Kapitel IX

Unendlich teilbare Wahrscheinlichkeitsmaße und symmetrisch stabile Verteilungen, ein Einblick

Reinhard Höpfner

Vorlesung Stochastik II

Wintersemester 2010/11

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

03.01.07, 29.10.10

Übersicht zu Kapitel IX :

Dieses Kapitel stellt einen neuen Typ von Grenzwertsatz vor. Komplementär zum zentralen Grenzwertsatz aus Kapitel VIII geht es um Limesverteilungen vom Typ 'Poissonmischungen'.

9.1 Definition: Bezeichne $\mathcal{M}$ die Klasse aller σ-endlichen Maße auf $(I\!R\backslash\{0\}, \mathcal{B}(I\!R\backslash\{0\}))$ mit

$$(*) \qquad \int_{I\!R\backslash\{0\}} (x^2 \wedge 1)\, \Lambda(dx) \;<\; \infty\;;$$

man sieht leicht, daß Bedingung $(*)$ gleichwertig ist zur Gültigkeit von

$$\Lambda((-\infty,-a]) < \infty\;, \quad \int_{(-a,0)\cup(0,+a)} x^2 \Lambda(dx) < \infty\;, \quad \Lambda([+a,+\infty)) < \infty$$

für beliebiges $a > 0$.

9.2 Beispiel: Sei $0 < \alpha < 2$, seien ξ^+, ξ^- nichtnegative reelle Zahlen mit $\xi^+ + \xi^- > 0$. Definiere ein σ-endliches Maß auf $(I\!R\backslash\{0\}, \mathcal{B}(I\!R\backslash\{0\}))$ durch

$$\Lambda(dx) \;:=\; \begin{cases} \xi^+ \alpha x^{-\alpha-1}\, dx\;, & x \in (0,\infty) \\ \xi^- \alpha |x|^{-\alpha-1}\, dx\;, & x \in (-\infty,0)\;. \end{cases}$$

Dann gilt $\Lambda \in \mathcal{M}$, denn für beliebige Wahl einer Schwelle $a > 0$ gilt wegen $0 < \alpha < 2$:

$$\begin{aligned} \Lambda((-\infty,-a]) &= \xi^- a^{-\alpha} \;<\; \infty\;, \\ \int_{(-a,0)\cup(0,+a)} x^2\, \Lambda(dx) &= (\xi^+ + \xi^-) \int_0^a \alpha\, x^{1-\alpha}\, dx \;=\; \frac{(\xi^+ + \xi^-)\alpha}{2-\alpha}\, a^{2-\alpha} \;<\; \infty\;, \\ \Lambda([+a,\infty)) &= \xi^+ a^{-\alpha} \;<\; \infty\;. \end{aligned}$$

In keinem Fall ist Λ ein endliches Maß auf $(I\!R\backslash\{0\}, \mathcal{B}(I\!R\backslash\{0\}))$, denn beliebig kleine punktierte Umgebungen von 0 tragen Masse $+\infty$ wegen

$$\Lambda(\{x : 0 < |x| < a\}) \;=\; \int_{(-a,0)\cup(0,+a)} \Lambda(dx) \;=\; (\xi^+ + \xi^-) \int_0^a \alpha\, x^{-\alpha-1}\, dx \;=\; \left[-x^{-\alpha}\right]_0^a \;=\; \infty$$

für jede Wahl einer Konstante $a > 0$. Auf solchen Umgebungen gilt weiter

$$(+) \qquad \int_{(-a,0)\cup(0,+a)} |x|\, \Lambda(dx) \;=\; (\xi^+ + \xi^-) \int_0^a \alpha\, x^{-\alpha}\, dx \;<\; \infty \quad\Longleftrightarrow\quad 0 < \alpha < 1\;,$$

während auf Umgebungen von $+\infty$ oder $-\infty$ gilt

$$(++) \qquad \int_{(-\infty,-a)\cup(+a,+\infty)} |x|\, \Lambda(dx) \;=\; (\xi^+ + \xi^-) \int_a^\infty \alpha\, x^{-\alpha}\, dx \;<\; \infty \quad\Longleftrightarrow\quad 1 < \alpha < 2\;,$$

in beiden Fällen unabhängig von der Wahl der Schwelle $a > 0$. $\square$

9.3 Satz: Für jedes $\Lambda \in \mathcal{M}$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q_Λ auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ mit charakteristischer Funktion

$$\varphi_\Lambda(t) \;:=\; \int_{I\!R} e^{ity}\, Q_\Lambda(dy) \;=\; \exp\left(\int_{I\!R\setminus\{0\}} [e^{itx} - 1 - (itx) 1_{\{|x|\le 1\}}]\, \Lambda(dx) \right) \;, \quad t \in I\!R \,.$$

Bevor wir in 9.6 unten diesen Satz beweisen, machen wir deutlich, in welcher Weise Wahrscheinlichkeitsmaße des Typs 9.3 aus 'Poissonmischungen' entstehen. Jedes gewichtete Diracmaß $\Lambda := \lambda\, \epsilon_a$ mit Masse $\lambda > 0$ in einem Punkt $a \neq 0$ gehört zur Klasse $\mathcal{M}$. Im Spezialfall $\Lambda = \lambda\, \epsilon_a$ reduziert sich die Funktion $\varphi_\Lambda(\cdot)$ aus 9.3 auf

$$\varphi_\Lambda(t) \;=\; \exp\left(\lambda\, [e^{ita} - 1 - (ita) 1_{\{|a|\le 1\}}] \right) \;, \quad t \in I\!R \,.$$

Für eine poissonverteilte Zufallsvariable $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ mit Parameter λ gilt aber (vgl. 7.6)

$$\begin{aligned}
N \text{ hat charakteristische Funktion} \quad t \;&\to\; E(e^{itN}) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \;, \\
aN + b \text{ hat charakteristische Funktion} \quad t \;&\to\; e^{ibt} e^{\lambda(e^{iat}-1)} \;, \\
a(N - EN) \text{ hat charakteristische Funktion} \quad t \;&\to\; e^{\lambda(e^{iat}-1-iat)} \;.
\end{aligned}$$

Mit dem Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen 7.8 ist damit für $\Lambda = \lambda\, \epsilon_a$, $a \neq 0$, die Funktion $\varphi_\Lambda(\cdot)$ aus 9.3 als charakteristische Funktion zu einer durch a skalierten und im Fall $|a| \le 1$ auch zentrierten Poissonvariable mit Parameter λ identifiziert. Betrachtet man nun unabhängige skalierte und gegebenenfalls zentrierte Poissonvariable, erhält man sofort

9.4 Beispiel: Sei $D = \{a_1, \ldots, a_\ell\}$ eine endliche Teilmenge von $I\!R \setminus \{0\}$. Zu strikt positiven $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ und zu unabhängigen Poissonvariablen $N_j \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$, $1 \le j \le \ell$ definiere

$$Q \;:=\; \mathcal{L}\left(\sum_{\substack{a_j \in D \\ |a_j| \le 1}} a_j (N_j - EN_j) \;+\; \sum_{\substack{a_j \in D \\ |a_j| > 1}} a_j\, N_j \right) \,.$$

Dann hat das Wahrscheinlichkeitsmaß Q die charakteristische Funktion

$$\varphi_\Lambda(t) \;=\; \exp\left(\sum_{a_j \in D} \left[e^{ita_j} - 1 - (ita_j) 1_{\{|a_j| \le 1\}} \right] \Lambda(\{a_j\}) \right) \quad \text{mit} \quad \Lambda := \sum_{a_j \in D} \lambda_j\, \epsilon_{a_j} \;\in\; \mathcal{M} \,.$$

Diese 'diskreten Poissonmischungen' bilden einen wichtigen Spezialfall von 9.3. □

Als nächstes zeigen wir, wie für allgemeines $\Lambda \in \mathcal{M}$ die charakteristische Funktion in 9.3 als schwacher Limes einer Folge diskreter Poissonmischungen der Art 9.4 entsteht. Die Idee ist einfach: man stelle sich eine Balkenwaage vor, an deren rechtem Arm in Positionen

$$a_{n,1} \;<\; \ldots \;<\; a_{n,k_n}$$

unabhängige zufällige Poisson-Gewichte $X_{n,j}$ eingehängt werden:

$$X_{n,j} \;:=\; N_{n,j} - E(N_{n,j}) \quad \text{falls } a_{n,j} \le 1\ , \qquad X_{n,j} \;:=\; N_{n,j} \quad \text{falls } a_{n,j} > 1\ ,$$
$$N_{n,j} \sim \mathcal{P}\left(\Lambda((a_{n,j-1}, a_{n,j}])\right) \quad \text{unabhängig, } j = 1, 2, \ldots, k_n$$

(mit $0 < a_{n,0} < a_{n,1}$). Für $n \to \infty$ erweitert man sukzessiv die Punktwolken $\{a_{n,j} : 1 \le j \le k_n\}$, so daß sie sich auf $(0,\infty)$ – und insbesondere zum Ursprung der Waage hin – verdichten. Entsprechendes macht man spiegelverkehrt auch auf dem linken Arm der Waage.

9.5 Hilfssatz: Betrachte ein auf $(0,\infty)$ konzentiertes 'einseitiges' $\Lambda \in \mathcal{M}$.

a) Sei $0 < A < 1 < B < \infty$. Zu beliebig kleinem $\Delta > 0$ gibt es Partitionen

$$\Pi := \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}\ , \quad A = a_0 < a_1 < \ldots < a_{\ell-1} < 1 = a_\ell < \ldots < a_k = B$$

mit den Eigenschaften

(+) $$(a_j - a_{j-1}) \;<\; \Delta\ , \quad \Lambda\left((a_{j-1}, a_j)\right) \;\le\; \Delta\ , \quad 1 \le j \le k$$

(++) $$\{x \in (A,B] : \Lambda(\{x\}) > \Delta\} \;\subset\; \Pi\ .$$

b) Für jede Partition Π wie in a) stimmt die Summe

$$\sum_{j=1}^{k} [e^{ita_j} - 1 - (ita_j)1_{\{|a_j|\le 1\}}]\, \Lambda(\,(a_{j-1}, a_j]\,)$$

überein mit dem Integral

$$\int_{(A,B]} [e^{itx} - 1 - (itx)1_{\{|x|\le 1\}}]\, \Lambda(dx)$$

bis auf Fehlerterme der Größenordnung

$$\le\;\; \Delta\, c(t)\, \Lambda\left((A,\infty)\right)\ ;$$

dabei ist $c(t)$ eine nur von $t \in I\!R$ (und nicht von $\Lambda \in \mathcal{M}$, Δ, A oder B) abhängende Konstante.

c) Für jede Partition Π wie in a), mit $\ldots < a_{\ell-1} < 1 = a_\ell < \ldots$, unterscheiden sich

$$\sum_{j=1}^{\ell} a_j^2 \, \Lambda\left((a_{j-1}, a_j]\right) \quad \text{und} \quad \int_{(A,1]} x^2 \, \Lambda(dx)$$

höchstens um

$$2 \, \Delta \, \Lambda\left((A, \infty)\right) \ .$$

d) Stets gilt

$$\begin{aligned} \lim_{A \downarrow 0} \int_{(0,A]} [e^{itx} - 1 - (itx) 1_{\{|x| \le 1\}}] \, \Lambda(dx) &= 0 \ , \\ \lim_{B \uparrow \infty} \int_{(B,\infty)} [e^{itx} - 1 - (itx) 1_{\{|x| \le 1\}}] \, \Lambda(dx) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Beweis: 1) Die Aussage d) folgt sofort aus der definierenden Eigenschaft $(*)$ der Klasse $\mathcal{M}$ und aus der Abschätzung

$$\left| e^{itx} - 1 - (itx) 1_{\{|x| \le 1\}} \right| \ \le \ c(t) \, (x^2 \wedge 1)$$

mit einer nur von $t \in I\!R$ abhängenden Konstante $c(t)$ der Form $c(t) = \widetilde{c}(1 + t^2)$ (für $|x| \le 1$ folgt dies aus 7.3, und für $|x| > 1$ ist die linke Seite stets ≤ 2).

2) Eine Partition mit den Eigenschaften $(+)$ und $(++)$ gewinnt man, indem man (ähnlich wie im Beweis des Satzes von Glivenko-Cantelli 5.15) für das nach 9.1 endliche Maß

$$\Lambda\left(\cdot \cap (A, \infty) \right)$$

eine Verteilungsfunktion

$$(\circ) \qquad s \longrightarrow \Lambda\left((A, A+s] \right) \ , \quad s \ge 0$$

betrachtet und deren Anwachsen mit

$$(\diamond) \qquad \tau_0 := A \ , \quad \tau_{n+1} := \inf\{ t > \tau_n : \Lambda\left((\tau_n, t]\right) > \Delta \} \ , \quad n \in I\!N_0$$

kontrolliert. Beachte, daß $(\circ)$ als Verteilungsfunktion eines endliches Maßes höchstens abzählbar viele Sprungstellen besitzt (für beliebiges $k \in I\!N$ höchstens endliche viele Sprungstellen mit Sprunghöhe $> \frac{1}{k}$) und in $s = 0$ den Wert 0 besitzt: insbesondere findet $(\diamond)$ alle Sprungstellen mit Sprunghöhe $> \Delta$ dieser Verteilungsfunktion. Damit ist eine Folge von Punkten $\{\tau_n : n \in I\!N_0\}$ in $[A, \infty)$ gefunden, welche $(++)$ und die zweite Forderung aus $(+)$ erfüllt. Durch Einschieben endlich vieler Zwischenpunkte im Intervall $(A, B]$ kann man danach die erste Forderung aus (+) erfüllen, und sicherstellen, daß 1 und B in der Partition enthalten sind.

3) Sei $\Delta > 0$ fest, sei Π die zu Δ gebildete Partition aus a). Wegen (++) ist $D := \{x \in (A, B] : \Lambda(\{x\}) > \Delta\}$ eine Teilmenge der Partition Π. Setze

$$\Lambda_D := \sum_{a \in D} \Lambda(\{a\})\, \epsilon_a \quad , \quad \widetilde{\Lambda} := \Lambda(\cdot \cap (A, B]) - \Lambda_D .$$

Dann hat $\widetilde{\Lambda}$ die Eigenschaft

$$(*) \qquad \widetilde{\Lambda}(\{x\}) \leq \Delta \quad \text{für alle} \quad x \in (A, B]$$

und wie in Beispiel 9.4 stimmen die Differenzen

$$\sum_{j=1}^{k} [e^{ita_j} - 1 - (ita_j) 1_{\{|a_j| \leq 1\}}]\, \Lambda(\,(a_{j-1}, a_j]\,) - \int_{(A,B]} [e^{itx} - 1 - (itx) 1_{\{|x| \leq 1\}}]\, \Lambda(dx)$$

und

$$\sum_{j=1}^{k} [e^{ita_j} - 1 - (ita_j) 1_{\{|a_j| \leq 1\}}]\, \widetilde{\Lambda}(\,(a_{j-1}, a_j]\,) - \int_{(A,B]} [e^{itx} - 1 - (itx) 1_{\{|x| \leq 1\}}]\, \widetilde{\Lambda}(dx)$$

trivialerweise überein. Unter $(*)$ folgt aus (+)

$$\widetilde{\Lambda}\,((a_{j-1}, a_j]) \leq 2\,\Delta\,, \quad 1 \leq j \leq k .$$

Schreibe für festes t

$$f_t(a) := e^{ita} - 1 - (ita) 1_{\{|a| \leq 1\}}\,, \quad f_{\Pi,t}(a) := \sum_{j=1}^{k} f_t(a_j)\, 1_{(a_{j-1}, a_j]}(a)\,, \quad a > 0 .$$

Dann gilt $\frac{\partial}{\partial a} f_t(a) = it(e^{ita} - 1)$ falls $0 < a < 1$, $\frac{\partial}{\partial a} f_t(a) = ite^{ita}$ falls $a > 1$, also

$$|f_t(a) - f_t(a_j)| \leq |a - a_j|\, c(t) \leq \Delta\, c(t) \quad \text{falls } a_{j-1} < a \leq a_j$$

mit einer nur von t abhängenden Konstante $c(t)$. Nun schreibt man

$$(\circ) \qquad \sum_{j=1}^{k} [e^{ita_j} - 1 - (ita_j) 1_{\{|a_j| \leq 1\}}]\, \widetilde{\Lambda}(\,(a_{j-1}, a_j]\,) = \int_{(A,B]} f_{\Pi,t}(a)\, \widetilde{\Lambda}(da)$$

und erhält die Abschätzungen

$$\left| \int_{(A,B]} f_{\Pi,t}(a)\, \widetilde{\Lambda}(da) - \int_{(A,B]} f_t(a)\, \widetilde{\Lambda}(da) \right| \leq \Delta\, c(t)\, \widetilde{\Lambda}((A, B]) \leq \Delta\, c(t)\, \Lambda((A, \infty)) ;$$

damit unterscheidet sich $(\circ)$ von

$$\int_{(A,B]} [e^{itx} - 1 - (itx) 1_{\{|x|\leq 1\}}]\, \widetilde{\Lambda}(dx)$$

höchstens um $\Delta\, c(t)\, \Lambda\,((A,\infty))$, und die Behauptung b) ist bewiesen.

5) Nach Wahl von a_0 und a_ℓ erhält man ähnlich wie oben

$$\left| \sum_{j=1}^{\ell} a_j^2\, \Lambda\,((a_{j-1}, a_j]) - \int_{(A,1]} a^2\, \Lambda(da) \right| \;\leq\; 2\,\Delta\,\Lambda\,((A,\infty)) \;.$$

Damit ist Aussage c) gezeigt und der Beweis des Hilfssatzes vollständig. $\square$

9.6 Beweis von Satz 9.3: 1) Zerlege das Maß $\Lambda \in \mathcal{M}$ gemäß

$$\Lambda \;=\; \Lambda(\cdot \cap (-\infty, 0)) \;+\; \Lambda(\cdot \cap (0,\infty))$$

und arbeite zunächst auf dem rechten Ast von Λ:

$$\Lambda_1 \;:=\; \Lambda(\cdot \cap (0,1]) \;\in\; \mathcal{M} \;, \quad \Lambda_2 \;:=\; \Lambda(\cdot \cap (1,\infty)) \;\in\; \mathcal{M} \;.$$

Mit $f_t(\cdot)$ wie in Schritt 4 des Beweises von 9.5 definiere Funktionen $I\!R \to \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\Lambda_1}(t) \;&:=\; \exp\left(\int f_t(a)\, \Lambda_1(da) \right) \;=\; \exp\left(\int_{(0,1]} [e^{itx} - 1 - (itx) 1_{\{|x|\leq 1\}}]\, \Lambda(dx) \right) \;, \\
\varphi_{\Lambda_2}(t) \;&:=\; \exp\left(\int f_t(a)\, \Lambda_2(da) \right) \;=\; \exp\left(\int_{(1,\infty)} [e^{itx} - 1 - (itx) 1_{\{|x|\leq 1\}}]\, \Lambda(dx) \right) \;.
\end{aligned}$$

Beide Funktionen sind stetig in $t \in I\!R$: dies folgt mit dominierter Konvergenz aus der definierenden Eigenschaft der Klasse $\mathcal{M}$ kombiniert mit den Schranken aus Schritt 1) für den Integranden.

2) Für Folgen $(A_n)_n$, $(B_n)_n$, $(\Delta_n)_n$ mit den Eigenschaften

$$(*) \qquad A_n \downarrow 0 \;, \quad B_n \uparrow \infty \;, \quad \Delta_n \downarrow 0 \quad \text{so daß} \quad \Delta_n\, \Lambda\,((A_n, \infty)) \longrightarrow 0$$

wähle Partitionen $\Pi_n := \{a_{n,0}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,k_n}\}$ wie in 9.5 a)

$$0 < A_n = a_{n,0} < a_{n,1} < \ldots < a_{n,\ell_n - 1} < 1 = a_{n,\ell_n} < \ldots < a_{n,k_n} = B_n < \infty \;,$$

bereite vor ein Dreiecksschema aus zeilenweise (d.h. für festes n) unabhängigen Poisson-ZV

$$N_{n,j} \;\sim\; \mathcal{P}\,(\Lambda((a_{n,j-1}, a_{n,j}])) \;, \quad 1 \leq j \leq k_n \;,$$

und setze

$$M_n \; := \; \sum_{j=1}^{\ell_n} a_{n,j} \, (N_{n,j} - E(N_{n,j})) \;\; , \quad V_n \; := \sum_{j=\ell_n+1}^{k_n} a_{n,j} \, N_{n,j} \; .$$

3) Die charakteristischen Funktionen zu M_n bzw. V_n (vgl. 9.4, wir benutzen die Notation $f_{\Pi_n,t}(\cdot)$ analog zu ($\circ$) in Schritt 4 des Beweises von 9.5)

$$\begin{array}{rcl} t \; \longrightarrow \; E\left(e^{itM_n}\right) & = & \exp\left(\int f_{\Pi_n,t}(a)\,\Lambda_1(da)\right) \\ t \; \longrightarrow \; E\left(e^{itV_n}\right) & = & \exp\left(\int f_{\Pi_n,t}(a)\,\Lambda_2(da)\right) \end{array}$$

konvergieren – nach Wahl ($*$) von $(A_n)_n$, $(B_n)_n$, $(\Delta_n)_n$, und wegen 9.5 c)+b) – punktweise auf $I\!R$ gegen die an der Stelle $t = 0$ stetigen Funktionen

$$t \;\longrightarrow\; \varphi_{\Lambda_1}(t) \; , \quad t \;\longrightarrow\; \varphi_{\Lambda_2}(t)$$

aus Schritt 1). Nach dem Stetigkeitssatz von P. Lévy 7.11 gibt es also Wahrscheinlichkeitsmaße

$$Q_{\Lambda_i} \quad \text{mit charakteristischer Funktion} \quad \varphi_{\Lambda_i} \; , \quad i = 1, 2$$

so daß schwache Konvergenz in $I\!R$ gilt

$$(\diamond) \qquad \mathcal{L}\,(M_n) \;\longrightarrow\; Q_{\Lambda_1} \; , \quad \mathcal{L}\,(V_n) \;\longrightarrow\; Q_{\Lambda_2} \; , \quad n \to \infty \; .$$

Damit ist für den rechten Ast des Maßes Λ der Satz bewiesen.

4) Auf dem linken Ast von Λ arbeitet man spiegelverkehrt in völlig analoger Weise, mit Poissonvariablen, die von den in 2) für den rechten Ast gewählten unabhängig sind, und erhält eine ($\diamond$) entsprechende Aussage. Das Produkt der so entstandenen vier charakteristischen Funktionen entspricht der Faltung der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsmaße. Damit ist 9.3 bewiesen. $\square$

9.7 Bemerkung: Mit allen Bezeichnungen und Voraussetzungen aus 9.6: in ($\diamond$) aus 9.6

$$\mathcal{L}\,(M_n) \;\longrightarrow\; Q_{\Lambda_1} \; , \quad n \to \infty$$

darf man die Konvergenz der Summe

$$M_n \; = \; \sum_{j=1}^{\ell_n} a_{n,j} \, (N_{n,j} - E(N_{n,j})) \;\; , \quad n \to \infty$$

(wobei $a_{\ell_n} = 1$) i.a. *nicht* auf dem Weg über separat zu betrachtende Anteile

$$\sum_{j=1}^{\ell_n} a_{n,j} \, N_{n,j} \quad , \quad \sum_{j=1}^{\ell_n} a_{n,j} \, E(N_{n,j})$$

untersuchen. Zunächst konvergiert – nach 9.5 c) und $(*)$ – für $n \to \infty$ die Folge

$$(\circ) \qquad Var(M_n) \;=\; \sum_{j=1}^{\ell_n} a_{n,j}^2 \,\Lambda\left((a_{n,j-1}, a_{n,j}]\right) \;\longrightarrow\; \int_{(0,1]} x^2 \,\Lambda(dx) \;<\; \infty$$

gegen einen endlichen Grenzwert, für jedes $\Lambda \in \mathcal{M}$. Gleichzeitig strebt auf einer großen Teilklasse von Maßen $\Lambda \in \mathcal{M}$ (siehe etwa (+) in Beispiel 9.2) die deterministische Folge

$$\sum_{j=1}^{\ell_n} a_{n,j} E(N_{n,j}) \;=\; \sum_{j=1}^{\ell_n} a_{n,j} \Lambda((a_{n,j-1}, a_{n,j}]) \;\geq\; \int_{(A_n,1]} x \,\Lambda(dx) \;\longrightarrow\; \int_{(0,1]} x \,\Lambda(dx)$$

gegen ∞ für $n \to \infty$; in diesem Fall kann die Folge von Zufallsvariablen

$$\sum_{j=1}^{\ell_n} a_{n,j}\, N_{n,j} \;, \quad n \to \infty$$

(kombiniere $(\circ)$ und Chebychev) nicht mehr straff in $I\!R$ sein. Auf die Zentrierung der in M_n eingehenden Poisson-Variablen kann daher für allgemeine $\Lambda \in \mathcal{M}$ nicht verzichtet werden. $\square$

9.8 Bemerkung: Betrachte ein Maß $\Lambda \in \mathcal{M}$ *ohne Punktmassen*, schreibe

$$\int_{(\frac{1}{2},1]} x^2 \,\Lambda(dx) \;=:\; s^2 \;>\; 0 \;,$$

und betrachte ein Dreiecksschema mit allen Eigenschaften aus 9.6 bzw. 9.5 a)

$$(\circ) \qquad X_{n,j} \;:=\; a_{n,j}\left(N_{n,j} - E(N_{n,j})\right) \;, \quad N_{n,j} \;\sim\; \mathcal{P}\left(\Lambda(a_{n,j-1}, a_{n,j}]\right) \;, \quad m_n < j \leq \ell_n \;;$$

sei dabei ℓ_n bestimmt durch $a_{n,\ell_n} = 1$, wie in 9.5, und m_n festgelegt durch $a_{m_n-1} < \frac{1}{2} \leq a_{m_n}$. Per Definition sind die Poissonvariablen in $(\circ)$ zeilenweise unabhängige L^2-Variablen. Wir überlegen, warum das Dreiecksschema $(\circ)$ die Lindeberg-Bedingung verletzen muß.

a) Wie in 9.5. c) gilt zuerst

$$s_n^2 \;:=\; \sum_{j=m_n+1}^{\ell_n} Var(X_{n,j}) \;\longrightarrow\; \int_{(\frac{1}{2},1]} x^2 \,\Lambda(dx) \;=\; s^2 \;, \quad n \to \infty \;.$$

Die in der Lindeberg-Bedingung 8.3 iii) zu festem $\varepsilon > 0$ zu betrachtenden Summanden haben die Gestalt

$$(\circ\circ) \qquad E\left(\left(\frac{1}{s_n} X_{n,j} \right)^2 1_{\left\{\left|\frac{1}{s_n} X_{n,j}\right| > \varepsilon\right\}} \right) \;, \quad j = m_n{+}1, \ldots, \ell_n \;.$$

Weil Λ nach Voraussetzung keine Punktmassen besitzt und damit nach 9.5 (+) bzw. nach 9.6

$$\lambda_{n,j} \;:=\; \Lambda\left((a_{n,j-1}, a_{n,j}]\right) \;=\; \Lambda\left((a_{n,j-1}, a_{n,j})\right) \;\leq\; \Delta_n \;, \quad j = m_n{+}1, \ldots, \ell_n \;,$$

weil alle $a_{n,j}$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen, weil s_n gegen s und Δ_n gegen 0 strebt, besteht für hinreichend großes n und hinreichend kleines ε der Effekt der Trunkation in $(\circ\circ)$ darin, in jedem der Summanden $(\circ\circ)$ genau das Ereignis $\{N_{n,j} = 0\}$ auszuschalten. Damit können die Summanden $(\circ\circ)$ wegen $a_{n,j} \geq \frac{1}{2}$ durch

$$\frac{1}{8\,s^2}\left(\sum_{k\geq 1} P(N_{n,j}=k)\,(k-\lambda_{n,j})^2\right) \quad , \quad j = m_n{+}1, \ldots, \ell_n$$

nach unten abgeschätzt werden. Die Summe in runden Klammern ist dann aber elementar

$$Var(N_{n,j}) - P(N_{n,j}=0)\,(0-\lambda_{n,j})^2 \;\;\geq\;\; \lambda_{n,j} - \lambda_{n,j}^2 \;\;\geq\;\; \lambda_{n,j}(1-\Delta_n)$$

so daß man insgesamt für große n bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ die folgende Abschätzung erhält:

$$\begin{aligned} L_n(\varepsilon) \;&=\; \sum_{j=m_n+1}^{\ell_n} E\left(\left(\frac{1}{s_n}X_{n,j}\right)^2 1_{\{\left|\frac{1}{s_n}X_{n,j}\right|>\varepsilon\}}\right) \\ &\geq\; \frac{1-\Delta_n}{8\,s^2}\sum_{j=m_n+1}^{\ell_n}\lambda_{n,j} \;\longrightarrow\; \frac{1}{8\,s^2}\,\Lambda\left((\frac{1}{2},1]\right) \;>\; \frac{1}{8}\,, \quad n\to\infty \end{aligned}$$

nach Definition von s^2; also gilt für das Dreiecksschema $(\circ)$ die Lindeberg-Bedingung nicht.

b) Die schwächeren Bedingungen (AV) und (FE) aus 8.3 erfüllt das Dreiecksschema $(\circ)$ dagegen; dies prüft man mit ähnlichen Argumenten leicht nach (Übungsaufgabe). $\square$

Nun können wir einen wichtigen neuen Begriff einführen.

9.9 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ heißt *unendlich teilbar*, falls zu jeder natürlichen Zahl n ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q_n auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ existiert mit $(Q_n)^{*n} = Q$.

9.10 Bemerkung: Die Eigenschaft eines Wahrscheinlichkeitsmaßes Q auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$, mit charakteristischer Funktion $\varphi(\cdot)$, unendlich teilbar zu sein, kann äquivalent – nach Definition der Faltung, und nach 7.5 b) – in jeder der folgenden Formen i) oder ii) ausgesagt werden: zu jedem $n \in I\!N$

i) gibt es iid ZV $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ mit $\mathcal{L}(X_{n,1}) =: Q_n$ und $\mathcal{L}(X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}) = Q$;

ii) ist $\varphi(\cdot)^{\frac{1}{n}}$ charakteristische Funktion zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß Q_n auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$.

9.11 Beispiele: a) Jede Verteilung Q_Λ wie in Satz 9.3, $\Lambda \in \mathcal{M}$, ist unendlich teilbar:

mit Λ ist auch $\frac{1}{n}\Lambda$ ein Maß in der Klasse $\mathcal{M}$, und die charakteristische Funktion zu Q_Λ

$$\varphi_\Lambda(t) \;=\; \int_{I\!R} e^{ity}\, Q_\Lambda(dy) \;=\; \exp\left(\int_{I\!R\setminus\{0\}} [e^{itx} - 1 - (itx)1_{\{|x|\le 1\}}]\, \Lambda(dx) \right)$$

steht zu der charakteristischen Funktion von $Q_{\frac{1}{n}\Lambda}$

$$\varphi_{\frac{1}{n}\Lambda}(t) \;=\; \int_{I\!R} e^{ity}\, Q_{\frac{1}{n}\Lambda}(dy) \;=\; \exp\left(\int_{I\!R\setminus\{0\}} [e^{itx} - 1 - (itx)1_{\{|x|\le 1\}}]\, (\frac{1}{n}\Lambda)(dx) \right)$$

offenkundig in der Beziehung $\varphi_{\frac{1}{n}\Lambda}(\cdot) = (\varphi_\Lambda(\cdot))^{\frac{1}{n}}$.

b) Als Spezialfall wie in 9.4 a) ist jedes Diracmaß ε_a in $a \neq 0$ unendlich teilbar:
es genügt, die charakteristische Funktion $t \to e^{ita}$ in Form $t \to e^{n(it\frac{a}{n})}$ zu schreiben.

c) Jede Normalverteilung $Q := \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ mit $\sigma^2 > 0$ ist unendlich teilbar:
die charakteristische Funktion zu $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ ist $t \to e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, nach 7.7; mit $Q_n := \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$ ergibt sich $(Q_n)^{*n} = Q$; siehe auch 4.25. □

9.12 Bemerkung: Man kann zeigen: es gibt keine anderen unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaße Q auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ als solche mit charakteristischer Funktion von Gestalt

$$(\diamond) \qquad \varphi_Q(t) \;=\; \exp\left(iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{I\!R\setminus\{0\}} [e^{itx} - 1 - (itx)1_{\{|x|\le 1\}}]\, \Lambda(dx) \right) \;, \quad t \in I\!R$$

wobei $\Lambda \in \mathcal{M}$, $a \in I\!R$, $\sigma^2 \ge 0$. Dies ist die berühmte *Lévy-Chintchine Formel*. Für das zu $(\diamond)$ gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß Q nennt man Λ das *Lévy-Maß*, die Normalverteilung $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ den *Gaußschen Anteil*, und a den *Shiftanteil*. Durch Angabe eines Tripels

$$(a, \sigma^2, \Lambda) \;:\quad \Lambda \in \mathcal{M}\;,\; \sigma^2 \ge 0\;,\; a \in I\!R$$

ist eine unendlich teilbare Verteilung also eindeutig bestimmt. Siehe etwa Loève I (1977, Sect. 23–24), Feller II (1971), Bertoin (1996, S. 13), Sato (1999), Klenke (2006, S. 323 ff).

Stabile Verteilungen bilden eine wichtige Teilklasse der Klasse der unendlich teilbaren Verteilungen. Wir diskutieren sie – für eine allgemeine Behandlung siehe z.B. Feller II (1971), Zolotarev (1986), Bingham, Goldie und Teugels (1987) – nur im symmetrischen Fall. Wesentlich für 'Stabilität' ist die Gültigkeit gewisser Skalierungseigenschaften im Exponenten der charakteristischen Funktion einer unendlich teilbaren Verteilung.

9.13 Hilfssatz: Betrachte *symmetrische* Maße Λ nach Beispiel 9.2:

$$\Lambda(dx) \;=\; \xi\,\alpha\,|x|^{-\alpha-1}\,dx \quad \text{auf} \quad I\!R\setminus\{0\}$$

mit $0<\alpha<2$, $\xi=\xi^+=\xi^->0$, und setze

$$F_c(t) \;:=\; \int_{I\!R\setminus\{0\}} [e^{itx}-1-(itx)1_{\{|x|\le c\}}]\,\Lambda(dx)\;, \quad c>0\;,\; t\in I\!R$$

(für $c=1$ ist $F_1(\cdot)$ der Exponent der charakteristischen Funktion φ_Λ gemäß 9.3). Dann gilt

a) Die Funktionen F_c sind reellwertig und symmetrisch: $F_c(t)=F_c(-t)$ für alle $t\ge 0$.

b) Es gilt $F_c(\cdot)=F_1(\cdot)$ unabhängig von der Wahl des Trunkierungsfaktors $c>0$.

c) Notwendig ist die Funktion $F_1(\cdot)$ von Form

$$F_1(t) \;=\; -c_\Lambda\,|t|^\alpha\;, \quad t\in I\!R$$

für eine geeignete Konstante $c_\Lambda>0$.

Beweis: a)+b) Aus Symmetrie von Λ und Antisymmetrie des Imaginärteils des Integranden kombiniert mit der definierenden Eigenschaft $(*)$ für Maße Λ in Klasse $\mathcal{M}$ folgt:

$$i\cdot\int_{I\!R\setminus\{0\}}\left[\sin(tx)-tx1_{\{|x|\le c\}}\right]\,\Lambda(dx) \;=\; 0 \quad , \quad F_c(t) \;=\; \int_{I\!R\setminus\{0\}}[\cos(tx)-1]\,\Lambda(dx)\;.$$

Damit ist die Funktion F_c für symmetrisches $\Lambda\in\mathcal{M}$ reellwertig, symmetrisch, und offensichtlich frei von der konkreten Festlegung der Trunkierungskonstanten $0<c<\infty$.

c) Das folgende Argument nutzt Skalierungseigenschaften des Maßes $\Lambda(dx)=\xi\,\alpha\,|x|^{-\alpha-1}\,dx$ auf $I\!R\setminus\{0\}$. Fixiere $u>0$ und setze $s:=tu^{-\frac{1}{\alpha}}$, $y:=xu^{-\frac{1}{\alpha}}$. Dann hat man $sx=ty$, verifiziert $(u\Lambda)(dx)=\Lambda(dy)$, und hat unter Ausnutzung von b)

$$\begin{aligned} u\,F_1(s) \;&=\; \int_{I\!R\setminus\{0\}}[e^{isx}-1-(isx)1_{\{|sx|\le s\}}]\,(u\Lambda)(dx) \\ &=\; \int_{I\!R\setminus\{0\}}[e^{ity}-1-(ity)1_{\{|ty|\le s\}}]\,\Lambda(dy) \;=\; F_{\frac{s}{t}}(t) \;=\; F_1(t)\;. \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich für $t=1$ und $v:=u^{-\frac{1}{\alpha}}$ die Gleichung

$$v>0\;:\quad F_1(v) \;=\; v^\alpha\,F_1(1)\;.$$

Nach a) aber ist $F_1(\cdot)$ reellwertig und symmetrisch, also hat man auch

$$v\neq 0\;:\quad F_1(v) \;=\; |v|^\alpha\,F_1(1)\;.$$

Mit $c_\Lambda := -F_1(1) \in \mathbb{R}$ und mit 9.3 kann man also schreiben

$$\varphi_\Lambda(t) \;=\; \exp\left(F_1(t)\right) \;=\; e^{-c_\Lambda\,|t|^\alpha}\;, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Als charakteristische Funktion ist $\varphi_\Lambda(\cdot)$ betragsmäßig durch 1 beschränkt, also kennt man das Vorzeichen der Konstante $c_\Lambda > 0$. □

9.14 Bemerkung: Die Konstante c_Λ in 9.13 c) kann mit analytischen Methoden (wie in Feller II (1971), S. 568–569, wobei in (3.9), (3.11), (3.18) je ein Druckfehler zu korrigieren ist) berechnet werden; man erhält

$$c_\Lambda \;=\; \begin{cases} 2\,\xi\,\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}\,\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \;>\; 0 & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ \xi\,\pi & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases}$$

für *symmetrisches* Λ aus Beispiel 9.2, mit $0 < \alpha < 2$ und $\xi = \xi^+ = \xi^-$ (Übungsaufgabe).

9.15 Bemerkung: Die Aussage von 9.13 a)+b) kann man wesentlich allgemeiner fassen: sei $\Lambda \in \mathcal{M}$ symmetrisch, wähle eine Funktion

$(\circ)$ $\quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ antisymmetisch, beschränkt, mit $\;|h(x) - x| = O(x^2)\;$ für $x \to 0$,

dann liefert Antisymmetrie des Imaginärteils des Integranden kombiniert mit Symmetrie von Λ

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} [e^{itx} - 1 - ith(x)]\,\Lambda(dx) \;=\; \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} [e^{itx} - 1 - (itx)1_{\{|x|\le 1\}}]\,\Lambda(dx)\;, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

und dies ist reellwertig und symmetrisch in t. Man nennt h wie in $(\circ)$ 'Trunkationsfunktion'; übliche Festlegungen sind z.B. $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$ oder $h(x) = \sin(x)$. Damit ist für *symmetrisches* $\Lambda \in \mathcal{M}$ die charakteristische Funktion in 9.3 – oder in $(\diamond)$ in 9.12 – stets frei von der gewählten Festlegung einer Trunkationsfunktion. □

9.16 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ heißt *strikt stabil* falls gilt: sind Z_j, $j \geq 1$ iid mit Verteilung Q, so gibt es für jede natürliche Zahl n eine Konstante a_n mit

$$\mathcal{L}\left(\frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{a_n}\right) \;=\; \mathcal{L}\left(Z_1\right)\;.$$

9.17 Satz: Für $\Lambda \in \mathcal{M}$ symmetrisch und von der in Beispiel 9.2 betrachteten Form

$(*)$ $$\Lambda(dx) \;=\; \xi\,\alpha\,|x|^{-\alpha-1}\,dx \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

(mit $0 < \alpha < 2$ und $\xi = \xi^+ = \xi^- > 0$) ist das Wahrscheinlichkeitsmaß Q_Λ aus 9.3 strikt stabil:

$$(**) \qquad \mathcal{L}\left(\frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \;=\; \mathcal{L}\,(Z_1) \quad \text{für } Z_j,\, j \geq 1 \text{ iid} \sim Q_\Lambda \;.$$

Man bezeichnet α in $(**)$ als *Stabilitätsindex.*

Beweis: Dies folgt sofort aus 9.3 und 9.13 c): für das durch $(*)$ gegebene Maß Λ ist die charakteristische Funktion zu Q_Λ von Form

$$(9.17) \qquad \varphi_\Lambda(t) \;=\; \int_{I\!R} e^{ity}\, Q_\Lambda(dy) \;=\; \exp(\,-c_\Lambda\,|t|^\alpha)\;, \quad t \in I\!R$$

($0 < \alpha < 2$, $c_\Lambda > 0$) und besitzt somit die Eigenschaft

$$\left(\varphi_\Lambda\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n \;=\; \varphi_\Lambda(t)\;, \quad t \in I\!R\;,\; n \in I\!N\;. \qquad \square$$

9.18 Beispiel: a) In 7.14 hat man die charakteristische Funktion $t \to e^{-|t|}$ der Standard-Cauchy Verteilung mit Dichte $x \to \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ gesehen. Nach (9.17) und Eindeutigkeitssatz 7.9 ist diese Verteilung also eine 'Poisson-Mischung' der Bauart 9.13 mit $\alpha = 1$, und für iid Cauchy-Zufallsvariablen Z_j, $j \geq 1$ gilt die Stabilitätseigenschaft aus 9.16 mit Index $\alpha = 1$:

$$\mathcal{L}\left(\frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{n}\right) \;=\; \mathcal{L}\,(Z_1)\;, \quad n \in I\!N\;.$$

b) Zentrierte Normalverteilungen haben die wohlbekannte Eigenschaft

$$\mathcal{L}\left(\frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \;=\; \mathcal{L}\,(Z_1) \quad \text{für } Z_j,\, j \geq 1 \text{ iid} \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

und sind folglich stabil mit Stabilitätsindex $\alpha = 2$. $\square$

9.19 Bemerkung: Die Klasse *aller strikt stabilen Verteilungen* kann man explizit angeben (siehe Bingham, Goldie und Teugels 1987 Theorem 8.3.2):

i) für Stabilitätsindex $0 < \alpha < 1$ und $1 < \alpha < 2$: dies sind die in 9.3 gebildeten Wahrscheinlichkeitsmaße Q_Λ zu Lévy-Maßen der Bauart 9.2:

$$\Lambda(dx) \;=\; \left(\xi^+ 1_{\{x>0\}} + \xi^- 1_{\{x<0\}}\right) \alpha\, |x|^{-\alpha-1}\, dx\;, \quad \xi^+, \xi^- \geq 0\;, \quad \xi^+ + \xi^- > 0$$

(für $\xi^+ \neq \xi^-$ nicht symmetrisch: beachte, daß in 9.13+9.14+9.15 oben nur der einfache Spezialfall $\xi^+ = \xi^- > 0$ behandelt wurde);

ii) für Index $\alpha = 1$: die (symmetrische) Cauchyverteilung wie in 9.18 a), bis auf geeignete Wahl von Skalierungsfaktoren;

iii) für Index $\alpha = 2$: die zentrierten Normalverteilungen.

Andere strikt stabile Verteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ kann es nicht geben: einen Über- und Ausblick gewinnt man mit Bingham-Goldie-Teugels (1978, Ch. 8.3), vollständige Beweise findet man in Feller II (1971) oder Zolotarev (1986).