Kapitel VII

Charakteristische Funktionen

Reinhard Höpfner

Vorlesungen Stochastik I+II

Wintersemester 2003/2004, Sommersemester 2006 und 2010

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

18.11.03, 27.07.06, 02.07.10

Übersicht zu Kapitel VII :

Charakteristische Funktionen: Definition und erste Eigenschaften 7.1 – 7.3

Gleichmäßige Stetigkeit 7.3'

Produktformel für unabhängige Komponenten 7.4

Transformation unter linearen Abbildungen 7.5

Faltungsformel 7.5'

diskrete Beispiele 7.6

Multivariate Normalverteilungen 7.7

Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen 7.7'–7.8

Straffheit und charakteristische Funktionen 7.9

Stetigkeitssatz von P. Lévy 7.10–7.11

Cramér-Wold Device 7.12

Fourier-Inversion 7.13–7.14

Momente und Differentiation charakteristischer Funktionen 7.15–7.16

Wir starten mit einigen

7.1 Vorbemerkungen: a) Der Raum $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist versehen mit der Metrik

$$d(z,z') := \sqrt{(\mathrm{Re}z - \mathrm{Re}z')^2 + (\mathrm{Im}z - \mathrm{Im}z')^2}\ ;$$

die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ wird erzeugt vom System $\mathcal{S}$ der 'Rechtecke mit Kanten in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$'

$$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z \in A,\ \mathrm{Im}z \in B\}\ , \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ .$$

Also bedeutet Meßbarkeit einer Funktion $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ nichts anderes als Meßbarkeit von $u := \mathrm{Re}f$ und $v := \mathrm{Im}f$ als Funktionen $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
b) Sei μ ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Eine meßbare Funktion $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ heißt μ-integrierbar falls $u := \mathrm{Re}f$ und $v := \mathrm{Im}f$ μ-integrierbare Funktionen $(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sind; man setzt

$$\int f\, d\mu \ :=\ \int u\, d\mu + i \int v\, d\mu\ .$$

Den Raum aller (μ-Äquivalenzklassen von) μ-integrierbaren Funktionen $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ bezeichen wir mit $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$. Wegen der Abschätzungen $\sqrt{u^2+v^2} \le \sqrt{2}\max(|u|,|v|) \le \sqrt{2}(|u|+|v|)$ einerseits und $|f| \ge |u|$, $|f| \ge |v|$ andererseits gilt

$$f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu) \quad\Longleftrightarrow\quad u, v \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu) \quad\Longleftrightarrow\quad |f| = \sqrt{u^2+v^2} = \left(f\overline{f}\right)^{1/2} \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$$

zusammen mit

$$\overline{\int f\, d\mu} \ =\ \int \overline{f}\, d\mu\ .$$

Siehe etwa Bauer (1968, S. 236), oder Rudin (1999, S. 28–30). □

7.1' Hilfssatz: Für $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ gilt die Ungleichung

$$|\int f\, d\mu| \ \le\ \int |f|\, d\mu\ .$$

Beweis: Es genügt, zur komplexen Zahl $\int f\, d\mu$ ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ so zu wählen, daß

$$\alpha \int f\, d\mu \ =\ |\int f\, d\mu|$$

reellwertig und nichtnegativ wird, und dann abzuschätzen

$$\mathrm{Re}\left(\alpha \int f\, d\mu\right) \ =\ \int \mathrm{Re}(\alpha f)\, d\mu \ \le\ \int |\mathrm{Re}(\alpha f)|\, d\mu \ \le\ \int |\alpha f|\, d\mu \ =\ \int |f|\, d\mu\ . \qquad \square$$

7.2 Definition: Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. *Charakteristische Funktion von* Q (oder *Fourier-Transformierte*) heißt die Funktion $\varphi_Q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$

$$\varphi_Q(t) \; := \; \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\,t^\top x}\, Q(dx) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^d \, .$$

Ist $Q = \mathcal{L}(X|P)$ für eine ZV X mit Werten in $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, definiert auf irgendeinem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so spricht man auch von der *charakteristischen Funktion von* X und schreibt φ_X statt φ_Q:

$$\varphi_X(t) \; := \; E_P(e^{i\,t^\top X}) \; = \; \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\,t^\top x}\, Q(dx) \, , \quad t \in \mathbb{R}^d \, .$$

7.3 Hilfssatz: Für beliebiges $m = 1, 2, ...$ und beliebiges $v \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\; e^{i\,v} - 1 - \frac{i\,v}{1\,!} - ... - \frac{(i\,v)^{m-1}}{(m-1)!} \;| \; \leq \; \frac{|v|^m}{m\,!} \, .$$

Beweis: Setze

$$r_1(v) := e^{i\,v} - 1 \, , \quad r_m(v) := e^{i\,v} - 1 - \frac{i\,v}{1\,!} - ... - \frac{(i\,v)^{m-1}}{(m-1)!} \, , \quad m \geq 2 \, .$$

Dann gilt $r_m(0) = 0$ für $m \geq 1$, und für $\underline{v} < \overline{v} \in \mathbb{R}$ hat man

$$r_1(\overline{v}) - r_1(\underline{v}) = i \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} e^{i\,u}\, du \, , \quad r_m(\overline{v}) - r_m(\underline{v}) = i \int_{\underline{v}}^{\overline{v}} r_{m-1}(u)\, du \, , \; m \geq 2 \, .$$

Für $\underline{v} = 0$, $\overline{v} = v$ sieht man $|r_1(v)| \leq v$, und sukzessives Integrieren zeigt die Behauptung. Für $\underline{v} = v$, $\overline{v} = 0$ arbeitet man mit wechselnden Vorzeichen analog. $\square$

7.3' Satz: Stets hat die charakteristische Funktion φ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes Q auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ die Eigenschaften

$$\varphi(0) = 1, \;\; |\varphi(t)| \leq 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}^d, \;\; \varphi(\cdot) \text{ ist gleichmäßig stetig auf } \mathbb{R}^d.$$

Beweis: Die ersten beiden Behauptungen sind offensichtlich, wir zeigen die dritte. Wähle gemäß 6.1' oder der Bemerkung vor 6.14 zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein $K = K(\varepsilon) < \infty$ mit

$$Q\left((\mathop{\times}_{j=1}^{d} [-K, +K])^c \right) \; < \; \frac{1}{4}\, \varepsilon \, .$$

Betrachte dann Punkte $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^d$ mit Abstand $|t_1 - t_2| < \frac{1}{2\,K\,\sqrt{d}}\, \varepsilon$; für diese gilt nach a)

$$\begin{aligned}
|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \; & \leq \; \int |e^{i\,(t_1-t_2)^\top x} - 1|\, Q(dx) \\
& \leq \; 2 \cdot Q\left((\mathop{\times}_{j=1}^{d} [-K, +K])^c \right) + \int_{\mathbb{R}^d} 1_{(\mathop{\times}_{j=1}^{d} [-K,+K])}(x)\, |\underbrace{e^{i\,(t_1-t_2)^\top x} - 1}_{\leq |t_1-t_2||x|}|\, Q(dx) \\
& \leq \; \frac{\varepsilon}{2} + |t_1 - t_2| K \sqrt{d} \quad < \; \varepsilon \, .
\end{aligned}$$

Also ist φ gleichmäßig stetig auf $I\!R^d$. $\square$

7.4 Satz: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unabhängige Zufallsvariable $Y_1, ..., Y_n$ mit Werten in $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$, mit Verteilungen $Q_j := \mathcal{L}(Y_j|P)$ und charakteristischen Funktionen $\varphi_j : I\!R \to \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$. Dann hat das Produktmaß $Q := \bigotimes_{j=1}^{n} Q_j = \mathcal{L}((Y_1, ..., Y_n)|P)$ auf $(I\!R^n, \mathcal{B}(I\!R^n))$ die charakteristische Funktion

$$\varphi_Q((t_1, ..., t_n)) \;=\; \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j) \,, \quad (t_1, ..., t_n) \in I\!R^n \,.$$

Beweis: Für $Y := (Y_1, ..., Y_n)$ und für $t = (t_1, ..., t_n) \in I\!R^n$ folgt dies wegen Unabhängigkeit der $Y_1, ..., Y_n$ sofort aus der Produktformel 4.19

$$\varphi_Q(t) \;=\; E\left(e^{i\,t^\top Y}\right) \;=\; E\left(\prod_{j=1}^{d} e^{i\,t_j Y_j}\right) \;=\; \prod_{j=1}^{d} E\left(e^{i\,t_j Y_j}\right) \;=\; \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j) \,. \qquad \square$$

7.5 Hilfssatz: Betrachte Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$. Dann gilt für $A \in I\!R^{m \times d}$ und $b \in I\!R^m$

$$\varphi_{AX+b}(t) \;=\; e^{i\,b^\top t}\,\varphi_X(A^\top t) \quad , \quad t \in I\!R^m \,.$$

Insbesondere hat man

$$\varphi_{-X}(t) \;=\; \varphi_X(-t) \,, \quad t \in I\!R^d \,;$$

im Symmetriefall $\mathcal{L}(X|P) = \mathcal{L}(-X|P)$ ist die charakteristische Funktion φ_X reellwertig.

Beweis: Die Transformationseigenschaft unter linearen Abbildungen folgt sofort aus

$$t^\top(AX + b) \;=\; (A^\top t)^\top X + t^\top b \,, \quad t \in I\!R^m \,.$$

Insbesondere hat man stets

$$\varphi_{-X}(t) \;=\; \varphi_X(-t) \;=\; E(\cos(-t^\top X)) + i\,E(\sin(-t^\top X)) \;=\; \overline{\varphi_X(t)} \,.$$

Ist nun ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $I\!R^d$ zugleich Verteilung von X und von $-X$ unter P, zeigt die letzte Zeile $\varphi_Q = \overline{\varphi_Q}$: damit ist die Funktion φ_Q reellwertig. $\square$

7.5' Satz: Für die Faltung $Q_1 * Q_2$ zweier Wahrscheinlichkeitsmaße Q_1, Q_2 auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ gilt

$$\varphi_{Q_1 * Q_2}(t) \;=\; \varphi_{Q_1}(t) \cdot \varphi_{Q_2}(t) \;, \quad t \in \mathbb{R}^d \;.$$

Beweis: Für $j = 1, 2$ unterlege Q_j mit unabhängigen Zufallsvariablen X_j, definiert auf einem geeigneten Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und mit Werten in $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, so daß $Q_j := \mathcal{L}(X_j|P)$. Nach Definition der Faltung $Q_1 * Q_2 = \mathcal{L}(X_1 + X_2|P)$, und die Produktformel 4.19 liefert

$$\varphi_{Q_1 * Q_2}(t) \;=\; E(e^{i\,t^\top (X_1 + X_2)}) = E\left(e^{i\,t^\top X_1}\, e^{i\,t^\top X_2}\right) = E(e^{i\,t^\top X_1}) E(e^{i\,t^\top X_2}) \;=\; \varphi_{Q_1}(t) \cdot \varphi_{Q_2}(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}^d$. □

7.6 Beispiele: Diskrete Verteilungen der Form

$$Q := \sum_{k=0}^{\infty} p_k \epsilon_{x_k} \;, \quad (x_k)_k \subset \mathbb{R}^d \;,\; p_k \geq 0 \;,\; \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

haben charakteristische Funktionen der Form

$$\varphi_Q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{i t^T x_k} \;, \quad t \in \mathbb{R}^d$$

Speziell erhält man im Fall $d = 1$ für $t \in \mathbb{R}$ etwa

Binomialverteilung	$Q = \mathcal{B}(n, p)$	:	$\varphi_{\mathcal{B}(n,p)}(t)$	$=$	$\left((1-p) + p e^{it}\right)^n$
Poissonverteilung	$Q = \mathcal{P}(\lambda)$	:	$\varphi_{\mathcal{P}(\lambda)}(t)$	$=$	$e^{\lambda(e^{it} - 1)}$
Neg.-Binomialverteilung	$Q = \mathcal{B}^-(\ell, p)$	:	$\varphi_{\mathcal{B}^-(\ell,p)}(t)$	$=$	$\left(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}}\right)^\ell$

wie man leicht nachrechnet (für $\mathcal{B}^-(\ell, p)$ siehe z.B. Feller I, 1968, S. 165+269). □

7.7 Beispiel (Multivariate Normalverteilungen): Sei $\mu \in \mathbb{R}^d$, sei $\Lambda \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch und nichtnegativ definit. Die charakteristische Funktion der d-dimensionalen Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \Lambda)$ ist gegeben durch

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mu,\Lambda)}(t) \;=\; e^{i\,t^\top \mu - \frac{1}{2} t^\top \Lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Wir zeigen dies in mehreren Schritten.

1) Betrachte zuerst in Dimension $d = 1$ die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ und zeige:

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) \;=\; e^{-\frac{1}{2} t^2} \;, \quad t \in \mathbb{R} \;.$$

Zunächst gilt für jedes feste $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{+N} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{+N} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\, dx.
\end{aligned}$$

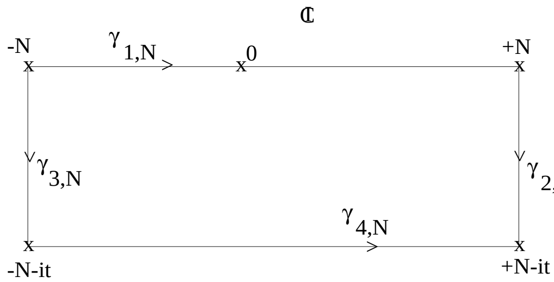
Zu zeigen ist also

$$(*) \qquad \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{+N} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} dx = \sqrt{2\pi}\ .$$

Die Funktion

$$\mathbb{C} \ni z \quad \longrightarrow \quad e^{-\frac{1}{2}z^2} \in \mathbb{C}$$

ist analytisch in $\mathbb{C}$, und man zeigt $(*)$ mit komplexer Integration (siehe z.B. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis (1960), Kap. IX.6). Betrachte die folgenden Wege in $\mathbb{C}$:



Man durchläuft mit konstanter Geschwindigkeit $\gamma_{1,N} \vee \gamma_{2,N}$ und $\gamma_{3,N} \vee \gamma_{4,N}$; diese beiden Wege sind zueinander homotop, also gilt :

$$\int_{\gamma_{1,N}\vee\gamma_{2,N}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{\gamma_{3,N}\vee\gamma_{4,N}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Berechne die Integrale über die Wege $\gamma_{j,N}$, $1 \le j \le 3$. Für $j = 1$ hat man

$$\int_{\gamma_{1,N}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-N}^{+N} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}\ .$$

Für $j = 2$ mit $\gamma_{2,N}(s) := N - is$, $0 \le s \le t$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\gamma_{2,N}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz\Big| &= \Big|\int_0^t e^{-\frac{1}{2}(\gamma_{2,N}(s))^2} \gamma_{2,N}'(s)\, ds\Big| \\
&\le \int_0^t \big|e^{-\frac{1}{2}(\gamma_{2,N}(s))^2} \gamma_{2,N}'(s)\big|\, ds \\
&= \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(N^2-s^2)}\, ds \quad = \quad \mathrm{cst}(t) \cdot e^{-\frac{1}{2}N^2} \quad \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ ;
\end{aligned}$$

dasselbe gilt für $j=3$. Zusammen erhält man wegen $(*)$

$$\int_{-N}^{+N} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} dx = \int_{\gamma_{4,N}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{\gamma_{1,N}} \ldots + \int_{\gamma_{2,N}} \ldots - \int_{\gamma_{3,N}} \ldots \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi} \,,$$

was zu zeigen war.

2) Als nächstes definiert man die d-dimensionale Standardnormalverteilung als Produktmaß

$$\mathcal{N}(0_d, I_d) \;:=\; \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{auf } (I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$$

und hat nach Hilfssatz 7.4 sofort

$$\varphi_{\mathcal{N}(0_d,I_d)}(t_1,...,t_d) \;=\; \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t_j) \;=\; e^{-\frac{1}{2}t^\top t} \,, \quad t = t_1,...,t_d \in I\!R^d \,.$$

3) Zu $\Lambda \in I\!R^{d\times d}$ symmetrisch und nichtnegativ definit gibt es ein $\Lambda^{1/2} \in I\!R^{d\times d}$ symmetrisch und nichtnegativ definit mit der Eigenschaft $\Lambda = \Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}$.

Man definiert die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu,\Lambda)$, $\mu \in I\!R^d$, als Bild der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0_d, I_d)$ unter der Abbildung $t \to \mu + \Lambda^{1/2}t$. Nach 7.5 hat $\mathcal{N}(\mu,\Lambda)$ die charakteristische Funktion

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mu,\Lambda)}(t) \;=\; e^{i\,t^\top\mu}\, \varphi_{\mathcal{N}(0_d,I_d)}(\Lambda^{1/2}t) \;=\; e^{i\,t^\top\mu - \frac{1}{2}t^\top\Lambda t} \,, \quad t \in I\!R^d \,. \qquad \square$$

7.7' Hilfssatz: Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ gilt

$$\mathcal{N}(0, \varepsilon^2 I_d) * Q \quad \stackrel{w}{\longrightarrow} \quad Q \quad \text{für } \varepsilon \downarrow 0 \,.$$

Beweis: Für beliebige Funktionen $g \in \mathcal{C}_b(I\!R^d)$ ist nachzuweisen

$$\int g(y)\,\left(\mathcal{N}(0,\varepsilon^2 I_d) * Q\right)(dy) \;\longrightarrow\; \int g(y)\, Q(dy) \,, \quad \varepsilon \to 0 \,.$$

Schreibe

$$g_\varepsilon(y) \;:=\; \int g(t)\, \mathcal{N}(y, \varepsilon^2\, I_d)(dt) \,, \quad y \in I\!R^d \,.$$

Wir interpretieren $g_\varepsilon(\cdot)$ als Glättung von $g : I\!R^d \longrightarrow I\!R$ durch 'Darüberziehen' eines Kerns

$$(2\pi\varepsilon^2)^{-\frac{d}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-\cdot)^\top(t-\cdot)}{\varepsilon^2}}\, dt$$

mit Zentrum '$\cdot$' und typischer Bandbreite $\varepsilon > 0$. Da $g(\cdot)$ beschränkt, etwa $|g| \le C$, gilt auch $|g_\varepsilon| \le C$ für alle $\varepsilon > 0$; da g stetig, gilt punktweise Konvergenz $g_\varepsilon \to g$ für $\varepsilon \downarrow 0$ auf $I\!R^d$. Dominierte Konvergenz zeigt also

$$\int g_\varepsilon(y)\, Q(dy) \;\longrightarrow\; \int g(y)\, Q(dy) \quad \text{für } \varepsilon \downarrow 0 \,.$$

Die linke Seite kann aber umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned}
\int g_\varepsilon(z)\, Q(dz) &= (2\pi\varepsilon^2)^{-\frac{d}{2}} \int \left[\int g(x)\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-z)^\top (x-z)}{\varepsilon^2}}\, dx \right] Q(dz) \\
&= (2\pi\varepsilon^2)^{-\frac{d}{2}} \int g(x) \left[\int e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-z)^\top (x-z)}{\varepsilon^2}}\, Q(dz) \right] dx \\
&= \int g(x)\, \big(\mathcal{N}(0, \varepsilon^2 I_d) * Q \big)\, (dx)
\end{aligned}$$

nach 4.24 b): damit ist die Behauptung bewiesen. □

Durch Angabe der charakteristischen Funktion ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ eindeutig festgelegt, wie der erste Hauptsatz über charakteristische Funktionen zeigt:

7.8 Eindeutigkeitssatz: Seien Q, Q' Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ mit charakteristischen Funktionen φ_Q, $\varphi_{Q'}$. Dann gilt

$$\varphi_Q(\cdot) = \varphi_{Q'}(\cdot) \text{ auf } I\!R^d \quad \Longrightarrow \quad Q = Q' \,.$$

Bemerkung: Im Unterschied zu dem für Laplace-Transformierte geltenden Eindeutigkeitssatz (siehe 4.22) braucht man wirklich die Übereinstimmung der beiden charakteristischen Funktionen auf dem ganzen Raum; ein hübsches Beispiel dafür, daß Übereinstimmung von charakteristischen Funktionen auch auf großen Kompakta nicht ausreicht, findet man in Feller II (1971), Kap. XV.2a.

Beweis: 1) Vorbemerkung: Betrachte Wahrscheinlichkeitsmaße Q, $\widetilde{Q}$ auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ mit zugehörigen charakteristischen Funktionen φ, $\widetilde{\varphi}$. Für beliebige $y, t \in I\!R^d$ gilt sicher

$$e^{-i\,t^\top y}\, \varphi(t) \;=\; e^{-i\,t^\top y} \int e^{i\,t^\top x}\, Q(dx) \;=\; \int e^{i\,t^\top (x-y)}\, Q(dx)$$

woraus nach Ausintegrieren der Variable t bezüglich $\widetilde{Q}(dt)$ auf beiden Seiten folgt:

$$(+) \qquad \int e^{-i\,t^\top y}\, \varphi(t)\, \widetilde{Q}(dt) \;=\; \int \widetilde{\varphi}(x-y)\, Q(dx)\,, \quad y \in I\!R^d \text{ beliebig.}$$

2) Die Behauptung des Satzes zeigt man nun so. Schreibe kurz $\nu_c(\cdot)$ für die Dichte von $\mathcal{N}(0, cI_d)$, $c > 0$. Wählt man $\widetilde{Q}$ in Schritt 1) als $\mathcal{N}(0, a^2 I_d)$ für ein $a \in (0, \infty)$, so nimmt die rechte Seite von (+) nach 7.7 und nach Schritt 5) in 4.23 die folgende Gestalt an:

$$\int \widetilde{\varphi}(x-y)\, Q(dx) \;=\; \int e^{-\frac{1}{2}\, a^2\, (x-y)^\top (x-y)}\, Q(dx)$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi/a^2)^{\frac{d}{2}} \int (2\pi/a^2)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-x)^\top (y-x)}{1/a^2}} Q(dx) \\
&= (2\pi/a^2)^{\frac{d}{2}} \int \nu_{1/a^2}(y-x)\, Q(dx) \\
&= (2\pi/a^2)^{\frac{d}{2}} \frac{d(\mathcal{N}(0,\frac{1}{a^2}I_d) * Q\,)}{d\lambda\!\!\lambda}(y)
\end{aligned}
$$

mit 4.24 b), und die linke Seite von (+) ist

$$
\int e^{-i\,t^\top y}\, \varphi(t)\, \nu_{a^2}(t)\, dt \;=:\; K_{a,y}(\varphi)
$$

Vergleich der rechten und der linken Seite von (+) zeigt nun, daß die charakteristische Funktion φ mittels der Schar von Abbildungen $\{K_{a,y} : a > 0, y \in I\!R^d\}$ die Familie der Faltungsmaße

$$
\{\mathcal{N}(0, \frac{1}{a^2} I_d) * Q : a > 0\}
$$

in eindeutiger Weise bestimmt. Wenn aber diese Familie von Faltungen eindeutig durch φ bestimmt ist, dann auch ihr Häufungspunkt für $a \to \infty$, wegen schwacher Konvergenz 7.7':

$$
\int g(y) \left(\mathcal{N}(0, \frac{1}{a^2} I_d) * Q \right)(dy) \quad\longrightarrow\quad \int g(y)\, Q(dy)\ , \quad g \in \mathcal{C}_b(I\!R^d)\ .
$$

Damit ist gezeigt, daß die charakteristische Funktion $\varphi(\cdot)$ die Familie der Integrale

$$
\int g(y)\, Q(dy)\ , \quad g \in \mathcal{C}_b(I\!R^d)
$$

eindeutig festlegt. Nach 6.1 b) ist daher Q als Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ eindeutig durch seine charakteristische Funktion $\varphi(\cdot)$ bestimmt. □

Straffheit einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ läßt sich aus dem Verhalten der zugehörigen charakteristischen Funktionen an der Stelle 0 erkennen:

7.9 Satz: Seien Q_n, $n \geq 1$, Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$, seien φ_n, $n \geq 1$, die zugehörigen charakteristischen Funktionen. Gibt es eine offene Umgebung U von $0 \in I\!R^d$ und eine Funktion $g : U \to C\!\!\!\!I$ mit der Eigenschaft

$$
g(\cdot) \text{ ist stetig in } 0, \quad \varphi_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(t) \quad \text{für jedes } t \in U\ ,
$$

so ist die Familie $\{Q_n : n \geq 1\}$ straff in $I\!R^d$: es gilt

$$
(S) \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \text{ existiert ein Kompaktum } C \subset I\!R^d \text{ so daß } \limsup_{n\to\infty} Q_n(C^c) \;<\; \varepsilon\ .
$$

Beweis: Wir setzen o.B.d.A. $U = B_\varepsilon(0)$ für ein $\varepsilon > 0$.

1) Wir zeigen zuerst die Behauptung im Fall $d = 1$. Sei $v \in B_\varepsilon(0)$, dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{-v}^{v} \varphi_n(t)\, dt &= \int_{-v}^{v} dt \int Q_n(dx)\, [\cos(tx) + i\, \sin(tx)] \\ &= \int Q_n(dx)\, [2 \int_0^v dt\, \cos(tx)] \quad = \int Q_n(dx)\, 2\, \frac{\sin(vx)}{x}\ .\end{aligned}$$

Mit den elementaren Abschätzungen $\frac{t - \sin t}{t} \geq 0$ auf ganz $\mathbb{R}$, $\frac{t-\sin t}{t} \geq 1 - \frac{1}{|t|} \geq \frac{1}{2}$ für $|t| > 2$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{v}\int_{-v}^{v} (1 - \varphi_n(t))\, dt &= 2 \int (1 - \frac{\sin vx}{vx}) Q_n(dx) \\ &\geq 2 \int_{\{x:|x|\geq \frac{2}{v}\}} (1 - \frac{1}{|vx|}) Q_n(dv) \quad \geq \quad Q_n(\{x : |x| \geq \frac{2}{v}\})\ .\end{aligned}$$

Mit dominierter Konvergenz bezüglich der Gleichverteilung auf $(-v, +v)$ erhält man für $n \to \infty$

$$\frac{1}{v}\int_{-v}^{v} (1 - \varphi_n(t))\, dt \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{v}\int_{-v}^{v} (1 - g(t))\, dt\ .$$

Aber $g(\cdot)$ ist nach Voraussetzung stetig in 0, es gilt $g(0) = 1$ wegen $\varphi_n(0) = 1$ für alle n, also

$$\frac{1}{v}\int_{-v}^{v} (1 - g(t))\, dt \quad \longrightarrow \quad 0 \quad \text{für } v \to 0.$$

Also gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $v = v(\delta) > 0$ so daß

$$\limsup_{n\to\infty} Q_n\,(\{x : |x| \geq \frac{2}{v}\}) \ < \ \delta\ ;$$

damit ist im Fall $d = 1$ die Straffheitsbedingung (S) erfüllt.

2) Den Fall $d \geq 1$ führen wir zurück auf den eben bewiesenen eindimensionalen Fall. Zu den Funktionen $g, \varphi_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definiere $g^{(j)}, \varphi_n^{(j)} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$g^{(j)} := g(\,(0, ..., 0, \underbrace{t_j}_{j}, 0, ..., 0)\,)\ , \quad \varphi_n^{(j)}(t_j) := \varphi_n(\,(0, ..., 0, \underbrace{t_j}_{j}, 0, ..., 0)\,)\ ,$$

$1 \leq j \leq d$. Mit $X = (X_1, ..., X_d) := \mathrm{id}|_{\mathbb{R}^d}$ und $Q_n^j := \mathcal{L}(X_j|Q_n)$ ist

$$\varphi_n^{(j)}(t_j) \ = \ E_{Q_n}\left(e^{i\, t_j\, X_j}\right)\ , \quad t_j \in \mathbb{R}$$

die charakteristische Funktion zu Q_n^j. Nach Voraussetzung gilt für jedes j punktweise Konvergenz der $\varphi_n^{(j)}$ gegen die an der Stelle 0 stetige Funktion $g^{(j)}$, für $n \to \infty$. Nach Schritt 1) ist also die Folge der Marginalverteilungen $(Q_n^j)_n$ straff in $\mathbb{R}$. Dies gilt für jedes $1 \leq j \leq d$. Nach 6.22 ist damit aber auch die Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(Q_n)_n$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ straff.

Damit ist der Satz bewiesen. □

Der folgende Satz ist der zweite Hauptsatz dieses Kapitels:

7.10 Stetigkeitssatz (P. Lévy): Seine $Q_n, n \geq 1, Q$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$, seien φ_n, $n \geq 1$, φ die zugehörigen charakteristischen Funktionen. Dann sind gleichwertig:

i) es gilt $Q_n \xrightarrow{w} Q$ für $n \to \infty$ (schwache Konvergenz in $I\!R^d$);

ii) für alle $t \in I\!R^d$ gilt $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ für $n \to \infty$.

Beweis: 1) Die Implikation i) $\Longrightarrow$ ii) folgt sofort aus der Definition der schwachen Konvergenz auf $I\!R^d$: sei $t \in I\!R^d$ fest, dann sind die Funktionen $u_t(\cdot)$, $v_t(\cdot)$

$$u_t(x) := \cos(t^\top x) , \quad v_t(x) := \sin(t^\top x) , \quad x \in I\!R^d$$

in $\mathcal{C}_b(I\!R^d)$, folglich gilt für $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \int e^{i\,t^\top x}\, Q_n(dx) = \int u_t(x)\, Q_n(dx) + i \int v_t(x)\, Q_n(dx) \\ &\xrightarrow{i)} \int u_t(x)\, Q(dx) + i \int v_t(x)\, Q(dx) = \int e^{i\,t^\top x}\, Q(dx) = \varphi(t) . \end{aligned}$$

2) Wir zeigen ii) $\Longrightarrow$ i). Als charakteristische Funktion ist φ nach 7.3' gleichmäßig stetig auf $I\!R^d$, insbesondere also stetig an der Stelle 0. Nach 7.9 ist die Folge $(Q_n)_n$ damit straff in $I\!R^d$. Aus einer straffen Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen in $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ können mit dem Helly'schen Auswahlsatz (6.17 und 6.18 b)) schwach konvergente Teilfolgen ausgewählt werden. Betrachte also eine Teilfolge $(n_k)_k$ von $I\!N$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\widetilde{Q}$ auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ so daß gilt

$$(+) \qquad Q_{n_k} \xrightarrow{w} \widetilde{Q} , \quad k \to \infty ,$$

und schreibe $\widetilde{\varphi}$ für die charakteristische Funktion von $\widetilde{Q}$. Entlang der Teilfolge $(n_k)_k$ in (+) gilt nach Schritt 1) punktweise Konvergenz der charakteristischen Funktionen

$$\varphi_{n_k}(t) \longrightarrow \widetilde{\varphi}(t) = \int e^{i\,t^\top x}\, \widetilde{Q}(dx) , \quad k \to \infty , \quad t \in I\!R^d ,$$

und ein Vergleich mit Voraussetzung ii) erzwingt

$$(++) \qquad \widetilde{\varphi}(\cdot) = \varphi(\cdot) \quad \text{auf } I\!R^d.$$

(+) und (++) kombiniert mit dem Eindeutigkeitssatz 7.8 zeigen also, daß es für die gesamte Folge $(Q_n)_n$ *genau einen Häufungspunkt* im Sinne der schwachen Konvergenz auf $\mathbb{R}^d$ gibt; damit ist bewiesen

$$Q_n \quad \xrightarrow{w} \quad Q \ , \quad n \to \infty \ . \qquad \square$$

Oft formuliert man den Stetigkeitssatz auch in der folgenden Variante, die durch den eben gegebenen Beweis bereits nachgewiesen ist:

7.11 Satz: Sei $(Q_n)_n$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, seien $(\varphi_n)_n$ die zugehörigen charakteristischen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

i) es existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ so daß $Q_n \xrightarrow{w} Q$ für $n \to \infty$;

ii) es gibt eine in 0 stetige Funktion $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ so daß

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) \ = \ g(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}^d \ .$$

Gilt i) oder ii), so ist $g(\cdot)$ in ii) notwendig eine charakteristische Funktion, nämlich die zu Q aus i).

An den Stetigkeitssatz schließt sich eine so einfache wie wichtige Beobachtung an, die oft als 'Werkzeug, Kunstgriff, Trick' (device) von Cramér und Wold bezeichnet wird.

7.12 Cramér-Wold Device: Betrachte Zufallsvariable X_n auf $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$, $n \geq 1$, und X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alle mit Werten in $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $n \geq 1$.
a) Schwache Konvergenz in $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{L}(X_n|P_n) \ \xrightarrow{w} \ \mathcal{L}(X|P) \ , \quad n \to \infty$$

ist gleichwertig mit der folgenden Schar schwacher Konvergenzen in $\mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\, t^\top X_n \,|P_n) \ \xrightarrow{w} \ \mathcal{L}(\, t^\top X \,|P) \ , \quad n \to \infty \ , \qquad \text{für } \textit{jedes} \text{ feste } t \in \mathbb{R}^d$$

und ebenso gleichwertig mit schwacher Konvergenz beliebiger Projektionen der $\{X_n \, , \, n \geq 1 \, , \, X\}$ auf feste Richtungen u in $\mathbb{R}^d$, $|u| = 1$.
b) Insbesondere ist schwache Konvergenz in $\mathbb{R}^d$ gegen eine d-dimensionale Normalverteilung

$$\mathcal{L}(X_n|P_n) \ \xrightarrow{w} \ \mathcal{N}\,(\mu \, , \, \Lambda) \ , \quad n \to \infty$$

gleichwertig mit der folgenden Schar schwacher Konvergenzen in $I\!R$:

$$\mathcal{L}(\,t^\top X_n\,|P_n) \;\xrightarrow{w}\; \mathcal{N}\left(\,t^\top\mu\,,\,t^\top\Lambda\,t\,\right)\;,\quad n\to\infty\;,\qquad \text{für } \textit{jedes} \text{ feste } t\in I\!R^d\;.$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition einer charakterischen Funktion und aus dem Stetigkeitssatz 7.10, wegen

$$E\left(e^{t^\top X_n}\right) \;=\; E\left(e^{\lambda(u^\top X_n)}\right)\;,\quad u:=\frac{t}{|t|}\;,\;\lambda:=|t|\;. \qquad \square$$

Wir schließen das Kapitel ab mit einigen zusätzlichen Bemerkungen.

7.13 Satz (Fourier-Umkehrformel): Sei φ die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes Q auf $(I\!R^d,\mathcal{B}(I\!R^d))$, bezeichne $\lambda\!\!\lambda$ das Lebesguemaß auf $(I\!R^d,\mathcal{B}(I\!R^d))$. Gilt $\varphi\in L^1(\lambda\!\!\lambda)$, so erhält man für Q eine stetige und beschränkte Lebesgue-Dichte aus

$$f_Q(x) \;=\; (2\pi)^{-d}\int_{I\!R^d} e^{-i\,t^\top x}\,\varphi(t)\,dt\;,\quad x\in I\!R^d\;.$$

Beweis: Aus der Betrachtung der rechten und der linken Seite der Formel (+) im Beweis von 7.8 hatte man dort erhalten

$$\int e^{-i\,t^\top y}\,\varphi(t)\;\nu_{a^2}(t)\,dt \;=\; (2\pi/a^2)^{\frac{d}{2}}\;\frac{d\left(\mathcal{N}(0,\frac{1}{a^2}I_d)*Q\,\right)}{d\lambda\!\!\lambda}(y)\;,\quad a\in(0,\infty)\;.$$

Kürzt man auf beiden Seiten zu findende Normierungsfaktoren aus, schreibt sich dies als

$$(\circ)\qquad (2\pi)^{-d}\int e^{-i\,t^\top y}\,\varphi(t)\;e^{-\frac12\,\frac{t^\top t}{a^2}}\;dt \;=\; \frac{d\left(\mathcal{N}(0,\frac{1}{a^2}I_d)*Q\,\right)}{d\lambda\!\!\lambda}(y)\;,\quad a\in(0,\infty)\;.$$

Insbesondere ist die linke Seite von $(\circ)$ als Funktion von y die Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes und damit notwendig reellwertig und nichtnegativ. Mit dominierter Konvergenz dank $\varphi\in L^1(\lambda\!\!\lambda)$ strebt die linke Seite von $(\circ)$ für $a\to\infty$ gegen einen (ebenfalls reellwertigen und nichtnegativen) Limes

$$(2\pi)^{-d}\int_{I\!R^d} e^{-i\,t^\top y}\,\varphi(t)\,dt \;=:\; f_Q(y)\;.$$

Für stetiges $g: I\!R^d\to I\!R$ mit kompaktem Träger kombiniert man 7.7' für $a\to\infty$ mit $(\circ)$ zu

$$\begin{aligned}
\int g(y)\,Q(dy) \;&=\; \lim_{a\to\infty}\int g(y)\left(\mathcal{N}(0,\frac{1}{a^2})*Q\right)(dy)\\
&=\; \lim_{a\to\infty}\int dy\;g(y)\left[(2\pi)^{-d}\int e^{-i\,t^\top y}\,\varphi(t)\;e^{-\frac12\,\frac{t^\top t}{a^2}}\;dt\right]\\
&=\; \int dy\;g(y)\left[(2\pi)^{-d}\int e^{-i\,t^\top y}\,\varphi(t)\,dt\right] \;=\; \int g(y)\,f_Q(y)\,dy
\end{aligned}$$

wobei man zweimal mit dominierter Konvergenz dank $\varphi \in L^1(\lambda\!\!\lambda)$ argumentiert hat. Approximiert man für $m \to \infty$ die konstante Funktion $\widetilde{g} \equiv 1$ monoton aufsteigend durch nichtnegative stetige Funktionen $\widetilde{g}_m$ mit kompaktem Träger, so folgt

$$\int f_Q(y)\, dy \;=\; \lim_{m\to\infty} \int \widetilde{g}_m(y)\, f_Q(y)\, dy \;=\; \lim_{m\to\infty} \int \widetilde{g}_m(y)\, Q(dy) \;=\; 1\,.$$

Damit ist f_Q als $\lambda\!\!\lambda$–Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes identifiziert. Damit erhält man

$$\int g(y)\, Q(dy) \;=\; \int g(y)\, f_Q(y)\, dy$$

für alle $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$: also ist f_Q die $\lambda\!\!\lambda$–Dichte von Q. Beschränktheit und Stetigkeit von f_Q folgen direkt aus derselben Integrabilitätsvoraussetzung. □

7.14 Beispiel: Die Doppelexponentialverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Dichte $f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$ hat die charakteristische Funktion $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$; die Cauchyverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Dichte $\widetilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ hat die charakteristische Funktion $\widetilde{\varphi}(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.
Dies zeigt man mit 7.13, siehe auch Feller II (1971, Ch. XV.2). □

Die Ableitungen einer charakteristischen Funktion an der Stelle 0 liefern die Momente (sofern endliche Momente existieren) der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung:

7.15 Bemerkung: (Differentiation von charakteristischen Funktionen) Betrachte anstelle eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ein endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ (bis auf Multiplikation von μ mit einer geeigneten Normierungskonstante macht dies keinen Unterschied) mit charakteristischer Funktion

$$\varphi(t) \;=\; \int e^{i\,t^\top x}\, \mu(dx)\,, \quad t \in \mathbb{R}^d\,.$$

Nach 7.3 b) gilt $|\varphi(t)| \le \varphi(0) = \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ für alle t, und $\varphi(\cdot)$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^d$.
a) Unter der Momentvoraussetzung

$$(M_1) \qquad \int |x|\, \mu(dx) \;<\; \infty$$

gilt $\varphi \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^d)$, mit partiellen Ableitungen

$$(D_j\varphi)(t) \;=\; i \int e^{i\,t^\top x}\, [x_j \mu(dx)]\,, \quad 1 \le j \le d\,.$$

Dies folgt wegen (M_1) mit dominierter Konvergenz aus 7.3 a), denn

$$\left|\frac{e^{i\,t^\top x} - e^{i\,s^\top x}}{t-s}\right| \;=\; \left|\frac{e^{i\,(t-s)^\top x} - 1}{t-s}\right| \;\le\; |x|\,, \quad s \longrightarrow t\,.$$

Nach Zerlegung der Funktion $x \longrightarrow x_j$ in ihren Positiv- und Negativteil sind

$$\widetilde{\mu}^{j,+}(dx) := x_j^+ \mu(dx) , \quad \widetilde{\mu}^{j,-}(dx) := x_j^- \mu(dx)$$

nach Voraussetzung zwei endliche Maße auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$. Also haben partielle Ableitungen $D_j\varphi$ die Gestalt einer Linearkombination der charakteristischen Funktionen zu den endlichen Maßen $\widetilde{\mu}^{j,+}$ und $\widetilde{\mu}^{j,-}$. Insbesondere sind unter (M_1) die partiellen Ableitungen $D_j\varphi$, $1 \le j \le d$, wieder gleichmäßig stetige Funktionen auf $I\!R^d$, und es gilt

$$D_j\varphi(0) \;=\; i \int x_j \,\mu(dx) , \quad 1 \le j \le d .$$

b) Unter der Momentvoraussetzung

$$(M_n) \qquad \int |x|^n \,\mu(dx) \;<\; \infty$$

gilt $\varphi \in \mathcal{C}^{(n)}(I\!R^d)$, mit partiellen Ableitungen

$$(D^m_{j_1,\dots,j_m}\varphi)(t) \;=\; i^m \int e^{i\,t^\top x}\,[x_{j_1}\dots x_{j_m}\mu(dx)] , \quad t \in I\!R^d , \; m \le n ,$$

und diese sind gleichmäßig stetig auf $I\!R^d$.
Das sieht man durch sukzessives Übertragen des Beweisarguments aus a) auf partielle Ableitungen einer nächsthöheren Ordnung, solange die Momentenvoraussetzung (M_n) Argumente mit dominierter Konvergenz gestattet. □

7.16 Bemerkung: (Taylorentwicklung einer charakteristischen Funktion im Fall $d = 1$) Sei X eine reellwertige ZV mit $E(|X|^n) < \infty$, dann gilt für die charakteristische Funktion $\varphi(\cdot)$ von X

$$\begin{aligned} \varphi(t) \;&=\; 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(i\,t)^j}{j\,!}\,E(X^j) + r_n(t) , \quad t \in I\!R \\ |r_n(t)| \;&\le\; \frac{|t|^n}{n\,!} \cdot \sup_{0\le\eta\le 1} |\,\varphi^{(n)}(\eta t) - \varphi^{(n)}(0)\,| . \end{aligned}$$

Beweis: Wir starten von einer Taylorentwicklung für $\varphi(t) = E\left(e^{i\,t\,X}\right)$

$$\varphi(t) \;=\; 1 \;+\; \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j\,!}\,t^j \;+\; \int_0^t \frac{\varphi^{(n)}(v)}{(n-1)\,!}\,(t-v)^{n-1}\,dv , \quad t \in I\!R$$

(diese schreibt man z.B. zuerst separat für $\mathrm{Re}\,\varphi(x) = E(\cos(tX))$ und $\mathrm{Im}\,\varphi(x) = E(\sin(tX))$ und setzt dann zusammen); mit 7.15 liefert das

$$\varphi(t) \;=\; 1 \;+\; \sum_{j=1}^{n} \frac{(i\,t)^j}{j\,!}\,E(X^j) \;+\; r_n(t)$$

mit

$$r_n(t) \;=\; \int_0^t \frac{(t-v)^{n-1}}{(n-1)\,!}\,\varphi^{(n)}(v)\,dv - \frac{t^n}{n\,!}\,\varphi^{(n)}(0) \;=\; \int_0^t \frac{(t-v)^{n-1}}{(n-1)\,!}\,\Big(\varphi^{(n)}(v) - \varphi^{(n)}(0)\Big)\,dv\;.$$

Daraus folgt die behauptete Abschätzung. □