billingsley 1968, p. 225).

4.14' Bemerkung: a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei I eine beliebige Indexmenge, sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Zufallsvariablen (ZV) auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Werten in $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$. Eine vorläufige Definition von *Unabhängigkeit* der $(X_i)_{i\in I}$ wird (etwa in der 'Einführung in die Stochastik') oft so formuliert: man nennt die $(X_i)_{i\in I}$ unabhängig falls gilt

$$\left\{\begin{array}{l} \text{für jede endliche Teilmenge } J \subset I,\ J = \{i_1, \ldots, i_\ell\}, \\ \text{für jede Wahl von } -\infty < a_{i_r} < b_{i_r} < +\infty, \quad 1 \leq r \leq \ell : \\ P(X_{i_r} \in (a_{i_r}, b_{i_r}]\ \ \forall\, 1 \leq r \leq \ell) \;=\; \prod\limits_{r=1}^{\ell} P(X_{i_r} \in (a_{i_r}, b_{i_r}]) \,. \end{array}\right.$$

Für jedes $\ell \geq 1$ bildet das System der halboffenen ℓ-dimensionalen Rechtecke $(a, b] = \prod_{r=1}^{\ell} (a_{i_r}, b_{i_r}]$ aus 1.6' einen durchschnittsstabilen Erzeuger von $\mathcal{B}(I\!R^\ell) = \bigotimes_{r=1}^{\ell} \mathcal{B}(I\!R)$, vgl. 4.14. Daher ist die oben gemachte Aussage nach der Definition endlicher Produktmaße in 4.3 gleichbedeutend mit

$$\left\{\begin{array}{l} \text{für jede endliche Teilmenge } J \subset I,\ J = \{i_1, \ldots, i_\ell\},\ \ell \geq 1\text{:} \\ \mathcal{L}((X_{i_1}, ..., X_{i_\ell})|P) = \bigotimes\limits_{r=1}^{\ell} \mathcal{L}(X_{i_r}|P) \\ \text{auf } (I\!R^\ell, \mathcal{B}(I\!R^\ell))\,. \end{array}\right.$$

b) Sei I eine beliebige Indexmenge, seien Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_i,\ i \in I$, auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ vorgegeben. Stets kann ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{P})$ angegeben werden, auf dem eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen $X_i,\ i \in I$, mit Werten in $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ und mit vorgeschriebenen Verteilungen $\mathcal{L}(X_i|\widetilde{P}) = \mu_i,\ i \in I$, erklärt ist:
nach 4.13 und nach a) oben genügt es, den Produktraum

$$(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{P}) \;:=\; \left(\mathop{\times}_{i\in I} I\!R\,,\ \bigotimes_{i\in I} \mathcal{B}(I\!R)\,,\ \bigotimes_{i\in I} \mu_i \right)$$

mit Koordinatenprojektionen $(\pi_i)_{i\in I}$ wie im Beweis von 4.12 zu betrachten, und zu setzen

$$X_i \;:=\; \pi_i\,, \quad i \in I\,.$$

Für $J = \{i_1, ..., i_\ell\} \in \mathcal{H}(I)$, der Familie aller endlichen Teilmengen von I, entspricht so die erste Aussage in a) oben der Produktformel $(*)$ in 4.13 a). Die zweite Aussage in a) oben entspricht $(**)$ in 4.13 b).

c) Ist speziell $\mu_i =: \mu$ unabhängig von $i \in I$, hat man mit b) insbesondere eine Familie von unabhängigen, nach μ verteilten Zufallsvariablen konstruiert, und schreibt dafür kurz

$$X_i\,,\ i \in I \quad \text{iid} \;\sim\; \mu\,. \qquad \square$$

Die allgemeine Formulierung von 'Unabhängigkeit' geht aus von σ-Algebren anstelle von Zufallsvariablen.

4.15 Definition: Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sei I eine beliebige Indexmenge.
a) Eine Familie von Ereignissen $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{A}$ heißt *unabhängig unter* P, falls

$$\forall\, J \in \mathcal{H}(I) : \quad P(\bigcap_{i\in J} A_i) \;=\; \prod_{i\in J} P(A_i)\ .$$

b) Eine Familie $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ von Teilsystemen von $\mathcal{A}$ heißt *unabhängig unter* P, falls gilt

$$\begin{cases} \text{für alle } J \in \mathcal{H}(I)\ ,\ J = \{i_1, \ldots, i_\ell\}\ ,\ \text{für beliebige } A_{i_r} \in \mathcal{C}_{i_r}\ ,\ 1 \le r \le \ell\ : \\ P(\bigcap\limits_{r=1}^{\ell} A_{i_r}) \;=\; \prod\limits_{r=1}^{\ell} P(A_{i_r})\ . \end{cases}$$

Wir zeigen zuerst:

4.16 Hilfssatz: Sind Teilsysteme $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ unabhängig unter P, so ist auch die Familie der von ihnen erzeugten Dynkinsysteme $(\delta(\mathcal{C}_i))_{i\in I}$ unabhängig unter P.

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt. Sei für eine Kollektion von Teilsystemen $(\widetilde{\mathcal{C}}_i)_{i\in I}$ mit

$$\text{für alle } i \in I\ :\quad \mathcal{C}_i \subset \widetilde{\mathcal{C}}_i \subset \delta(\mathcal{C}_i)$$

bereits die Aussage

$$(+)\qquad \begin{cases} \text{für alle } J \in \mathcal{H}(I)\ ,\ J = \{i_1, \ldots, i_\ell\}\ ,\ \text{für beliebige } A_{i_r} \in \widetilde{\mathcal{C}}_{i_r}\ ,\ 1 \le r \le \ell\ ,\ \text{gilt} \\ P(\bigcap\limits_{r=1}^{\ell} A_{i_r}) \;=\; \prod\limits_{r=1}^{\ell} P(A_{i_r}) \end{cases}$$

bewiesen; zugleich gebe es ein $J = \{i_1, \ldots, i_\ell\} \in \mathcal{H}(I)$ und ein $i_r \in J$ so daß in der Aussage

$$(*, J)\qquad \text{für beliebige } A_{i_r} \in \widetilde{\mathcal{C}}_{i_r},\ 1 \le r \le \ell : \quad P(\bigcap_{r=1}^{\ell} A_{i_r}) = \prod_{r=1}^{\ell} P(A_{i_r})$$

das Mengensystem $\widetilde{\mathcal{C}}_{i_r}$ *nicht* durch $\delta(\mathcal{C}_{i_r})$ ersetzt werden kann.
Wir zeigen, daß ein solche Annahme absurd ist. Sei oBdA $r = 1$. Setze

$$\mathcal{H}_{i_1} \;:=\; \{\ A \in \mathcal{A} : \quad \begin{array}{l} \text{für beliebige } A_{i_r} \in \widetilde{\mathcal{C}}_{i_r},\ 2 \le i \le r,\ \text{gilt} \\ P\left(A \cap (\bigcap\limits_{r=2}^{\ell} A_{i_r})\right) \;=\; P(A) \cdot \prod\limits_{r=2}^{\ell} P(A_{i_r}) \quad \}\ . \end{array}$$

Nach $(+)$ gilt $\Omega \in \mathcal{H}$. Zusammen mit $(*, J)$ impliziert dies die Stabilität von $\mathcal{H}$ unter Komplementbildung. Weiter ist $\mathcal{H}$ abgeschlossen bezüglich der Bildung abzählbarer disjunkter Vereinigungen. Also ist $\mathcal{H}$ Dynkin. Wegen $(*, J)$ gilt aber $\mathcal{C}_{i_1} \subset \mathcal{H}$ und folglich $\delta(\mathcal{C}_{i_1}) \subset \mathcal{H}$, im Widerspruch zur Annahme über J und $i_1 \in J$. $\square$

4.17 Satz: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei I eine beliebige Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ eine Sub-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ mit $\cap$-stabilem Erzeuger $\mathcal{C}_i$.
Dann sind gleichwertig:

i) die σ-Algebren $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ sind unabhängig unter P;

ii) die Mengensysteme $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ sind unabhängig unter P.

Beweis: i) $\Longrightarrow$ ii) ist trivial. ii) $\Longrightarrow$ i) folgt mit Hilfssatz 4.16; da nach Voraussetzung $\mathcal{C}_i$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_i$ ist, gilt $\mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{C}_i) = \delta(\mathcal{C}_i)$ nach Satz 1.11. $\square$

Den Vorteil des Ansatzes, Unabhängigkeit über σ-Algebren zu definieren, sieht man im folgenden Satz: hat man Unabhängigkeit einer Familie von Sub-σ-Algebren $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – der Nachweis kann mittels 4.17 ii) sehr einfach sein – so sind als Konsequenz beliebige $\mathcal{A}_i$-meßbare Größen ξ_i – egal wie kompliziert sie sein mögen und in welchen meßbaren Räumen sie ihre Werte annehmen – automatisch unabhängig. Die vorläufige Definition aus 4.14' für reellwertige Zufallsvariable findet man dabei in der Aussage $(*)$ des Satzes 4.18 verallgemeinert wieder.

4.18 Satz: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine beliebige Indexmenge, seien $(E_i, \mathcal{E}_i)$ meßbare Räume, $i \in I$. Nenne meßbare Abbildungen (Zufallsvariable)

$$X_i \;:\; (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (E_i, \mathcal{E}_i)\,, \quad i \in I$$

unabhängig unter P falls die von ihnen erzeugten Sub-σ-Algebren von $\mathcal{A}$

$$\sigma(X_i) \;=\; X_i^{-1}(\mathcal{E}_i) \;=\; \{\, \{X_i \in B\} : B \in \mathcal{E}_i \,\}\,, \quad i \in I$$

unabhängig unter P sind. Dann ist Unabhängigkeit der $(X_i)_{i\in I}$ unter P gleichbedeutend mit

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{für jede endliche Teilmenge } J = \{j_1, \ldots, j_\ell\} \text{ von } I \text{ gilt:} \\ \mathcal{L}((X_{i_1}, \ldots, X_{i_\ell})|P) \;=\; \bigotimes_{r=1}^{\ell} \mathcal{L}(X_{i_r}|P) \quad \text{auf} \quad (\mathop{\times}_{r=1}^{\ell} E_{i_r}, \bigotimes_{r=1}^{\ell} \mathcal{E}_{i_r})\,. \end{array} \right.$$

Beweis: Sei zuerst $J = \{j_1, \ldots, j_\ell\} \subset I$ beliebig aber fest. Betrachte Rechtecke $R = \bigtimes_{i=1}^{\ell} F_{i_r}$, $F_{i_r} \in \mathcal{E}_{i_r}$. Nach Definition des Bildmaßes gilt dann

$$\mathcal{L}((X_{i_1}, \ldots, X_{i_\ell})|P)\left(\bigtimes_{i=1}^{\ell} F_{i_r}\right) \;=\; P(X_{i_r} \in F_{i_r},\; 1 \le r \le \ell) \;=\; P\left(\bigcap_{r=1}^{\ell}\{X_{i_r} \in F_{i_r}\}\right)\;;$$

nach Definition endlicher Produktmaße in 4.3 gilt

$$\left(\bigotimes_{r=1}^{\ell}\mathcal{L}(X_{i_r}|P)\right)\left(\bigtimes_{i=1}^{\ell} F_{i_r}\right) \;=\; \prod_{r=1}^{\ell} P(X_{i_r} \in F_{i_r})\,.$$

Nach Eindeutigkeitssatz 1.13, für das hier betrachtete J und für die Klasse $\mathcal{S}_J$ aller Rechtecke in $(\bigtimes_{r=1}^{\ell} E_{i_r}, \bigotimes_{r=1}^{\ell}\mathcal{E}_{i_r})$, ist die Gleichung $(*)$ in der Formulierung des Satzes äquivalent zu

$$P\left(\bigcap_{r=1}^{\ell}\{X_{i_r} \in F_{i_r}\}\right) \;=\; \prod_{r=1}^{\ell} P(\{X_{i_r} \in F_{i_r}\})\,, \quad F_{i_r} \in \mathcal{E}_{i_r} \;\text{ beliebig}\,, \quad 1 \le r \le \ell$$

und damit nach 4.15 äquivalent zur Unabhängigkeit der Sub-σ-Algebren

$$\sigma(X_{i_r}) \;=\; (X_{i_r})^{-1}(\mathcal{E}_{i_r}) \;=\; \{\,\{X_{i_r} \in F\} : F \in \mathcal{E}_{i_r}\,\}\,, \quad 1 \le r \le \ell\,.$$

Variiert nun J über die Klasse $\mathcal{H}(I)$ aller endlichen Teilmengen von I, so ist dies gemäß 4.15 die Unabhängigkeit der Familie von Sub-σ-Algebren $\mathcal{C}_i := \sigma(X_i)$, $i \in I$. $\square$

Unabhängigkeit impliziert eine Reihe wichtiger Produktformeln.

4.19 Satz: Betrachte auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unabhängige Zufallsvariable X_i mit Werten in meßbaren Räumen $(E_i, \mathcal{E}_i)$, $1 \le i \le n$. Seien f_i meßbare numerische Funktionen auf $(E_i, \mathcal{E}_i)$, $1 \le i \le n$. Sind die f_i nichtnegativ, $1 \le i \le n$, oder sind $f_i(X_i)$ in $L^1(P)$, $1 \le i \le n$, so ist auch $\prod_{i=1}^n f_i(X_i)$ nichtnegativ bzw. in $L^1(P)$, und es gilt

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right) \;=\; \prod_{i=1}^{n} E(f_i(X_i))\,.$$

Beweis: Für nichtnegative f_i, $1 \le i \le n$, hat man nach 4.18 und Fubini

$$\begin{aligned}
E\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right) &= \int_\Omega \prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\,dP \;=\; \int_{\left(\bigtimes_{i=1}^{n} E_i\right)} \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)\;\left(\mathcal{L}((X_1, \ldots, X_n)|P)\right)(dx_1, ..., dx_n) \\
&= \int_{\left(\bigtimes_{i=1}^{n} E_i\right)} \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)\;\left(\bigotimes_{i=1}^{n}\mathcal{L}(X_i|P)\right)(dx_1, ..., dx_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \int_{E_i} f_i(x_i)\,\mathcal{L}(X_i|P)(dx_i) \;=\; \prod_{i=1}^{n} E(f_i(X_i))\,.
\end{aligned}$$

Für $f_i \in L^1(P)$ betrachtet man zuerst $|f_i|$, $1 \leq i \leq n$, für die das eben gegebene Argument zeigt: $\prod_{i=1}^n f_i(X_i) \in L^1(P)$. Danach darf man Fubini auf $(x_1, ..., x_n) \to \prod\limits_{i=1}^n f_i(x_i)$ anwenden. $\square$

4.20 Satz: Betrachte auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unabhängige Zufallsvariable X_i mit Werten in $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$, sei μ ein σ-endliches Maß auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$, seien $\mathcal{L}(X_i|P)$ μ-absolutstetig mit Dichte g_i, $1 \leq i \leq n$. Dann ist

$$\mathcal{L}\left((X_1, \ldots X_n)|P\right) \quad \text{auf} \quad (I\!R^n, \mathcal{B}(I\!R^n))$$

absolutstetig bezüglich des Produktmaßes $\bigotimes\limits_{r=1}^n \mu$ auf $(I\!R^n, \mathcal{B}(I\!R^n))$, mit Dichte

$$g(y_1, \ldots, y_n) \;=\; \prod_{i=1}^n g_i(y_i)\;, \quad (y_1, ..., y_n) \in I\!R^n\;.$$

Beweis: Nach Radon-Nikodym 3.5 sind g_i als Dichten $\mathcal{B}(I\!R)$–meßbare Funktionen $I\!R \to [0, \infty)$.
1) Betrachte zuerst Rechtecke $R = \bigtimes\limits_{i=1}^n A_i$ in $(I\!R^n, \mathcal{B}(I\!R^n))$ und zeige

$$(+) \qquad \mathcal{L}(X_1, \ldots X_n)|P)\left(\bigtimes_{i=1}^n A_i\right) \;=\; \int_{\left(\bigtimes_{i=1}^n A_i\right)} \prod_{i=1}^n g_i(y_i) \left(\bigotimes_{r=1}^n \mu\right)(dy_1, ..., dy_n)\;.$$

Setze dazu $f_i := 1_{A_i}$, $1 \leq i \leq n$. Die linke Seite von (+) schreibt sich dann als

$$E\left(\prod_{i=1}^n f_i(X_i)\right)\;.$$

Weil $\mathcal{L}(X_i|P)$ die μ-Dichte g_i besitzt, wird die rechte Seite von (+) mit Fubini zu

$$\prod_{i=1}^n \int 1_{A_i}(y_i)\, g_i(y_i)\, \mu(dy_i) \;=\; \prod_{i=1}^n E(f_i(X_i))\;.$$

Nach Produktformel 4.19 ist damit (+) bereits bewiesen.
2) Nach (+) stimmen die beiden Maße

$$(++) \qquad \mathcal{L}(X_1, \ldots X_n)|P) \quad \text{und} \quad A \longrightarrow \int_A \prod_{i=1}^n g_i(y_i) \left(\bigotimes_{r=1}^n \mu\right)(dx_1, ..., dx_n)\;,\; A \in \mathcal{B}(I\!R^n)$$

auf einem Erzeuger von $\mathcal{B}(I\!R^n)$ überein, der die Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes 1.13 erfüllt. Damit stimmen sie auf ganz $\mathcal{B}(I\!R^n)$ überein. Die Gleichheit (++) kombiniert mit Radon-Nikodym 3.5 liefert nun die Behauptung des Satzes. $\square$

Denselben Satz kann man nach rein notationellen Änderungen im Beweis allgemeiner so fassen:

4.20' Satz: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Zufallsvariable X_i mit Werten in meßbaren Räumen $(E_i, \mathcal{E}_i)$, $1 \le i \le n$, sei μ_i ein σ-endliches Maß auf $(E_i, \mathcal{E}_i)$ und

$$g_i \;:\; E_i \longrightarrow [0,\infty) \quad \mathcal{E}_i\text{–meßbar mit } \int_{E_i} g_i \, d\mu_i \;=\; 1 \; .$$

Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

i) die $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig unter P, und $\mathcal{L}(X_i|P) \ll \mu_i$ mit Dichte g_i, $1 \le i \le n$;

ii) es gilt

$$\begin{cases} \mathcal{L}(X_1, \ldots X_n)|P) \;\ll\; \bigotimes_{i=1}^n \mu_i \quad \text{auf} \quad (\mathop{\times}_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{E}_i) \;, \text{ mit Dichte} \\ g(y_1, \ldots, y_n) \;=\; \prod_{i=1}^n g_i(y_i) \;, \quad (y_1, ..., y_n) \in \mathop{\times}_{i=1}^n E_i \; . \end{cases}$$

Wir illustrieren die Produktformel 4.19 durch ein wohlbekanntes Beispiel:

4.21 Beispiel: Für unabhängige Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ in $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt

$$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) \;=\; \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) \;:$$

per Definition der Varianz (etwa in einer 'Einführung in die Stochastik') hat man

$$\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) \;=\; E\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i - E(\sum_{i=1}^n X_i)\right)^2\right) \;=\; E\left(\left(\sum_{i=1}^n (X_i - m_i)\right)^2\right)$$

mit $m_i := EX_i$, wobei die Produktformel 4.19 alle Nichtdiagonalelemente verschwinden läßt:

$$= \; \sum_{i=1}^n E([X_i - m_i]^2) + \sum_{i \ne j} \underbrace{E([X_i - m_i][X_j - m_j])}_{=0} \;=\; \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) \; . \qquad \square$$

D. Laplacetransformierte und Faltungsformeln

Das letzte Teilkapitel bringt eine kurze Zusammenfassung einiger wichtiger Tatsachen über Laplace-Transformierte, Summen unabhängiger Zufallsvariablen und Faltungsformeln.

4.22 Exkurs (Laplace-Transformierte): a) Sei μ ein σ-endliches Maß auf $(I\!\!R^d, \mathcal{B}(I\!\!R^d))$ mit

$$D_\mu \;:=\; \{\lambda \in I\!\!R^d \;:\; \int e^{-\lambda^\top x}\, \mu(dx) < +\infty\,\} \;\neq\; \emptyset\,.$$

D_μ ist notwendig konvex: sind λ_1, λ_2 in D_μ, so auch $\beta\lambda_1{+}(1{-}\beta)\lambda_2$ für alle $0 < \beta < 1$ wegen

$$\int e^{-(\beta\lambda_1)^\top x}\, e^{-((1-\beta)\lambda_2)^\top x}\, \mu(dx) \;\leq\; \Big(\int e^{-\lambda_1^\top x}\mu(dx)\Big)^\beta \Big(\int e^{-\lambda_2^\top x}\mu(dx)\Big)^{1-\beta}$$

nach Hölder 2.14 (mit $p = \frac{1}{\beta}$, $q = \frac{1}{1-\beta}$). *Laplace-Transformierte von* μ heißt dann die Funktion

$$\varphi_\mu \;:\quad D_\mu \;\ni\; \lambda \;\longrightarrow\; \int_{I\!\!R^d} e^{-\lambda^\top x}\, \mu(dx) \;\in\; [0, \infty)\,.$$

b) Die Bedeutung von Laplace-Transformierten (LT) liegt im folgenden Eindeutigkeitssatz, den wir ohne Beweis (siehe etwa: R. Barra, 1981, Ch. X.1) erwähnen:

Satz: Besitzt $D_\mu \subset I\!\!R^d$ innere Punkte, so ist das σ-endliche Maß μ eindeutig bestimmt durch die Werte seiner Laplace-Transformierten φ_μ auf einer (beliebig kleinen) offenen Kugel $U \subset I\!\!R^d$.

c) Ist X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $(I\!\!R^d, \mathcal{B}(I\!\!R^d))$ und Verteilung $\mu := \mathcal{L}(X|P)$, so schreibt man auch

$$\varphi_X(\lambda) \;:=\; \varphi_\mu(\lambda) \;=\; E(e^{-\lambda^\top X})\;, \quad \lambda \in D := D_\mu$$

und spricht von der Laplace-Transformierten von X unter P.

d) Wir erwähnen zwei wichtige Eigenschaften und geben erste Beispiele.

i) Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $(I\!\!R^d, \mathcal{B}(I\!\!R^d))$, deren Komponenten $\xi_1, ..., \xi_d$ unabhängig sind. Dann gilt

$$\varphi_X(\lambda) \;=\; \prod_{i=1}^d \varphi_{\xi_i}(\lambda_i)\;, \quad X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_d \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix} \;\in\; D := \bigtimes_{i=1}^d D_{\xi_i}$$

mit $D_{\xi_i} = \{\lambda_i \in I\!\!R : E(e^{-\lambda_i \xi_i}) < \infty\}$, als Anwendung der Produktformel 4.19:

$$E\Big(e^{-\lambda^\top X}\Big) \;=\; E\Big(\prod_{i=1}^d e^{-\lambda_i\xi_i}\Big) \;=\; \prod_{i=1}^d E\Big(e^{-\lambda_i\xi_i}\Big) \;=\; \prod_{i=1}^d \varphi_{\xi_i}(\lambda_i)\,.$$

ii) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $(I\!\!R^d, \mathcal{B}(I\!\!R^d))$. Die Laplace-Transformierte von X_i sei definiert auf $D_i \subset I\!\!R^d$, und es gelte $\bigcap\limits_{i=1}^n D_i \neq \emptyset$. Dann ist die Laplace-Transformierte der Summe $X_1 + \ldots + X_n$ gegeben durch

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(\lambda) \;=\; \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(\lambda)\;, \quad \lambda \in D := \bigcap_{i=1}^n D_i \subset I\!\!R^d$$

wieder als Anwendung der Produktformel 4.19:

$$E(e^{-\lambda^\top(X_1+\ldots+X_n)}) = E\Big(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda^\top X_i}\Big) = \prod_{i=1}^n E\Big(e^{-\lambda^\top X_i}\Big) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(\lambda)\,.$$

iii) Für auf $I\!R^+$ konzentrierte Wahrscheinlichkeitsmaße existiert die Laplace-Transformierte stets auf ganz $I\!R^+$. Man berechnet sofort: die Gamma-Verteilung $\Gamma(a,p)$ $(a>0, p>0)$ mit Dichte

$$x \quad \longrightarrow \quad 1_{(0,\infty)}(x)\frac{p^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-px}$$

besitzt die Laplace-Transformierte

$$\varphi_{\Gamma(a,p)}(\lambda) \;=\; \left(1+\frac{\lambda}{p}\right)^{-a} \quad , \quad \lambda \geq 0\,,$$

die Poisson-Verteilung $\mathcal{P}(\nu)$ mit Parameter $\nu > 0$

$$\mathcal{P}(\nu)(\{k\}) \;=\; e^{-\nu}\,\frac{\nu^k}{k!}\;, \quad k \in I\!N_0\,,$$

besitzt die Laplace-Transformierte

$$\varphi_{\mathcal{P}(\nu)}(\lambda) \;=\; e^{-\nu\,(1-e^{-\lambda})}\;, \quad \lambda \geq 0\,. \qquad \square$$

4.22' Exkurs (Ableitungen und Momente): Betrachte ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ mit Laplacetransformierte $\varphi = \varphi_\nu : D_\nu \to [0,\infty)$. Ist $\lambda \in I\!R^d$ ein innerer Punkt von D_ν, so existieren in λ partielle Ableitungen beliebiger Ordnung

$$D_1^{\alpha_1}\ldots D_d^{\alpha_d}\varphi\,(\lambda) \;=\; (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_d}\int_{I\!R^d}\left(\prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}\right)\,e^{-\lambda^\top x}\;\nu(dx) \quad , \quad \alpha_1,\ldots,\alpha_d \in I\!N_0\,;$$

dies zeigt man mit dominierter Konvergenz. Hieraus folgen zwei wichtige Aussagen:

i) Existiert die Laplacetransformierte auf einer offenen Kugel um $0 \in I\!R^d$ (dies ist eine sehr restriktive Bedingung!), so liefern die partiellen Ableitungen von φ an der Stelle $\lambda = 0$

$$D_1^{\alpha_1}\ldots D_d^{\alpha_d}\varphi\,(0) \;=\; (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_d}\int_{I\!R^d}\left(\prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}\right)\;\nu(dx)$$

(bis auf wechselnde Vorzeichen) die Momente der Verteilung ν; insbesondere sind unter der an ν gestellten Bedingung Momente beliebiger Ordnung von ν endlich.

ii) Betrachte $d=1$, sei ν konzentriert auf $[0,\infty)$. Für $\ell \in I\!N$ gilt dann: das Wahrscheinlichkeitsmaß ν besitzt endliche Momente der Ordnung ℓ genau falls $\varphi^{(\ell)}(0^+) = \lim_{\lambda\downarrow 0}\varphi^{(\ell)}(\lambda)$ endlich ist. $\square$

4.23 Exkurs (Multivariate Normalverteilungen): Sei $\mu \in I\!R^d$, sei $\Lambda \in I\!R^{d\times d}$ symmetrisch und nichtnegativ definit. Die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu,\Lambda)$ auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ sei eingeführt durch ihre Laplace-Transformierte

$$(*) \qquad \varphi_{\mathcal{N}(\mu,\Lambda)}(\lambda) \;=\; e^{-\lambda^\top \mu + \frac{1}{2}\lambda^\top \Lambda \lambda}\,, \quad \lambda \in I\!R^d\,.$$

Dazu muß man nachzuweisen, daß eine Verteilung auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ existiert, deren Laplace-Transformierte $(*)$ ist; nach 4.22 gibt es höchstens eine solche Verteilung.

1) Im Fall $d=1$ hat die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ die LT

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(\lambda_1) \;=\; \int e^{-\lambda_1 x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \;=\; \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x+\lambda_1)^2}dx \,\cdot\, e^{+\frac{1}{2}\lambda_1^2} \;=\; e^{+\frac{1}{2}\lambda_1^2}$$

mit Definitionsbereich $D_{\mathcal{N}(0,1)} = I\!R$.

2) Für $d>1$ bezeichne I_d die Einheitsmatrix in $I\!R^{d\times d}$. Die d-dimensionale Standardnormalverteilung

$$\mathcal{N}\,(0, I_d) \;:=\; \mathcal{L}(X) \quad \text{auf } (I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d)), \quad X := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_d \end{pmatrix},\ \xi_i \ \text{iid} \ \sim \mathcal{N}(0,1)$$

besitzt nach 4.22 i) die Laplace-Transformierte

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,I_d)}(\lambda) \;=\; e^{+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \;=\; e^{+\frac{1}{2}\lambda^\top\lambda}\,, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix} \in I\!R^d\,.$$

3) Zu $\Lambda \in I\!R^{d\times d}$ symmetrisch und nichtnegativ definit existiert eine Quadratwurzel A, d.h. ein $A \in I\!R^{d\times d}$, symmetrisch und nichtnegativ definit, mit $A^2 = AA^\top = \Lambda$: man definiert die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu,\Lambda)$ auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ durch

$$\mathcal{N}(\mu,\Lambda) \;:=\; \mathcal{L}(Y) \quad \text{für} \quad Y := AX + \mu\,,\ X \sim \mathcal{N}(0, I_d)\,.$$

Dafür ergibt sich die Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{N}(\mu,\Lambda)}(\lambda) &= E(e^{-\lambda^\top Y}) \;=\; e^{-\lambda^\top\mu}\, E(e^{-(\lambda^\top AX}) \\ &= e^{-\lambda^\top\mu}\, \varphi_{\mathcal{N}(0,I_d)}(A^\top\lambda) \;=\; e^{-\lambda^\top\mu \,+\, \frac{1}{2}\lambda^\top AA^\top\lambda} \\ &= e^{-\lambda^\top\mu \,+\, \frac{1}{2}\lambda^\top\Lambda\,\lambda}\,, \quad \lambda \in I\!R^d \end{aligned}$$

und $(*)$ ist bewiesen.

4) Die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \Lambda)$ besitzt nach 4.22' i) und $(*)$ Momente beliebiger Ordnung, und μ ist der Erwartungswertvektor und Λ die Kovarianzmatrix von $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \Lambda)$:

$$\mu_i = E(Y_i), \;\; \Lambda_{ij} = E((Y_i - \mu_i)(Y_j - \mu_j)) =: \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j), \text{ für } 1 \leq i, j \leq d.$$

5) Ist Λ *strikt* positiv definit, so besitzt $\mathcal{N}(\mu, \Lambda)$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ nach 3.12 die Lebesgue-Dichte

$$x \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \; |\det \Lambda|}} \; e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Lambda^{-1} (x-\mu)}$$

auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Diese Dichte ist strikt positiv, also ist $\mathcal{N}(\mu, \Lambda)$ äquivalent zum Lebesgue-Maß $\lambda\!\!\lambda$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

6) Besitzt dagegen die Kovarianzmatrix Λ den Eigenwert 0, mit Vielfachheit $k \geq 1$, so ist nach Konstruktion in 1) –3) die Verteilung $\mathcal{N}(\mu, \Lambda)$ konzentriert auf einen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^d$ von Dimension $d - k$. Dieser ist eine $\lambda\!\!\lambda$-Nullmenge in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Folglich sind in diesem Fall die Maße $\mathcal{N}(\mu, \Lambda)$ und $\lambda\!\!\lambda$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ zueinander singulär. $\square$

4.24 Satz: Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q_1, Q_2 auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ definiert man die *Faltung von* Q_1 *und* Q_2 (Schreibweise $Q_1 * Q_2$) als

$$Q_1 * Q_2 \; := \; \mathcal{L}(X_1 + X_2 | P)$$

für Zufallsvariable (mit Werten in $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, definiert auf irgendeinem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$)

$$X_1, X_2 \text{ unabhängig unter } P, \; Q_1 = \mathcal{L}(X_1|P) \; , \; Q_2 = \mathcal{L}(X_2|P) \; .$$

a) Für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$Q_1 * Q_2 \, (B) = \int_{\mathbb{R}^d} Q_1(B - y) Q_2(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} Q_2(B - y) Q_1(dy).$$

b) Besitzt Q_1 eine Lebesgue-Dichte q_1 auf $\mathbb{R}^d$, so hat die Faltung $Q_1 * Q_2$ die Lebesgue-Dichte

$$(+) \qquad v \;\longrightarrow\; \int_{\mathbb{R}^d} q_1(v - y) \, Q_2(dy)$$

auf $\mathbb{R}^d$. Besitzt darüberhinaus $q_1(\cdot)$ stetige und beschränkte partielle Ableitungen auf $\mathbb{R}^d$ bis zu einer Ordnung ℓ, so gilt dies auch für die Dichte (+) der Faltung.

c) Spezialfall $d = 1$: sind Q_i diskrete Verteilungen, welche auf $\mathbb{N}_0$ konzentriert sind, so ist $Q_1 * Q_2$ gegeben durch

$$Q_1 * Q_2 \, (\{k\}) = \sum_{0 \leq m \leq k} Q_1(\{k - m\}) Q_2(\{m\}) \; , \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: 1) Zu vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsmaßen Q_i auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ existieren stets unabhängige ZV X_i mit $Q_i = \mathcal{L}(X_i|P)$ auf einem geeigneten Grundraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$: man setzt etwa $\Omega := \mathbb{R}^{2d}$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d})$, $P := Q_1 \bigotimes Q_2$, und wählt X_i als Projektionsabbildungen $\pi_i : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^d$ wie in 4.1' oder wie in 4.14' c).

2) Schreibe A für die Abbildung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to x_1 + x_2$ von $\mathbb{R}^{2d}$ nach $\mathbb{R}^d$. Für jede nichtnegative meßbare numerische Funktion h auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ gilt dann mit 4.18 und 4.9

$$\int_{\mathbb{R}^d} h \, d(Q_1 * Q_2) \;=\; \int_{\mathbb{R}^{2d}} (h \circ A) \, d\,(\mathcal{L}((X_1, X_2)|P)) \;=\; \int_{\mathbb{R}^{2d}} (h \circ A) \, d\,(Q_1 \bigotimes Q_2) \;;$$

mit Schnitten wie in 4.7 schreibt man dies als

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} (h \circ A)_{x_1}(x_2) \, Q_2(dx_2) \right] Q_1(dx_1)$$

oder als

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} (h \circ A)_{x_2}(x_1) \, Q_1(dx_1) \right] Q_2(dx_2) \;.$$

Im Spezialfall $h = 1_B$ mit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ hat man

$$h \circ A(x_1, x_2) = 1_B(x_1 + x_2) \quad , \quad (h \circ A)_{x_i} = 1_{B - x_i} \;,\; i = 1, 2$$

und damit folgt a).

3) Gibt es eine Dichte q_1 von Q_1 bezüglich des Lebesgue-Maßes $\lambda\!\!\lambda$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, so schreibt sich die Gleichungskette in 2) als

$$\begin{aligned} Q_1 * Q_2\,(B) \;&=\; \int_{\mathbb{R}^{2d}} 1_B(x_1 + x_2) \; q_1(x_1) dx_1 \; Q_2(dx_2) \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} q_1(z - x_2) Q_2(dx_2) \right) dz \end{aligned}$$

für beliebiges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, dank der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes (das Bild von $\lambda\!\!\lambda$ unter jeder Verschiebungsabbildung $x_1 \to x_1 + x_2$ ist $\lambda\!\!\lambda$ selbst). Damit ist die Dichte der Faltung auf $\mathbb{R}^d$ bestimmt; der Zusatz folgt danach aus dem Satz von der dominierten Konvergenz.

4) Aussage c) ist die Definition der Faltung für $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable. $\square$

Aus der Gestalt der Laplace-Transformierten in 4.22 d)iii) und 4.23 1) ergeben sich mit 4.22 d)ii) ohne jede Rechnung nützliche

4.25 Faltungsformeln: Es gilt

a) $\mathcal{N}(\mu_1, \Lambda_1) * \mathcal{N}(\mu_2, \Lambda_2) \;=\; \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \Lambda_1 + \Lambda_2)$,

b) $\Gamma(a_1, p) * \Gamma(a_2, p) \;=\; \Gamma(a_1 + a_2, p)$,

c) $\mathcal{P}(\nu_1) * \mathcal{P}(\nu_2) \;=\; \mathcal{P}(\nu_1 + \nu_2)$,

für Parameter $\mu_i \in \mathbb{R}^d$, $a_i, p, \nu_i > 0$, und für Λ_i $d \times d$, symmetrisch und nichtnegativ definit.