

Kapitel XI

Martingale in diskreter Zeit

Reinhard Höpfner

Vorlesung Stochastik II

Wintersemester 2006/07 und 2010/11

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

15.1.04, 19.1.07, 16.12.10

Übersicht zu Kapitel XI :

A. Martingale, Submartingale, Supermartingale

- 'Trend' und 'trendfreie Zufallsschwankungen' in Random Walks 11.1
- Dynkin-Formel in Markov-Ketten 11.2
- stochastische Prozesse 11.2'
- Filtrationen, adaptierte Prozesse 11.3–11.3'
- Martingale, Submartingale, Supermartingale 11.4–11.5
- Vorhersehbarkeit und Doob-Meyer-Zerlegung von Submartingalen 11.5'–11.6'
- Martingale vom Typ 'sukzessive Prognosen an ein unendlich fernes Ziel' 11.7
- Martingale in Galton-Watson-Verzweigungsprozessen 11.8

B. Stopzeiten, Stopsätze

- Stopzeiten T , σ -Algebra der Vergangenheit vor T 11.9–11.12
- Zustand eines Prozesses zur zufälligen Zeit T 11.13
- Einfrieren eines Prozesses (Martingals, Supermartingals, ...) zur Zeit T 11.13'–11.14
- Stopsatz für beschränkte Stopzeiten 11.15
- Beispiele: Verzweigungsprozesse, Glücksspiele 11.16
- Stopsatz in nichtnegativen Supermartingalen 11.17

C. Doob-Ungleichung und 'aufsteigende Überquerungen'

- Doob-Ungleichung 11.18
- Verallgemeinerung auf abzählbare Indexmengen 11.19
- Abschluß eines Martingals, Sub- oder Supermartingals 11.20–11.20'
- Indexmengen mit Häufungspunkt links, Abschluß nach links 11.21
- Anzahl aufsteigender Überquerungen $N_{a,b}^I$ 11.22
- Doob's Abschätzungen für $E(N_{a,b}^I)$, aufsteigende/absteigende Grenzwerte 11.23–(11.24)

D. Konvergenzsätze für Martingale, Submartingale und Supermartingale

P -fast sichere Konvergenz in Sub- oder Supermartingalen 11.25

Nichtnegative Supermartingale 11.26

Konvergenz P -fast sicher und in $L^1(P)$, unter gleichgradiger Integrierbarkeit 11.27-(11.28)

Abschluß eines (Sub-, Super-) Martingals 11.29

Zustand X_T zur Zeit T in abgeschlossenen (Sub-, Super-) Martingalen 11.30

Nichtnegative Submartingale und gleichgradige Integrierbarkeit 11.31–11.32

Hauptsatz über gleichgradig integrierbare Martingale 11.33

Stopsatz in gleichgradig integrierbaren Martingalen 11.34

E. L^p -Ungleichungen und L^p -Martingale

Maximumsprozeß und L^p -Ungleichungen in nichtnegativen Submartingalen 11.35–11.36

L^p -Martingale, $p > 1$ 11.36'

Hauptsatz über L^p -Martingale 11.37

Beispiel: Martingale in Verzweigungsprozessen 11.38

A. Martingale, Submartingale, Supermartingale

Martingale entstehen durch Aufaddieren 'trendfreier Zufallsschwankungen'. Dies wird zunächst an Beispielen aufgezeigt.

11.1 Beispiel: Betrachte eine Folge von Glücksspielen. Schreibe Y_n für den Gewinn/Verlust im n -ten Spiel, und setze voraus: $Y_n, n = 1, 2, \dots$, sind iid ZV auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit $Y_1 \in L^1(P)$ und $E(Y_1) =: m$. Bilde dazu den Partialsummenprozeß oder Random Walk $(S_n)_n$

$$S_n := \sum_{j=1}^n Y_j, \quad n \geq 1, \quad S_0 \equiv 0,$$

der die Entwicklung des Vermögens des Spielers als Funktion der Zeit beschreibt. Definiere eine wachsende Folge $(\mathcal{F}_n)_n$ von Sub- σ -Algebren von \mathcal{A}

$$\mathcal{F}_n := \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n) = \sigma(Y_1, \dots, Y_n), \quad n \geq 1, \quad \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\};$$

\mathcal{F}_n beschreibt den Informationsstand eines idealen Beobachters, der bis zur Zeit n einschließlich den Verlauf der Folge von Glücksspielen verfolgen kann. Wegen der Unabhängigkeit der einzelnen Glücksspiele liefert die bedingte Erwartung

$$E(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = S_n + E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = S_n + m$$

die beste Prognose für den Vermögensstand S_{n+1} zur Zeit $n+1$ gegeben den Spielverlauf bis zur Zeit n . Die Folge von Glücksspielen ist damit für den Spieler tendentiell

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{vorteilhaft} \\ \text{fair} \\ \text{unvorteilhaft} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} m > 0 \\ m = 0 \\ m < 0 \end{array} \right\} \iff E(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) \left\{ \begin{array}{l} > S_n \\ = S_n \\ < S_n \end{array} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Dementsprechend zerlegen wir den Prozeß $(S_n)_n$ in einen 'vorhersehbaren Trend' plus einen Prozeß 'trendfreier Zufallsschwankungen'

$$S_n = S_0 + A_n + M_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

wobei der vorhersehbare Trend ein deterministischer Prozeß

$$A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad A_n := mn, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

und der Prozeß trendfreier Zufallsschwankungen

$$M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad M_0 := 0, \quad M_n := \sum_{j=1}^n (Y_j - m), \quad n \geq 1$$

ein zentrierter Random Walk ist, vgl. 5.7. □

11.2 Beispiel: a) Eine *Markov-Kette* $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Werten in einem meßbaren Raum (E, \mathcal{E}) mit *1-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit* $Q(\cdot, \cdot)$ ist ein stochastischer Prozeß, definiert auf irgendeinem (Ω, \mathcal{A}, P) , der sich sukzessiv in der Zeit entwickelt gemäß

$$(*) \quad \begin{cases} \forall n \geq 0 : & P(X_{n+1} \in F \mid \mathcal{F}_n) = Q(X_n, F), \quad \forall F \in \mathcal{E}, \\ \mathcal{L}(X_0 | P) = \nu. \end{cases}$$

Dabei ist

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$$

die σ -Algebra der Vergangenheit im Prozeß X bis zur Zeit n , ν ist ein vorgegebenes Wahrscheinlichkeitsmaß auf (E, \mathcal{E}) , welches die Startverteilung für X liefert, und $Q(\cdot, \cdot)$ eine Übergangswahrscheinlichkeit auf (E, \mathcal{E}) . Diese würfelt in Abhängigkeit allein von dem jeweils zuletzt erreichten Zustand X_n einen Folgezustand X_{n+1} aus.

Genauer: mit (*) sind für den Prozeß X eine Startverteilung ν und eine reguläre Version $(\omega, F) \rightarrow Q(X_n(\omega), F)$ der bedingten Verteilung von X_{n+1} gegeben \mathcal{F}_n festgelegt, für jedes $n \geq 0$; diese reguläre Version benutzt von der ganzen Vergangenheit im Prozeß bis zur Zeit n nur noch den *zuletzt erreichten Zustand* X_n .

b) Sei nun X eine Markov-Kette mit 1-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit $Q(\cdot, \cdot)$. Betrachte Funktionen $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, beschränkt und \mathcal{E} -meßbar, und definiere einen Operator \mathcal{L} auf dem Raum der beschränkten \mathcal{E} -meßbaren Funktion durch

$$(+)$$

$$(\mathcal{L}f)(x) := \int_E [f(y) - f(x)] Q(x, dy), \quad x \in E.$$

Der Operator \mathcal{L} heißt *Markov-Generator* der Kette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Mit (*) liefert 10.33 a)

$$E(f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \int f(y) Q(X_n, dy) = f(X_n) + (\mathcal{L}f)(X_n), \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

dies ist die beste Prognose für $f(X_{n+1})$ gegeben \mathcal{F}_n . Damit zerlegen wir jeden Prozeß $(f(X_n))_n$, f beschränkt und \mathcal{E} -meßbar, vermöge

$$f(X_n) = f(X_0) + \sum_{j=1}^n [f(X_j) - f(X_{j-1})]$$

in einen 'vorhersehbaren Trend' $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$A_n := \sum_{j=1}^n (\mathcal{L}f)(X_{j-1}) \quad \mathcal{F}_{n-1}\text{-meßbar, } n \geq 1, \quad A_0 := 0$$

plus einen Prozeß $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, welcher 'trendfreie Zufallsfluktuationen' aufaddiert

$$\begin{aligned} M_n &:= \sum_{j=1}^n [f(X_j) - f(X_{j-1}) - (\mathcal{L}f)(X_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^n [f(X_j) - E(f(X_j) | \mathcal{F}_{j-1})], \quad n \geq 1, \quad M_0 := 0 \end{aligned}$$

plus einen Startwert: die so entstandene Zerlegung

$$(++) \quad f(X_n) = f(X_0) + M_n + A_n, \quad n \geq 0$$

heißt *Dynkin-Formel* für die Kette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. □

Zunächst geben wir die noch ausstehende Definition für den Begriff 'stochastischer Prozeß':

11.2' Definition: Sei (Ω, \mathcal{A}) ein meßbarer Raum, sei I eine beliebige Indexmenge, sei (E, \mathcal{E}) ein meßbarer Raum. Ein *stochastischer Prozeß* $X = (X_t)_{t \in I}$ auf (Ω, \mathcal{A}) mit Werten in (E, \mathcal{E}) ist eine Kollektion meßbarer Abbildungen $X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$, $t \in I$.

Wir werden in diesem Kapitel Indexmengen $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ betrachten, und $t \in I$ als 'Zeit' interpretieren. Die Beispiele 11.1 und 11.2 motivieren die folgenden Begriffe.

11.3 Definition: Sei (Ω, \mathcal{A}) ein meßbarer Raum, sei $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Indexmenge.

a) Eine *Filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ in \mathcal{A} ist eine aufsteigende Familie von Sub- σ -Algebren von \mathcal{A} :

$$s < t \text{ in } I \implies \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

b) Sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozeß auf (Ω, \mathcal{A}) mit Werten in (E, \mathcal{E}) , sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ eine Filtration in \mathcal{A} . Der Prozeß X heißt *\mathbb{F} -adaptiert* falls gilt

$$\text{für jedes } t \in I \text{ gilt: } X_t : \Omega \rightarrow E \text{ ist } \mathcal{F}_t\text{-}\mathcal{E}\text{-meßbar.}$$

11.3' Bemerkung: Die *Geschichte* von $X = (X_t)_{t \in I}$ ist die Filtration $(\sigma(X_s : s \in I, s \leq t))_{t \in I}$. \mathbb{F} -Adaptiertheit des Prozesses X bedeutet nichts anderes, als daß die Geschichte von $X = (X_t)_{t \in I}$

Teil einer größeren 'Geschichte' $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ ist.

11.4 Definition: Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Indexmenge, sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ eine Filtration in \mathcal{A} . Betrachte einen stochastischen Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$ mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und mit den Eigenschaften

$$X \text{ ist } \mathbb{F}\text{-adaptiert, und } X_t \in L^1(P) \text{ für jedes } t \in I.$$

Der Prozeß X heißt

$$(P, \mathbb{F}) - \left\{ \begin{array}{l} \textit{Submartingal} \\ \textit{Martingal} \\ \textit{Supermartingal} \end{array} \right\} \text{ falls für alle } s < t \text{ in } I \text{ gilt : } X_s \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} E(X_t | \mathcal{F}_s).$$

Im Sinne einer besten Prognose an X_t gegeben den Informationsstand \mathcal{F}_s , $s < t$, ist ein Submartingal *tendentiell wachsend*, ein Supermartingal *tendentiell fallend*, ein Martingal *trendfrei*.

11.5 Bemerkungen: Unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 11.4:

a) Es gilt

$$X \text{ Submartingal} \iff (-X) := (-X_t)_{t \in I} \text{ Supermartingal ;}$$

also genügt es oft, entweder Sub- oder Supermartingale zu betrachten.

b) Nach Definition ist X ein (P, \mathbb{F}) -Submartingal falls

$$\forall s < t \in I : X_s \leq E_P(X_t | \mathcal{F}_s) =: g$$

für eine \mathcal{F}_s -meßbare Funktion $g = g_{t,s}$ als Festlegung von $E_P(X_t | \mathcal{F}_s)$. Dies ist äquivalent zu

$$\forall s < t \in I, \forall F \in \mathcal{F}_s : E_P(1_F X_s) \leq E_P(1_F g) = E_P(1_F E_P(X_t | \mathcal{F}_s)) = E_P(1_F X_t).$$

Damit ist die Submartingaleigenschaft bezüglich (P, \mathbb{F}) äquivalent zu

$$(*) \quad \forall s < t \in I, \forall F \in \mathcal{F}_s : E_P(1_F X_s) \leq E_P(1_F X_t).$$

Dasselbe gilt für Martingale mit '=' , und für Supermartingale mit '≥'. Oft liefert (*) den einfachsten Weg, eine Submartingaleigenschaft (analog Martingal-, Supermartingaleigenschaft) zu verifizieren.

c) Sei X ein (P, \mathbb{F}) -Martingal (Sub-, Supermartingal). Geht man von P zu einem anderen Wahrscheinlichkeitsmaß P' auf \mathcal{A} über, oder von \mathbb{F} zu einer anderen Filtration \mathbb{F}' in \mathcal{A} , so geht im allgemeinen die Martingaleigenschaft (Sub-, Supermartingaleigenschaft) von X verloren.

Den folgenden Begriff geben wir nur in einer auf 'diskrete Zeit' zugeschnittenen Einfachversion.

11.5' Definition: Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Filtration in \mathcal{A} . Ein stochastischer Prozeß $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt \mathbb{F} -vorhersehbar falls gilt: für jedes $n \geq 1$ ist die Zufallsvariable A_n \mathcal{F}_{n-1} -meßbar, und $A_0 \equiv cst$ ist deterministisch.

11.6 Beispiel: Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (E, \mathcal{E}) -wertige Markovkette auf (Ω, \mathcal{A}, P) , sei $\mathbb{F} = (\sigma(X_j : 0 \leq j \leq n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Geschichte von X . Die Dynkinformel (++) aus Beispiel 11.2 liefert für $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und \mathcal{E} -meßbar eine Zerlegung

$$f(X_n) = f(X_0) + A_n + M_n$$

in einen \mathbb{F} -vorhersehbaren Prozeß $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$A_n = \sum_{j=1}^n (\mathcal{L}f)(X_{j-1}), \quad n \geq 1, \quad A_0 \equiv 0$$

und ein (P, \mathbb{F}) -Martingal $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$M_n = \sum_{j=1}^n (f(X_j) - f(X_{j-1}) - (\mathcal{L}f)(X_{j-1})), \quad n \geq 1$$

mit Startwert $M_0 \equiv 0$.

11.6' Beispiel: (Doob-Meyer-Zerlegung von Submartingalen) Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Submartingal auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$. Die Submartingaleigenschaft liefert

$$E(X_j - X_{j-1} | \mathcal{F}_{j-1}) \geq 0 \quad \text{für jedes } j \geq 1;$$

folglich existiert ein *wachsender* vorhersehbarer Prozeß $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$A_n := \sum_{j=1}^n E(X_j - X_{j-1} | \mathcal{F}_{j-1}), \quad n \geq 1, \quad A_0 \equiv 0$$

und ein Martingal $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$M_n := \sum_{j=1}^n ((X_j - X_{j-1}) - E(X_j - X_{j-1} | \mathcal{F}_{j-1})), \quad n \geq 1$$

mit Startwert $M_0 \equiv 0$ so daß gilt

$$(*) \quad X_n = X_0 + M_n + A_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Zerlegung eines Submartingals $(*)$ in Form

$$\text{Startwert} + \text{vorhersehbarer wachsender Prozeß} + \text{Martingal}$$

nennt man *Doob-Meyer-Zerlegung*. Notwendig ist eine solche Zerlegung *eindeutig*:

sei A' ein anderer wachsender vorhersehbarer Prozeß und M' ein anderes Martingal, beide mit Start in 0, so daß zusätzlich zu $(*)$ auch

$$(**) \quad X_n = X_0 + M'_n + A'_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Setze $N_n := M_n - M'_n$, $V_n := A_n - A'_n$. Einerseits ist $N = (N_n)_n$ ein Martingal, also $E(N_n | \mathcal{F}_{n-1}) = N_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits ist $N_n = V_n$ \mathcal{F}_{n-1} -meßbar, folglich ist N_n selbst eine Festlegung der bedingten Erwartung $E(N_n | \mathcal{F}_{n-1})$, und damit gilt $N_n = N_{n-1}$ P -fast sicher. Dies gilt für jedes $n \geq 1$. Sukzessiv zurückgehend bis zum Startwert $N_0 = M_0 - M'_0 = 0$ erhält man $N_n = 0$ P -fast sicher für jedes $n \geq 1$. Also ist die Zerlegung eindeutig.

Im Beispiel 11.1 des Vermögens $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eines Glücksspielers – setze $X_n := S_n$ im Fall $m > 0$, und $X_n := -S_n$ im Fall $m < 0$ – hatte man also eine Doob-Meyer-Zerlegung des Submartingals $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ angeeignet. \square

Martingale können als 'sukzessive Prognosen an ein unendlich fernes Ziel' entstehen. Dieser Typ von Martingalen wird in der Folge eine wichtige Rolle spielen.

11.7 Satz: Sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sei $\mathcal{I} := (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine wachsende Folge von Sub- σ -Algebren von \mathcal{A} ; dann erhält man durch

$$M_n := E_P(X | \mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ein (P, \mathcal{I}) -Martingal $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Beweis: Per Definition ist jedes M_n eine \mathcal{F}_n -meßbare ZV; nach Jensen-Ungleichung bzw. nach 10.11 gilt $M_n \in L^1(P)$ für $n \geq 0$. Die Martingaleigenschaft von M bezüglich P und \mathcal{I} folgt aus

$$E_P(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(E(X | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = E(X | \mathcal{F}_n) = M_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad \square$$

Wir beenden das erste Teilkapitel mit einem Beispiel.

11.8 Beispiel: (Martingalstruktur in Verzweigungsprozessen)

1) Bereite vor \mathbb{N}_0 -wertige iid ZV $(\xi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) ; dabei sei $\xi_{1,1} \in L^1(P)$ und $m := E(\xi_{1,1}) > 0$. Definiere damit einen stochastischen Prozeß $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Werten in \mathbb{N}_0 :

$$X_0 := 1, \quad X_{n+1} := 1_{\{X_n > 0\}} \sum_{j=1}^{X_n} \xi_{n+1,j} + 0 \cdot 1_{\{X_n = 0\}}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Interpretiere $\xi_{n+1,j}$ als die Zahl von Nachkommen, mit der ein j -tes Individuum der Generation n zur Generation $n + 1$ beiträgt: damit ist $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein klassischer *Galton-Watson-Verzweigungsprozeß*, siehe z.B. Jagers (1975). Setze

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n), \quad n \geq 0$$

(insbesondere gilt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ da X_0 konstant): die Filtration $\mathcal{I} := (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ modelliert die Information, über die ein idealer Beobachter des Prozessverlaufs von X verfügt; dieser sieht die zeitliche Entwicklung der Generationsgrößen. Definiere

$$\mathcal{F}'_n := \sigma(\xi_{m,j} : 0 \leq m \leq n, j \geq 1), \quad n \geq 0$$

sicher gilt $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}'_n$ für jedes n , und die Filtration $\mathcal{I}' := (\mathcal{F}'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschreibt einen Beobachter, der zusätzlich zum Verlauf des Prozesses X individuelle Nachkommenszahlen kennt. Die Familie $\{\xi_{n+1,j} : j \geq 1\}$ ist unabhängig von \mathcal{F}'_n , damit erst recht unabhängig von \mathcal{F}_n , also gilt nach 10.9

$$E(\xi_{n+1,j} | \mathcal{F}_n) = E(\xi_{n+1,j}) = m.$$

2) Damit gilt für beliebiges $F \in \mathcal{F}_n$, mit $F_k := F \cap \{X_n = k\} \in \mathcal{F}_n$

$$\int_{F_k} X_{n+1} dP = \int_{F_k} \sum_{i=1}^k \xi_{n+1,i} dP = \int_{F_k} m k dP = \int_{F_k} m X_n dP$$

falls $k \geq 1$, und

$$\int_{F \cap \{X_n = 0\}} X_{n+1} dP = 0 = \int_{F \cap \{X_n = 0\}} m X_n dP.$$

Summation über $k \in \mathbb{N}_0$ liefert

$$\int_F X_{n+1} dP = \int_F m X_n dP, \quad \forall F \in \mathcal{F}_n.$$

Damit ist X ein (P, \mathbb{F}) -Martingal falls $m = 1$, d.h. falls jedes Individuum der Generation n mit im Mittel $m = 1$ Nachkommen zur Generation $n + 1$ beiträgt; für $m > 1$ ist X ein Submartingal, für $m < 1$ ein Supermartingal.

3) Betrachte nun $Y := (Y_n)_n$ definiert durch

$$Y_n := \frac{X_n}{m^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen

$$E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{m^{n+1}} E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{m X_n}{m^{n+1}} = Y_n$$

ist der Prozeß $Y := (Y_n)_n$ ein (P, \mathbb{F}) -Martingal mit Werten in $[0, \infty)$.

4) Die in 2) und 3) genannten Martingaleigenschaften von X bzw. von Y bleiben erhalten, wenn man von der Filtration \mathbb{F} zur größeren Filtration \mathbb{F}' übergeht. \square

B. Stopzeiten, Stopsätze

Stopzeiten sind 'Zufallszeiten' mit einer speziellen Struktur. Wir betrachten sie nur im Rahmen diskreter Zeit.

11.9 Definition: Sei (Ω, \mathcal{A}) ein meßbarer Raum; zu einer gegebenen Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in \mathcal{A} definiere

$$\bigvee_n \mathcal{F}_n := \sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n\right).$$

a) Eine Abbildung $T : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt \mathbb{F} -Stopzeit falls

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

b) Ist T eine \mathbb{F} -Stopzeit, so heißt

$$\mathcal{F}_T := \left\{ A \in \bigvee_n \mathcal{F}_n : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

σ -Algebra der Vergangenheit bis zur Zeit T .

Eine \mathbb{F} -Stopzeit T ist also eine zufällige Zeit, über die ein Beobachter mit Kenntnisstand \mathcal{F}_n zur Zeit n stets sagen kann, ob diese bereits eingetreten ist oder nicht.

11.10 Bemerkungen: a) Jede konstante Zeit $T \equiv m$, $m \in \mathbb{N}_0$, ist eine \mathbb{F} -Stopzeit.

a') Ist T eine \mathbb{F} -Stopzeit, so gehören auch die Ereignisse $\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n-1\}$, $n \geq 1$, und $\{T > n\} = \{T \leq n\}^c$, $n \geq 0$, zur σ -Algebra \mathcal{F}_n .

b) Für jede \mathbb{F} -Stopzeit T ist \mathcal{F}_T – wie in 11.9 b) definiert – wirklich eine σ -Algebra: man hat $\Omega \in \mathcal{F}_T$ da $\Omega \cap \{T \leq n\} = \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, nach Definition der Stopzeit; danach liegt mit $A \in \mathcal{F}_T$ auch $A^c = \Omega \setminus A$ in \mathcal{F}_T , wegen

$$A^c \cap \{T \leq n\} = \{T \leq n\} \setminus (A \cap \{T \leq n\}) \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

klar ist das in b) definierte Mengensystem \mathcal{F}_T abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen.

c) Für jede \mathbb{F} -Stopzeit T liegt das Ereignis $\{T = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \{T > n\}$ in der σ -Algebra $\bigvee_n \mathcal{F}_n$, damit auch das Ereignis $A \cap \{T = \infty\}$ für jedes $A \in \mathcal{F}_T$.

d) In diskreter Zeit kann man die in Definition 11.9 geforderten Eigenschaften folgendermaßen umschreiben: wegen $\{T \leq n\} = \bigcup_{j=0}^n \{T = j\}$ ist eine Abbildung $T : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}_0}$ genau dann eine $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ -Stopzeit falls gilt

$$\forall j \in \mathbb{N}_0 : \{T = j\} \in \mathcal{F}_j,$$

und die σ -Algebra der Vergangenheit bis zur Zeit T kann äquivalent als

$$\mathcal{F}_T = \left\{ A \in \bigvee_n \mathcal{F}_n : A \cap \{T = j\} \in \mathcal{F}_j \text{ für jedes } j \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

eingeführt werden. Beides gilt *nur* in diskreter Zeit. \square

11.11 Beispiele: Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozeß auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in (E, \mathcal{E}) , sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Filtration in \mathcal{A} , sei X adaptiert an \mathbb{F} .

a) Für jedes $F \in \mathcal{E}$ ist die *Treffzeit* oder *Zeit des ersten Besuchs* in F

$$T := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in F\} = \min\{n = 0, 1, 2, \dots : X_n \in F\}$$

(mit Konvention $\min \emptyset := +\infty$) eine \mathbb{F} -Stopzeit, denn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\{T = n\} = \{X_n \in F, X_j \notin F, 0 \leq j < n\} \in \mathcal{F}_n.$$

b) Für jedes $F \in \mathcal{E}$ ist die *Eintrittszeit* in F (beachte den Unterschied im Zeitpunkt 0)

$$S := \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \in F\} = \min\{n = 1, 2, \dots : X_n \in F\}$$

(mit Konvention $\min \emptyset := +\infty$) sowie sukzessiv definierte *Wiedereintrittszeiten* in F

$$S_0 \equiv 0, \quad S_1 := S, \quad S_m := \min\{n : n > S_{m-1}, X_n \in F\}, \quad m = 2, 3, \dots$$

\mathbb{F} -Stopzeiten. Dies sieht man induktiv. Wie in a) ist S_1 eine \mathbb{F} -Stopzeit. Ist für ein $m \geq 2$ schon S_{m-1} als \mathbb{F} -Stopzeit nachgewiesen, so ist auch S_m eine \mathbb{F} -Stopzeit, denn

$$\begin{aligned} \{S_m = n\} &= \bigcup_{k=1}^{n-1} \{S_{m-1} = k, S_m = n\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{n-1} (\{S_{m-1} = k\} \cap \{X_j \notin F, k < j < n\} \cap \{X_n \in F\}) \in \mathcal{F}_n. \end{aligned}$$

c) Für \mathcal{E} -meßbares $f : E \rightarrow [0, \infty)$ und festes Niveau $a > 0$ ist die *level crossing* Zeit

$$T' := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{j=0}^n f(X_j) > a\}$$

(mit $\min \emptyset := +\infty$) eine \mathbb{F} -Stopzeit: mit X ist auch $Y := \left(\sum_{j=0}^n f(X_j)\right)_n$ ein \mathbb{F} -adaptierter Prozeß, und T' ist die Zeit des ersten Besuchs des Prozesses Y in (a, ∞) . \square

11.12 Satz: Betrachte (Ω, \mathcal{A}) , $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, und \mathbb{F} -Stopzeiten $T, T_1, T_2, \dots : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}_0}$.

- a) T ist eine \mathcal{F}_T -meßbare Abbildung von Ω nach $\overline{\mathbb{N}_0}$.
- b) Aus $T_1 \leq T_2$ folgt $\mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$.
- c) $T_1 \wedge T_2, T_1 \vee T_2, \inf_{m \geq 1} T_m$ und $\sup_{m \geq 1} T_m$ sind \mathbb{F} -Stopzeiten.

Beweis: a) Wir zeigen $\{T \leq a\} \in \mathcal{F}_T$ für $a \in \mathbb{R}$ (vgl. 1.42). Sei o.E. $a \geq 0$, bezeichne $[a]$ die größte ganze Zahl $\leq a$. Da T \mathbb{F} -Stopzeit, gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$

$$(+) \quad \{T \leq a\} \cap \{T \leq n\} = \{T \leq (n \wedge [a])\} \in \mathcal{F}_{n \wedge [a]} \subset \mathcal{F}_n.$$

Vereinigung über alle $n \in \mathbb{N}_0$ liefert $\{T \leq a\} \in \bigvee_n \mathcal{F}_n$. Mit dieser Aussage liefert (+), per Definition der σ -Algebra \mathcal{F}_T , auch $\{T \leq a\} \in \mathcal{F}_T$ für alle $a \geq 0$. Damit ist T \mathcal{F}_T -meßbar.

b) Sei $A \in \mathcal{F}_{T_1}$. Dann gilt $A \cap \{T_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Für $T_1 \leq T_2$ folgt

$$A \cap \{T_2 \leq n\} = \underbrace{(A \cap \{T_1 \leq n\})}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T_2 \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n$$

und damit $A \in \mathcal{F}_{T_2}$.

c) Für $S := \sup_m T_m$ liegt das Ereignis $\{S > n\} = \bigcup_m \{T_m > n\}$ in \mathcal{F}_n , damit auch $\{S \leq n\} = \{S > n\}^c$, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Für $S := \inf_m T_m$ betrachtet man für jedes n

$$\{S \leq n\} = \{S < n + 1\} = \bigcup_m \{T_m < n + 1\} = \bigcup_m \{T_m \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Genauso argumentiert man für $T_1 \wedge \dots \wedge T_\ell$ oder $T_1 \vee \dots \vee T_\ell$, für endliches ℓ . \square

11.13 Satz: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0})$ einen reellwertigen \mathbb{F} -adaptierten stochastischen Prozeß $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und eine \mathbb{F} -Stopzeit T . Dann ist der Zustand von X zur Zeit T

$$X_T := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} X_n 1_{\{T=n\}}$$

eine \mathcal{F}_T -meßbare Zufallsvariable $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (beachte: die hier gegebene Definition impliziert

$$X_T := 0 \text{ auf } \{T = \infty\}$$

und bezieht sich explizit auf einen Prozeß X , dessen Indexmenge den Punkt $+\infty$ nicht enthält).

Beweis: Da X \mathbb{F} -adaptiert und T eine \mathbb{F} -Stopzeit ist, muß

$$X_T = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} X_n 1_{\{T=n\}} + 0 \cdot 1_{\{T=\infty\}}$$

zunächst $\bigvee_n \mathcal{F}_n$ -meßbar sein. Also gilt $\{X_T \in B\} \in \bigvee_n \mathcal{F}_n$ für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, und dann weiter

$$\{X_T \in B\} \cap \{T = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Gemäß Definition 11.9 und 11.10 c) ist damit gezeigt, daß $\{X_T \in B\}$ zur σ -Algebra \mathcal{F}_T der Vergangenheit bis T gehört. Damit ist X_T eine \mathcal{F}_T -meßbare Zufallsvariable. \square

11.13' Satz: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0})$ einen reellwertigen \mathbb{F} -adaptierten stochastischen Prozeß $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und eine \mathbb{F} -Stopzeit T . Dann ist

$$X^T := (X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}_0}$$

ein \mathbb{F} -adaptierter stochastischer Prozeß: X^T heißt *der zur Zeit T gestoppte* oder *der zur Zeit T eingefrorene Prozeß*.

Beweis: Es gilt $X_0^T = X_0$, und für $n \geq 1$ und jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\{X_n^T \in B\} = \bigcup_{j=0}^n \left(\underbrace{\{X_j \in B\}}_{\in \mathcal{F}_j} \cap \underbrace{\{T=j\}}_{\in \mathcal{F}_j} \right) \cup \left(\underbrace{\{X_n \in B\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T > n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \right) \in \mathcal{F}_n. \quad \square$$

11.14 Satz: Betrachte $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$, sei T eine \mathbb{F} -Stopzeit. Ist dann $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein (P, \mathbb{F}) -Martingal (Submartingal, Supermartingal), so ist auch der zur Zeit T gestoppte Prozeß X^T ein (P, \mathbb{F}) -Martingal (Submartingal, Supermartingal).

Beweis: Sei X ein Martingal oder ein Supermartingal bezüglich P und \mathbb{F} . Nach 11.13' ist der zur Zeit T gestoppte Prozeß X^T \mathbb{F} -adaptiert; wegen $|X_{T \wedge n}| \leq |X_0| + \dots + |X_n|$ ist jede Variable X_n^T in $L^1(P)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}^T - X_n^T | \mathcal{F}_n) &= E(X_{T \wedge (n+1)} - X_{T \wedge n} | \mathcal{F}_n) \\ &= E(0 \cdot 1_{\{T \leq n\}} + (X_{n+1} - X_n) 1_{\{T > n\}} | \mathcal{F}_n) \\ &= 1_{\{T > n\}} E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

da $\{T > n\} = \{T \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$ nach Definition einer Stopzeit. Damit folgt

$$\left\{ \begin{array}{l} E(X_{n+1}^T | \mathcal{F}_n) \leq X_n^T \\ E(X_{n+1}^T | \mathcal{F}_n) = X_n^T \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} X \text{ Supermartingal} \\ X \text{ Martingal} \end{array} \right.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ist X ein Submartingal, so ist $-X$ ein Supermartingal. □

11.15 Stopsatz für beschränkte Stopzeiten (Doob): Betrachte einen stochastischen Prozeß $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$ mit der Eigenschaft

$$X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ ist ein } (P, \mathbb{F})\text{-Martingal (Submartingal, Supermartingal) .}$$

a) Für *beschränkte* \mathbb{F} -Stopzeiten $S \leq T$ gilt X_S, X_T in $L^1(P)$ und

$$E(X_T | \mathcal{F}_S) \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ = \\ \leq \end{array} \right\} X_S \text{ falls } X \left\{ \begin{array}{l} \text{Submartingal} \\ \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} . \end{array} \right.$$

b) Ist $(T_j)_j$ eine aufsteigende Folge *beschränkter* Stopzeiten und setzt man

$$\tilde{X}_j := X_{T_j}, \quad \tilde{\mathcal{F}}_j := \mathcal{F}_{T_j}$$

(Zeittransformation durch *beschränkte* Stopzeiten), so gilt

$$\tilde{X} := (\tilde{X}_j)_j \text{ ist ein } \left\{ \begin{array}{l} \text{Submartingal} \\ \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \end{array} \right\} \text{ bezüglich } (P, \tilde{\mathbb{F}}), \text{ mit } \tilde{\mathbb{F}} := (\tilde{\mathcal{F}}_j)_j .$$

Beweis: Es reicht, Martingale und Supermartingale zu betrachten.

a) Betrachte Stopzeiten S, T beschränkt durch $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt dann $X_T = X_k^T$. Klar $|X_S| \leq |X_0| + \dots + |X_k|$, also $X_S \in L^1(P)$; genauso $X_T \in L^1(P)$. Sei nun $S \leq T$ und $C \in \mathcal{F}_S$. Sicher gilt $C \cap \{S = j\} \in \mathcal{F}_j$, $0 \leq j \leq k$, nach Definition von \mathcal{F}_S . Zugleich hat man aber auch $C \cap \{S = j\} \in \mathcal{F}_S$ nach 11.12 a). Wegen $S \leq T$ und 11.14 für den gestoppten Prozeß X^T folgt

$$\begin{aligned} \int_{C \cap \{S=j\}} (X_T - X_S) dP &= \int_{C \cap \{S=j\}} (X_T - X_j) dP \\ &= \int_{C \cap \{S=j\}} (X_k^T - X_j^T) dP \quad \left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \text{ falls } X \text{ Supermartingal} \\ = 0 \text{ falls } X \text{ Martingal} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Summation über $j = 0, 1, \dots, k$ liefert

$$E(1_C X_T) \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ = \end{array} \right\} E(1_C X_S) \text{ für alle } C \in \mathcal{F}_S$$

und damit die Behauptung.

b) folgt sofort aus a) und 11.13. □

11.16 Bemerkung: Für unbeschränkte \mathcal{F} -Stopzeiten wird die Aussage von 11.15 i.a. falsch. Zwei typische Beispiele illustrieren dies.

a) Das asymptotische Verhalten des Verzweigungsprozesses X aus Beispiel 11.8 ist bekannt; wir setzen voraus, daß die Reproduktionsvariablen die Bedingung $\xi_{1,1} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ erfüllen.

Im 'kritischen' Fall $m = 1$ ist $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nach 11.8 ein Martingal mit $X_0 \equiv 1$; zugleich weiß man, daß X im Fall $m = 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1 aussterben wird: es gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} P(X_n = 0 \text{ für schließlich alle } n) = 1, \\ P(X_n > 0) \sim \text{cst} \cdot \frac{1}{n} \text{ für } n \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

(siehe Jagers, 1975, p. 25). Damit ist die Aussterbezeit

$$T := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = 0\}$$

eine \mathcal{F} -Stopzeit, welche P -fast sicher endlich, aber nicht beschränkt ist. Also erfüllt T nicht die in 11.15 a) gemachte Voraussetzung.

Für den Zustand des Verzweigungsprozesses X zur Zeit T gilt $X_T \equiv 0$ P -fast sicher. Trivialerweise ist auch $R \equiv 0$ eine \mathcal{F} -Stopzeit, und es gilt $X_R = X_0 \equiv 1$. Beides zusammen ergibt

$$R \leq T, \quad X_R = 1 \neq 0 = E(X_T | \mathcal{F}_R).$$

b) Ein weiteres Beispiel liefert die Folge von Glücksspielen aus Beispiel 11.1, wobei wir zusätzlich voraussetzen, daß für das Einzelspiel die Bedingung $Y_1 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ erfüllt sei.

Im 'fairen' Fall $m = 0$ ist $S = (S_n)_n$ ein Martingal mit $S_0 \equiv 0$. Man weiß, daß die \mathbb{F} -Stopzeit

$$T := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \geq 10^6\},$$

zu der das Vermögen des Spielers zum erstenmal die Millionengrenze überschreitet, eine P -fast sicher endliche, aber unbeschränkte Stopzeit ist: es gilt

$$P(T > t) \sim cst t^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

(cf. Bingham, Goldie und Teugels, 1987, Section 8.9; insbesondere: Theorem 8.9.12 (iii) auf S. 381). Also erfüllt T nicht die in 11.15 a) gemachte Voraussetzung.

Es gilt $S_T \geq 10^6$ P -fast sicher, also auch $E(S_T | \mathcal{F}_0) \geq 10^6$: mit der trivialen Stopzeit $R \equiv 0$ entsteht wegen $S_0 \equiv 0$ die Situation

$$R \leq T, \quad S_R = 0 < 10^6 \leq E(S_T | \mathcal{F}_R). \quad \square$$

In *nichtnegativen Supermartingalen* dagegen als Ausnahmesituation bleibt der Stopsatz 11.15 auch mit unbeschränkten Stopzeiten gültig:

11.17 Satz: Ist X in 11.15 ein nichtnegatives (P, \mathbb{F}) -Supermartingal, so gilt $X_S \geq E(X_T | \mathcal{F}_S)$ in 11.15 a) sogar für *beliebige* \mathbb{F} -Stopzeiten $S \leq T$, und Transformation durch *beliebige* aufsteigende Folgen $(T_j)_j$ von \mathbb{F} -Stopzeiten wie in 1.15 b) liefert wieder ein nichtnegatives Supermartingal.

Beweis: In einem nichtnegativen Prozeß $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gilt

$$\begin{aligned} S(\omega) < \infty : \lim_{n \rightarrow \infty} X_{S \wedge n}(\omega) &= X_S(\omega), \\ S(\omega) = \infty : X_{S \wedge n}(\omega) = X_n(\omega) &\geq 0 = X_S(\omega) \quad \text{für alle } n, \end{aligned}$$

weil X_S nach Definition 1.13 auf dem Ereignis $\{S = \infty\}$ den Wert 0 annimmt. Also hat man in einem nichtnegativen Prozeß X

$$X_S \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(X_{S \wedge n})$$

und mit Fatou 2.8 und Stopsatz für beschränkte Stopzeiten 11.15 a)

$$E(X_S) \leq E(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_{S \wedge n}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(X_{S \wedge n}) \leq E(X_0) < \infty.$$

Da X_S nichtnegativ ist, zeigt dies $X_S \in L^1(P)$. Genauso erhält man $X_T \in L^1(P)$.

Es bleibt zu zeigen: Sind S, T \mathcal{F} -Stopzeiten mit $S \leq T$, so gilt $X_S \geq E_P(X_T | \mathcal{F}_S)$. Wir zeigen dies in der Form

$$(*) \quad \forall A \in \mathcal{F}_S : \int_A X_S dP \geq \int_A X_T dP .$$

Betrachte also \mathcal{F} -Stopzeiten $S \leq T$, sei $A \in \mathcal{F}_S$. Für jedes n gilt dann auch $A \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_{S \wedge n}$:

$$\forall \ell \in \mathbb{N}_0 : (A \cap \{S \leq n\}) \cap \{S \wedge n \leq \ell\} = \underbrace{(A \cap \{S \leq n\})}_{\in \mathcal{F}_S} \cap \{S \leq \ell\} \in \mathcal{F}_\ell .$$

Mit 11.15 a) für die beschränkten \mathcal{F} -Stopzeiten $S \wedge n \leq T \wedge n$ folgt dann

$$\begin{aligned} \int_{A \cap \{S \leq n\}} X_S dP &= \int_{A \cap \{S \leq n\}} X_{S \wedge n} dP \\ &\geq \int_{A \cap \{S \leq n\}} X_{T \wedge n} dP \quad (11.15 \text{ a) für das Supermartingal } X) \\ &\geq \int_{A \cap \{T \leq n\}} X_{T \wedge n} dP \quad (\text{wegen } S \leq T \text{ und } X_{T \wedge n} \geq 0) \\ &= \int_{A \cap \{T \leq n\}} X_T dP . \end{aligned}$$

Läßt man nun auf beiden Seiten dieser Ungleichungskette n gegen ∞ streben, erhält man mit dominierter Konvergenz

$$(**) \quad \forall A \in \mathcal{F}_S : \int_{A \cap \{S < \infty\}} X_S dP \geq \int_{A \cap \{T < \infty\}} X_T dP .$$

Beachtet man $X_S = 0$ auf $\{S = \infty\}$ und $X_T = 0$ auf $\{T = \infty\}$ nach 11.13, so ist mit (**) auch (*) gezeigt. \square

Bemerkung: Startet man in 11.17 insbesondere mit einem nichtnegativen \mathcal{F} -Martingal X , so wird bei Zeittransformation durch eine aufsteigende Folge beliebiger \mathcal{F} -Stopzeiten $(T_j)_j$ die Martingaleigenschaft im allgemeinen verlorengehen. Ein Beispiel liefert der Verzweigungsprozeß mit $m = 1$ in 11.16 a): der mit $T_0 \equiv 0, T_1 = T, \dots$ wie dort zeittransformierte Prozeß ist nur noch ein Supermartingal $(X_{T_j})_j$ bezüglich der zeittransformierten Filtration $(\mathcal{F}_{T_j})_j$.

C. Doob-Ungleichung und 'aufsteigende Überquerungen'

Die Ungleichung von J.L. Doob und seine Abschätzung der Anzahl der 'aufsteigenden Überquerungen' (1940/1953) ist der Schlüssel zu allen Martingalkonvergenzsätzen.

11.18 Doob-Ungleichung: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Sub- oder Supermartingal bezüglich $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, auf (Ω, \mathcal{A}, P) . Sei J eine *endliche* Teilmenge von \mathbb{N}_0 , setze

$$\beta := \max\{n : n \in J\}, \quad \alpha := \min\{n : n \in J\},$$

sei $r > 0$ beliebig.

i) Ist X ein *Submartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\max_{n \in J} X_n > r) \leq \int_{\{\max_{n \in J} X_n > r\}} X_\beta dP \leq E(X_\beta^+).$$

ii) Ist X ein *Supermartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\max_{n \in J} X_n > r) \leq E(X_\alpha) - \int_{\{\max_{n \in J} X_n \leq r\}} X_\beta dP.$$

iii) Ist X ein *nichtnegatives Supermartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\max_{n \in J} X_n > r) \leq E(X_\alpha).$$

Beweis: Notwendig gilt $\alpha, \beta \in J$ da J endlich. Definiere

$$T := \min\{n \in J : X_n > r\}$$

(mit $\min \emptyset := +\infty$). Dann ist T eine \mathcal{F} -Stopzeit, denn für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\{T \leq \ell\} = \bigcup_{n \leq \ell, n \in J} \{X_n > r\} \in \mathcal{F}_\ell.$$

Für diese gilt $\{\max_{n \in J} X_n > r\} = \{T \leq \beta\}$ und $X_T > r$ auf $\{T \leq \beta\}$, damit

$$\begin{aligned} r \cdot P(\max_{n \in J} X_n > r) &= r \cdot P(T \leq \beta) \leq \int_{\{T \leq \beta\}} X_T dP = \int_{\{T \leq \beta\}} X_{T \wedge \beta} dP \\ (1) \quad &= \int_{\Omega} (X_{T \wedge \beta} - X_\beta) dP + \int_{\{T \leq \beta\}} X_\beta dP \\ (2) \quad &= E(X_{T \wedge \beta}) - \int_{\{T > \beta\}} X_\beta dP. \end{aligned}$$

Der Stopsatz für beschränkte Stopzeiten 11.15 schließt nun den Beweis ab: ist X ein Submartingal, gilt in dieser Ungleichungskette in (1)

$$\int_{\Omega} (X_{T \wedge \beta} - X_\beta) dP \leq 0$$

und das ist die Aussage 11.18 i); ist X ein Supermartingal, so gilt in (2)

$$E(X_{T \wedge \beta}) \leq E(X_\alpha)$$

und damit 11.18 ii); iii) folgt sofort aus ii). \square

Wir formulieren eine nützliche Variante, die für Indexmengen I der Art $\mathcal{Q} \cap [0, N]$, $N \in \mathbb{N}$, interessant ist.

11.19 Folgerung: Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $I \subset [0, \infty]$ eine abzählbare Indexmenge mit

$$\alpha := \inf\{t : t \in I\} \in I, \quad \beta := \sup\{t : t \in I\} \in I.$$

Sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein Sub- oder ein Supermartingal bezüglich $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$. Dann bleiben die Abschätzungen aus 11.18 gültig, falls man überall ' $\max_{n \in J} X_n$ ' durch ' $\sup_{t \in I} X_t$ ' ersetzt:

i) Ist X ein *Submartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\sup_{t \in I} X_t > r) \leq \int_{\{\sup_{t \in I} X_t > r\}} X_\beta dP \leq E(X_\beta^+).$$

ii) Ist X ein *Supermartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\sup_{t \in I} X_t > r) \leq E(X_\alpha) - \int_{\{\sup_{t \in I} X_t \leq r\}} X_\beta dP.$$

iii) Ist X ein *nichtnegatives Supermartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\sup_{t \in I} X_t > r) \leq E(X_\alpha).$$

Beweis: Wähle eine Folge endlicher Teilmengen $J_n \subset I$ mit $J_n \uparrow I$ für $n \rightarrow \infty$, setze

$$\alpha_n := \min J_n, \quad \beta_n := \max J_n.$$

Für $n \rightarrow \infty$ gilt $\alpha_n \downarrow \alpha$, $\beta_n \uparrow \beta$, und

$$F_n := \{\max_{t \in J_n} X_t > r\} \uparrow \{\sup_{t \in I} X_t > r\} =: F$$

für festes $r > 0$. Aufsteigende Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen liefert also

$$r \cdot P(\max_{t \in J_n} X_t > r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r \cdot P(\sup_{t \in I} X_t > r), \quad n \rightarrow \infty.$$

Ist X ein Submartingal, kann man für jede endliche Indexmenge J_n die rechte Seite der Ungleichung 11.18 i) wegen $F_n = \{\max_{t \in J_n} X_t > r\} \in \mathcal{F}_{\beta_n}$ fortsetzen zu einer Abschätzung

$$\int_{F_n} X_{\beta_n} dP \leq \int_{F_n} X_{\beta} dP ,$$

und hat mit dominierter Konvergenz für $n \rightarrow \infty$ nach Definition von $F = \{\sup_{t \in I} X_t > r\}$ und wegen $\beta \in I$

$$\int_{F_n} X_{\beta} dP \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_F X_{\beta} dP .$$

Zusammen erhält man für ein Submartingal X : aus 1.18 i) für jedes J_n und $J_n \uparrow I$ folgt

$$r \cdot P(\sup_{t \in I} X_t > r) \leq \int_{\{\sup_{t \in I} X_t > r\}} X_{\beta} dP \leq E(X_{\beta}^+) .$$

Ist X ein Supermartingal, kann man für jedes J_n das Integral auf der rechten Seite von 11.18 ii) mit demselben Argument weiter abschätzen durch

$$\int_{F_n^c} X_{\beta_n} dP \geq \int_{F_n^c} X_{\beta} dP \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{F^c} X_{\beta} dP ;$$

klar gilt in diesem Fall auch

$$E(X_{\alpha_n}) \leq E(X_{\alpha}) \quad \forall n$$

wegen $\alpha \in I$. Aus 1.18 ii) für jedes J_n und $J_n \uparrow I$ folgt also

$$r \cdot P(\sup_{t \in I} X_t > r) \leq E(X_{\alpha}) - \int_{\{\sup_{t \in I} X_t \leq r\}} X_{\beta} dP . \quad \square$$

Die in 11.19 gemachte Voraussetzung 'sup $I \in I$ ' gilt sicherlich nicht für Indexmengen der Art $I = [0, 1) \cap \mathcal{Q}$ oder $I = \mathbb{N}_0$. Damit erhebt sich die Frage: kann man in Martingalen, Sub- oder Supermartingalen Indexmengen durch Hinzufügen von sup I in sinnvoller Weise 'abschließen'?

11.20 Definition: (Abschluß eines Martingals, Submartingals oder Supermartingals) Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}, P)$ mit Indexmenge $I \subset \mathbb{R}$ ein (P, \mathbb{F}) -Martingal (Submartingal, Supermartingal) $X = (X_t)_{t \in I}$. Betrachte

$$\beta := \sup\{t : t \in I\} \notin I, \quad \bar{I} := I \cup \{\beta\} \subset \overline{\mathbb{R}} .$$

Gibt es eine sinnvolle Ergänzung $(X_\beta, \mathcal{F}_\beta)$ 'nach rechts', mit der die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ zu $(\mathcal{F}_t)_{t \in \bar{I}}$ und der Prozeß $(X_t)_{t \in I}$ zu $(X_t)_{t \in \bar{I}}$ so fortgesetzt werden kann, daß gilt

$(X_t)_{t \in \bar{I}}$ ist ein Martingal (Submartingal, Supermartingal) bezüglich $(P, (\mathcal{F}_t)_{t \in \bar{I}})$,

so heißt $((X_t)_{t \in \bar{I}}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \bar{I}})$ *Abschluß* des Martingals (Sub-, Supermartingals) $((X_t)_{t \in I}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$.

11.20' Beispiel: Das Martingal $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus 1.7

$$M_n := E_P(X | \mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

welches durch Vorgabe einer Zufallsvariable $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in \mathcal{A} entsteht, erlaubt einen Abschluß auf zwei Weisen:

i) durch $\beta := +\infty$, $\mathcal{F}_\beta := \mathcal{A}$ und $M_\beta := X$;

ii) durch $\beta := +\infty$, $\mathcal{F}_\beta := \bigvee_n \mathcal{F}_n$ (Notation aus 11.9) und $M_\beta := E_P(X | \bigvee_n \mathcal{F}_n)$. □

Ein Abschluß im Sinne von 11.20 muß keineswegs existieren. In Teilkapitel D werden wir sehen (Satz 11.33), daß *gleichgradig integrable* Martingale $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ stets einen Abschluß durch

$$(1.20'') \quad \mathcal{F}_\infty := \bigvee_n \mathcal{F}_n \quad \text{zusammen mit einer } \bigvee_n \mathcal{F}_n\text{-meßbaren Limesvariable } X_\infty$$

erlauben. Ab jetzt wird für Indexmenge $I = \mathbb{N}_0$ die Bezeichnung \mathcal{F}_∞ ausschließlich für die in (1.20'') definierte σ -Algebra $\bigvee_n \mathcal{F}_n$ reserviert sein.

11.21 Bemerkung: ('Abschluß nach links') Martingale mit Indexmenge $I \subset \mathbb{R}$ so daß

$$\alpha := \inf\{t : t \in I\} \notin I, \quad \bar{I} := \{\alpha\} \cup I \subset \bar{\mathbb{R}}$$

kann man stets 'nach links' abschließen (typische Beispiele solcher Indexmengen sind

$$(*) \quad I := \{t \in \mathbb{R} : t = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{oder} \quad I := \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

mit $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = -\infty$). Betrachte ein Martingal $X = (X_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}, P)$. Für α wie oben setzt man

$$\mathcal{F}_\alpha := \bigcap_{s \in I} \mathcal{F}_s, \quad M_\alpha := E(M_{t_0} | \mathcal{F}_\alpha)$$

für ein beliebiges $t_0 \in I$, und erhält ein Martingal $(M_t)_{t \in \bar{I}}$ bezüglich $(P, (\mathcal{F}_t)_{t \in \bar{I}})$.

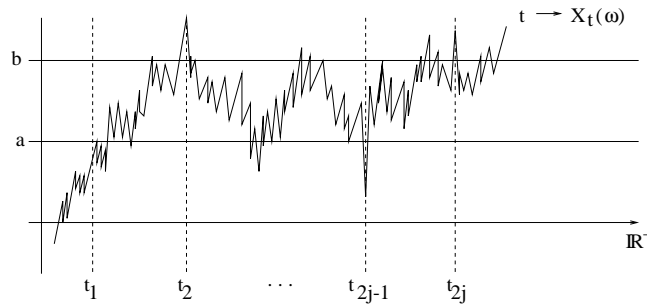
Martingale $((M_t)_{t \in I}, (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$ mit Indexmengen vom Typ $(*)$ nennt man manchmal 'Rückwärtsmartingale'; dies ist jedoch ein schlimmer sprachlicher Lapsus, denn auch bei Indexmengen vom Typ $(*)$ gilt die Martingaleigenschaft stets *vorwärts in der Zeit wie in 11.4 definiert*. \square

Martingalkonvergenzsätze (siehe Teilkapitel D) beruhen auf Abschätzungen für die 'Anzahl aufsteigender Überquerungen' im Pfad $I \ni t \rightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}$ eines Martingals (Submartingals, Supermartingals) $X = (X_t)_{t \in I}$.

11.22 Definition: Sei $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ endlich oder abzählbar, sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein reellwertiger stochastischer Prozeß auf (Ω, \mathcal{A}) , sei $-\infty < a < b < +\infty$. Für $\omega \in \Omega$ setze

$$N_{ab}^I(\omega) := \sup \{ \ell \in \mathbb{N}_0 : \begin{array}{l} \text{es existieren } t_1 < t_2 < \dots < t_{2\ell-1} < t_{2\ell} \in I \\ \text{so daß } \left\{ \begin{array}{l} X_{t_{2j-1}}(\omega) < a \\ X_{t_{2j}}(\omega) > b \end{array} \right\} \text{ für } 1 \leq j \leq \ell \} . \end{array}$$

N_{ab}^I heißt die Anzahl aufsteigender Überquerungen des Streifens $[a, b]$ entlang I .



11.23 Hauptsatz über 'aufsteigende Überquerungen' (Doob): Sei $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ endlich oder abzählbar, sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein Submartingal bezüglich $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ auf (Ω, \mathcal{A}, P) .

a) Für jede *endliche Teilmenge* J von I mit $\beta := \max\{t : t \in J\}$ und $\alpha := \min\{t : t \in J\}$ gilt : N_{ab}^J ist eine \mathcal{F}_β -meßbare Zufallsvariable $\Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

$$E(N_{ab}^J) \leq \frac{1}{b-a} (E(X_\beta) - E(X_\alpha) + E((X_\beta - a)^-)).$$

b) N_{ab}^I ist eine $\overline{\mathbb{N}_0}$ -wertige Zufallsvariable auf (Ω, \mathcal{A}) .

c) Unter den Voraussetzungen

$$(11.24) \quad \sup_{t \in I} E(X_t) < \infty, \quad \sup_{t \in I} E(X_t^-) < \infty$$

gibt es eine Konstante $K < \infty$ so daß

$$E(N_{ab}^I) \leq \frac{1}{b-a}(K + |a|) \quad \text{für jede Wahl von } -\infty < a < b < +\infty .$$

d) Ist I unendlich, so gibt es unter der Voraussetzung (11.24) eine P -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ so daß

$$\omega \notin N \implies \begin{cases} \text{für jeden Häufungspunkt } \gamma \text{ von } I \\ \text{und jede monotone Folge } t_n \rightarrow \gamma, (t_n)_n \subset I : \\ \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(\omega) \text{ existiert in } \overline{\mathbb{R}} . \end{cases}$$

Bemerkung: Die Aussage d) ist wichtig für $I = \mathbb{N}_0$ mit Häufungspunkt $\gamma = +\infty$, wird aber erst recht interessant für Indexmengen der Art $\mathcal{Q} \cap [0, \infty)$ oder $\mathcal{Q} \cap [0, N]$, $N \in \mathbb{N}$, die in \mathbb{R}^+ oder in kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^+ dicht liegen ...

Beweis: 1) Betrachte zuerst nur eine feste endliche Teilmenge $J \subset I$. Für diese sind $\beta := \max\{t : t \in J\}$ und $\alpha := \min\{t : t \in J\}$ in J . Bildet man ähnlich wie in 11.11 b) eine wachsende Folge beschränkter \mathbb{F} -Stopzeiten durch $\tau_0 \equiv \alpha$,

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= \min\{t \in J : X_t < a\} \wedge \beta , \\ \tau_2 &:= \min\{t \in J : t > \tau_1, X_t > b\} \wedge \beta , \\ &\dots \\ \tau_{2j-1} &:= \min\{t \in J : t > \tau_{2(j-1)}, X_t < a\} \wedge \beta , \\ \tau_{2j} &:= \min\{t \in J : t > \tau_{2j-1}, X_t > b\} \wedge \beta , \\ &\dots \end{aligned}$$

dann werden wegen der Endlichkeit von J alle aufsteigenden Überquerungen des Streifens $[a, b]$ im Pfad $\{X(t, \omega) : t \in J\}$ durch Paare (τ_{2j-1}, τ_{2j}) mit $\tau_{2j-1} < \tau_{2j}$ und $X_{\tau_{2j}} > b$ erfaßt, und

$$N_{ab}^J = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{\tau_{2j-1} < \tau_{2j}, X_{\tau_{2j}} > b\}} .$$

Insbesondere ist N_{ab}^J eine \mathcal{F}_β -meßbare Zufallsvariable (dies sieht man mit 11.12+11.13: die durch β beschränkten Stopzeiten τ_{2j-1} bzw. τ_{2j} sind $\mathcal{F}_{\tau_{2j-1}}$ - bzw. $\mathcal{F}_{\tau_{2j}}$ -meßbare Zufallsvariable, damit \mathcal{F}_β -meßbar, also gilt $\{\tau_{2j-1} < \tau_{2j}\} \in \mathcal{F}_\beta$; zugleich ist $X_{\tau_{2j}}$ eine \mathcal{F}_β -meßbare Zufallsvariable, also liegt jedes der Ereignisse $\{\tau_{2j-1} < \tau_{2j}, X_{\tau_{2j}} > b\}$ in der σ -Algebra \mathcal{F}_β).

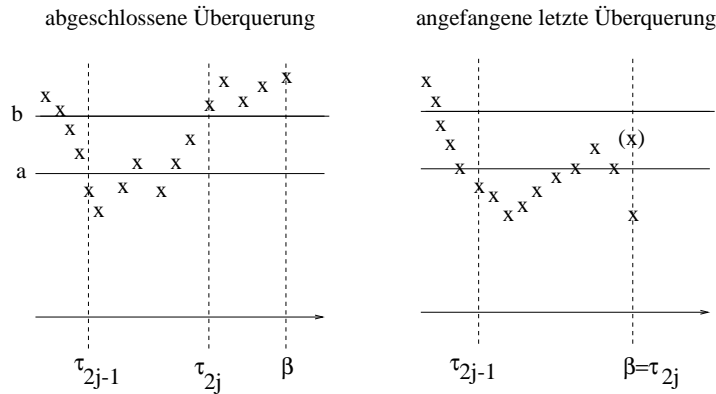
Doob's Stopsatz 11.15 für beschränkte Stopzeiten im Submartingal $(X_t)_{t \in I}$ zeigt

$$\begin{aligned} E(X_\beta) - E(X_\alpha) &\geq E(X_{\tau_{2\ell}}) - E(X_{\tau_0}) = \sum_{j=1}^{\ell} E(X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2(j-1)}}) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \left\{ E(X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}}) + \underbrace{E(X_{\tau_{2j-1}} - X_{\tau_{2(j-1)}})}_{\geq 0 \text{ nach 11.15}} \right\} \\ &\geq \sum_{j=1}^{\ell} E(X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}}) \end{aligned}$$

für beliebiges $\ell \geq 1$. Nach Definition der Stopzeiten τ_{2j-1} bzw. τ_{2j} gilt aber

$$\begin{aligned} X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}} &\geq b - a && \text{falls } \tau_{2j-1} < \tau_{2j}, X_{\tau_{2j}} > b \\ X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}} &\geq -(X_\beta - a)^- && \text{falls } \tau_{2j-1} < \tau_{2j}, X_{\tau_{2j}} \leq b \\ X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}} &= 0 && \text{falls } \tau_{2j-1} = \tau_{2j} \end{aligned}$$

wobei die erste dieser drei Zeilen einer vollendeten Überquerung des Streifens $[a, b]$ entspricht, die zweite einer vor der Zeit β begonnenen, aber zur Zeit β unvollendeten Überquerung:



(für eine solche gilt $X_\beta = X_{\tau_{2j}}$ zusammen mit der Abschätzung

$$X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}} \geq 0 \cdot 1_{\{X_\beta \geq X_{\tau_{2j-1}}\}} - (X_\beta - X_{\tau_{2j-1}})^- 1_{\{X_\beta < X_{\tau_{2j-1}}\}} \geq -(X_\beta - a)^-$$

der Negativteile). Die dritte der obengenannten Zeiten entspricht einem Indexpaar, für das beide Stopzeiten τ_{2j-1}, τ_{2j} bereits an $\beta = \max J$ trunziert und damit 'trivial' sind. Zusammen ergibt sich aus der obenstehenden Ungleichungskette

$$E(X_\beta) - E(X_\alpha) \geq (b - a) E(N_{ab}^J) - E((X_\beta - a)^-)$$

und damit die Aussage a) des Satzes.

2) Für eine abzählbare Indexmenge $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ wählt man wieder eine aufsteigende Folge endlicher Teilmengen $J_n \subset I$, $J_n \uparrow I$, und schreibt $\alpha_n := \min\{t : t \in J_n\}$, $\beta_n := \max\{t : t \in J_n\}$ wie in 1). Dann erhält man N_{ab}^I als aufsteigenden Limes \mathcal{F}_{β_n} -meßbarer Zufallsvariablen

$$N_{ab}^I = \lim_{n \rightarrow \infty} N_{ab}^{J_n};$$

insbesondere ist damit N_{ab}^I eine \mathcal{A} -meßbare $\overline{\mathbb{N}}_0$ -wertige Zufallsvariable, und es gilt nach 1)

$$E(N_{ab}^I) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(N_{ab}^{J_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{b-a} (E(X_{\beta_n}) - E(X_{\alpha_n}) + E((X_{\beta_n} - a)^-)) \right].$$

Unter Voraussetzung (11.24) gibt es dafür obere Schranken, die nicht mehr von n abhängen:

$$\begin{aligned} E(X_{\beta_n}) &\leq \sup_{t \in I} E(X_t) < \infty \\ -E(X_{\alpha_n}) &= -E(X_{\alpha_n}^+ - X_{\alpha_n}^-) \leq E(X_{\alpha_n}^-) \leq \sup_{t \in I} E(X_t^-) < \infty \\ E((X_{\beta_n} - a)^-) &\leq E(X_{\beta_n}^-) + |a| \leq \sup_{t \in I} E(X_t^-) + |a| \end{aligned}$$

womit die Aussagen b)+c) des Satzes (mit $K := 2 \sup_{t \in I} E(X_t^-) + \sup_{t \in I} E(X_t^+)$) bewiesen sind.

3) Sei nun I nicht endlich und sei $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von I . Betrachte aufsteigende Konvergenz $t \uparrow \gamma$, $t \in I$, und definiere

$$N^\gamma := \left\{ \omega \in \Omega : -\infty \leq \liminf_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega) < \limsup_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega) \leq +\infty \right\} \in \mathcal{A}.$$

Für jedes $\omega \in N^\gamma$ kann man ein geeignetes (auf ω zugeschnittenes) Paar rationaler Zahlen zwischen $\liminf_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega)$ und $\limsup_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega)$ einschieben: dies bedeutet

$$N^\gamma = \bigcup_{\substack{a < b \\ a, b \in \mathcal{Q}}} \left\{ \omega \in \Omega : \liminf_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega) < a < b < \limsup_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega) \right\}.$$

Aus dieser Darstellung wird klar, daß es für jedes $\omega \in N^\gamma$ einen geeigneten Streifen $[a, b]$ gibt, den der ω -Pfad $t \rightarrow X_t(\omega)$ für $t \uparrow \gamma$, $t \in I$, unendlich oft aufsteigend überquert. Damit gilt

$$(\diamond) \quad N^\gamma \subset \bigcup_{\substack{a < b \\ a, b \in \mathcal{Q}}} \{ \omega \in \Omega : N_{a,b}^I(\omega) = +\infty \} =: N \in \mathcal{A}.$$

Die auf der rechten Seite definierte Menge $N \in \mathcal{A}$ ist unter der Voraussetzung (11.24) notwendig eine P -Nullmenge, denn jede der Variablen $N_{a,b}^I$, $a < b \in \mathcal{Q}$, liegt nach der schon bewiesenen Aussage b) des Satzes in $L^1(P)$ und ist damit insbesondere P -fast sicher endlich. Weiter hängt die Menge N aus (\diamond) nicht mehr von dem eingangs betrachteten Häufungspunkt $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ ab, so

daß dieselbe P -Nullmenge N als Obermenge schon *alle* zu beliebigen Häufungspunkten γ der Indexmenge I zu bildenden Ausnahmemengen N^γ enthält. Gezeigt ist:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{für } \omega \in \Omega \setminus N \text{ existiert } \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(\omega) \\ \text{für jeden Häufungspunkt } \gamma \text{ von } I \text{ und jede gegen } \gamma \text{ aufsteigende Folge } (t_n)_n \subset I . \end{array} \right.$$

Das Argument für absteigende Konvergenz $t \downarrow \gamma$, $t \in I$, geht analog, und führt zu derselben P -Nullmenge N aus (\diamond) . Damit ist auch Aussage d) des Satzes bewiesen. \square

D. Konvergenzsätze für Martingale, Submartingale und Supermartingale

11.25 Satz (Doob): Betrachte auf (Ω, \mathcal{A}, P) einen Prozeß $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und eine Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, sei X dabei entweder

$$\text{ein } (P, \mathcal{F})\text{-Submartingal mit } \sup_{n \in \mathbb{N}_0} E|X_n| < \infty$$

oder

$$\text{ein } (P, \mathcal{F})\text{-Supermartingal mit } \sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(X_n^-) < \infty .$$

Mit $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_n \mathcal{F}_n$ wie in (1.20'') gibt es dann eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ so daß

$$X_n \longrightarrow X_\infty \quad P\text{-fast sicher für } n \rightarrow \infty, \quad E(|X_\infty|) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E|X_n| < \infty .$$

Beweis: 1) Sei X ein Submartingal mit $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E|X_n| < \infty$. Stets – vgl. 2.2. g) – gilt

$$G := \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ existiert in } \overline{\mathbb{R}}\} \in \mathcal{F}_\infty .$$

Mit Satz 11.23 d) – wegen $X_n \leq |X_n|$, $X_n^- \leq |X_n|$ ist die Voraussetzung (11.24) erfüllt – folgt

$$P(G) = 1, \quad \text{also } X_n = 1_G X_n \text{ } P\text{-fast sicher für alle } n \in \mathbb{N}_0 .$$

Definiere

$$\tilde{X}_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} 1_G X_n .$$

Dies ist eine \mathcal{F}_∞ -meßbare, $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Zufallsvariable; nach Fatou gilt sogar

$$E(|\tilde{X}_\infty|) = E(\liminf_{n \rightarrow \infty} |X_n|) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E|X_n| < \infty$$

und damit $\tilde{X}_\infty \in L^1(P)$; nach Abänderung auf der P -Nullmenge $\{|X_\infty| = +\infty\} \in \mathcal{F}_\infty$ gilt die Aussage des Satzes für die reellwertige Zufallsvariable

$$X_\infty := \tilde{X}_\infty 1_{\{|\tilde{X}_\infty| < \infty\}}.$$

2) Sei X ein Supermartingal mit $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(X_n^-) < \infty$. Dann ist $\tilde{X} := -X$ ein Submartingal mit $\sup_n E(|\tilde{X}_n|) < \infty$: das erhält man wegen $E(X_n) \leq E(X_0)$ aus

$$|\tilde{X}_n| = |X_n| = X_n^- + X_n^+ = 2X_n^- + X_n \implies E(|\tilde{X}_n|) \leq 2E(X_n^-) + E(X_0).$$

Schritt 1) für das Submartingal \tilde{X} liefert nun die Behauptung für das Supermartingal X . \square

11.26 Folgerung: Ein nichtnegatives Supermartingal $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert P -fast sicher gegen eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$.

Beweis: 11.25 mit $X_n^- \equiv 0$ für alle n . \square

11.27 Hauptsatz: Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein $(P, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0})$ -Martingal (oder ein Submartingal, oder ein Supermartingal) mit der Eigenschaft

die Familie $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist gleichgradig integrierbar.

Dann gibt es eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ so daß gilt:

$$(11.28) \quad X_n \longrightarrow X_\infty \quad P\text{-fast sicher und in } L^1(P) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis: 1) Sei X ein Submartingal. Wegen gleichgradiger Integrierbarkeit der $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ (vgl. 2.25) gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $K < \infty$ so daß

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n| \geq K(\varepsilon)\}} |X_n| dP < \varepsilon;$$

insbesondere gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(|X_n|) \leq K(\varepsilon) + \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n| \geq K(\varepsilon)\}} |X_n| dP < \infty.$$

Damit erfüllt das Submartingal X dann die Bedingung aus 11.25, und 11.25 liefert P -fast sichere Konvergenz der X_n gegen eine \mathcal{F}_∞ -meßbare Limesvariable $X_\infty \in L^1(P)$. Gleichgradige Integrierbarkeit liefert nach 2.28 (mit $p = 1$) zusätzlich die Konvergenz in $L^1(P)$.

2) Für ein gleichgradig integrierbares Martingal ist nach 1) alles bewiesen. Sei nun X ein gleichgradig integrierbares Supermartingal. Dann ist $\tilde{X} := (-X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal, und 1) angewandt auf \tilde{X} liefert die Behauptung für X . \square

Bemerkung: a) Wir werden in Satz 11.33 sehen, daß die gleichgradige Integrierbarkeit in 11.27 als Bedingung für (11.28) nicht abgeschwächt werden kann.

b) Eine einfache hinreichende Bedingung für gleichgradige Integrierbarkeit in 11.27 ist nach 2.27

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(|X_n|^p) < \infty \quad \text{für ein } p > 1 .$$

Häufig kann man diese Bedingung etwa für $p = 2$ leicht nachprüfen. In 11.37 werden wir darauf zurückkommen.

11.29 Hilfssatz: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$ ein Martingal (Submartingal, Supermartingal) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Gibt es eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ so daß (11.28) gilt, so kann $((X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0})$ durch Hinzunahme von $(X_\infty, \mathcal{F}_\infty)$ aus (11.28)+(11.20") zu einem Martingal (Submartingal, Supermartingal)

$$\left((X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}_0}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}_0} \right)$$

fortgesetzt werden ($\overline{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n)$). Dies ist ein Abschluß wie in 11.20, aber mit der zusätzlichen Eigenschaft (11.28).

Beweis: Die L^1 -Konvergenz in (11.28) liefert für jedes feste m

$$\lim_{n \geq m, n \rightarrow \infty} \int_F X_n dP = \int_F X_\infty dP \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}_m .$$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal (Submartingal, Supermartingal), also ist die Folge $(\int_F X_n dP)_{n \geq m}$ konstant (bzw. aufsteigend, bzw. fallend), also gilt für jedes m und jedes $F \in \mathcal{F}_m$

$$E_P(1_F X_m) \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} E_P(1_F X_\infty) \quad \text{falls } (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \begin{cases} \text{Martingal} \\ \text{Submartingal} \\ \text{Supermartingal} \end{cases} .$$

Damit ist ein Abschluß als Martingal (Submartingal, Supermartingal) gefunden. \square

11.30 Konvention: Betrachte auf (Ω, \mathcal{A}, P) eine $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ -Stopzeit $T : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}_0}$ und ein Martingal (Submartingal, Supermartingal) $(X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$. In diesem Zusammenhang definiert man den Zustand von X zur Zeit T oft auch durch

$$(*) \quad X_T := \sum_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}} X_n 1_{\{T=n\}}$$

mit Hilfe der hier zur Verfügung stehenden Variablen X_∞ , anstelle der (die Konstante 0 als 'default value' benutzenden) allgemeinen Definition aus 11.13.

Wir benutzen die auf 11.27, (11.28) und 11.29 zugeschnittene Konvention $(*)$ (anstelle der – in der allgemeinen Situation nicht verbesserbaren – Definition aus 11.13) *stets nur mit ausdrücklichem Hinweis*.

Auch mit Konvention $(*)$ ist X_T eine \mathcal{F}_T -meßbare Zufallsvariable: mit Benutzung des \mathcal{F}_∞ -meßbaren X_∞ auf dem Ereignis $\{T = \infty\}$ ist X_T nach $(*)$ zuerst wieder \mathcal{F}_∞ -meßbar; danach bleibt für Mengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ das Argument aus 11.13

$$\{X_T \in B\} \cap \{T = \ell\} \in \mathcal{F}_\ell, \quad \ell \in \mathbb{N}_0$$

unverändert gültig: also ist $\{X_T \in B\}$ in \mathcal{F}_T . □

11.31 Hilfssatz: Sei $I \subset [0, \infty]$ eine Indexmenge. Betrachte auf (Ω, \mathcal{A}, P) einen stochastischen Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$, adaptiert an eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ in \mathcal{A} .

a) Ist $X = (X_t)_{t \in I}$ ein Submartingal, ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und nichtfallend, und ist $g(X_t)$ in $L^1(P)$ für alle $t \in I$, so ist auch $(g(X_t))_{t \geq 0}$ ein Submartingal.

b) Ist $X = (X_t)_{t \in I}$ ein Martingal, so ist $(|X_t|)_{t \in I}$ ein nichtnegatives Submartingal.

Beweis: a) Sei X ein Submartingal. Zunächst ist eine konvexe Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar, da $\{g \leq a\}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Der Prozeß $(g(X_t))_{t \in I}$ ist damit $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ -adaptiert, und nach Voraussetzung gilt $g(X_t) \in L^1(P)$ für alle $t \in I$. Für ein Submartingal X liefert die Jensen-Ungleichung 10.10 kombiniert mit der Monotonie von $g(\cdot)$

$$s < t \in I \quad \implies \quad E(g(X_t) | \mathcal{F}_s) \geq g(\underbrace{E(X_t | \mathcal{F}_s)}_{\geq X_s}) \geq g(X_s).$$

b) Sei X ein Martingal. Die Jensen-Ungleichung 10.10 für die konvexe Funktion $g(x) = |x|$ zeigt

$$E(|X_t| | \mathcal{F}_s) \geq \underbrace{|E(X_t | \mathcal{F}_s)|}_{=X_s} = |X_s|. \quad \square$$

11.32 Satz: Betrachte ein *nichtnegatives* Submartingal $X = (X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}, P)$. Sei \mathcal{T} die Klasse aller $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ -Stopzeiten mit endlich vielen Werten (d.h. $\{T(\omega) : \omega \in \Omega\}$ ist eine endliche Teilmenge von $\overline{\mathbb{N}_0}$). Dann gilt (mit Konvention $(*)$ aus 11.30)

die Familie $\{X_T : T \in \mathcal{T}\}$ ist gleichgradig integrierbar.

Beweis: Wegen der Nichtnegativität von X ist zu zeigen (vgl. 2.25): zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $K = K(\varepsilon) < \infty$ so daß

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \int_{\{X_T \geq K\}} X_T dP < \varepsilon .$$

1) Sei $T \in \mathcal{T}$. Für das Submartingal $X = (X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$ gilt $X_n \in L^1(P)$, $n \in \overline{\mathbb{N}_0}$. Bezeichnet man mit $t_1 < \dots < t_\ell \leq +\infty$ (abhängig von T) die endlich vielen für T möglichen Werte, so folgt $X_T \in L^1(P)$ aus der trivialen Abschätzung $|X_T| \leq |X_{t_1}| + \dots + |X_{t_\ell}|$. Für Ereignisse $F \in \mathcal{F}_T$ impliziert – wegen $F \cap \{T = t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i}$ – die Submartingaleigenschaft von $(X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$ nach Aufspalten von F

$$E(1_F(X_\infty - X_T)) = \sum_{i=1}^{\ell} E(1_{F \cap \{T=t_i\}}(X_\infty - X_{t_i})) \geq 0 ;$$

insbesondere erhält man für $F = \{X_T \geq K\} \in \mathcal{F}_T$, $K < \infty$ beliebig, die Aussage

$$(+) \quad \int_{\{X_T \geq K\}} X_T dP \leq \int_{\{X_T \geq K\}} X_\infty dP .$$

2) Da $X_\infty \in L^1(P)$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so daß

$$(++) \quad A \in \mathcal{A}, \quad P(A) < \delta \quad \implies \quad \int_A X_\infty dP < \varepsilon :$$

hierzu wählt man zuerst ein $N \in \mathbb{N}$ so daß

$$\int_{\{X_\infty > N\}} X_\infty dP < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

setzt $\delta := \frac{1}{N} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$, dann gilt für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) < \delta$

$$\int_A X_\infty dP \leq N \cdot P(A \cap \{X_\infty \leq N\}) + \int_{\{X_\infty > N\}} X_\infty dP < \varepsilon .$$

Wählt man nun eine Konstante $K \geq \frac{1}{\delta} E(X_\infty)$, hat man wegen $(+)$

$$(+++) \quad P(X_T \geq K) \leq \frac{E(X_T)}{K} \leq \frac{E(X_\infty)}{K} \leq \delta \quad \text{für jedes } T \in \mathcal{T} .$$

3) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zusammen ergibt sich mit K und δ wie oben

$$\int_{\{X_T \geq K\}} X_T dP \leq \int_{\{X_T \geq K\}} X_\infty dP < \varepsilon$$

für beliebiges $T \in \mathcal{T}$, nach (+), (+++) und (++) , und damit die Behauptung. \square

11.33 Hauptsatz über gleichgradig integrierbare Martingale: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

- i) die Familie $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist gleichgradig integrierbar;
- ii) $(X_n)_n$ konvergiert P -fast sicher und in $L^1(P)$ gegen eine \mathcal{F}_∞ -meßbare Variable X_∞ ;
- iii) X kann zu einem Martingal $(X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$ fortgesetzt werden.

Unter jeder dieser Bedingungen gilt in der Fortsetzung aus iii)

$$X_n = E(X_\infty | \mathcal{F}_n) \quad P\text{-fast sicher, für jedes } n \in \mathbb{N}_0 .$$

Beweis: i) \implies ii) ist eine Teilaussagen von 11.27; ii) \implies iii) ist 11.29. Wir zeigen iii) \implies i): Ist $(X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$, so ist nach 11.31 b) $(|X_n|)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$ ein nichtnegatives Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$. Nach 11.32 ist dann –da die konstanten Zeiten $T \equiv n$ insbesondere Stopzeiten in \mathcal{T} sind– zuerst $\{|X_n| : n \in \mathbb{N}_0\}$ und damit auch $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine gleichgradig integrierbare Familie. \square

Mit 11.33 stellt sich also das einfache Beispiel 1.7 (Martingale als sukzessive Prognosen an ein unendlich fernes Ziel) als Prototyp gleichgradig integrierbarer Martingale heraus.

11.34 Stopsatz in gleichgradig integrierbaren Martingalen: Betrachte ein Martingal $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$ mit der Eigenschaft

die Familie $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist gleichgradig integrierbar.

a) Dann gilt für beliebige \mathbb{F} -Stopzeiten $S \leq T$ (mit Konvention $(*)$ aus 11.30 für X_S und X_T):

$$E(X_T | \mathcal{F}_S) = X_S .$$

b) Jede aufsteigende Folge $(T_j)_j$ von \mathbb{F} -Stopzeiten liefert ein zeittransformiertes Martingal

$$\tilde{X} = (X_{T_j})_j \quad \text{bezüglich} \quad \tilde{\mathbb{F}} = (\mathcal{F}_{T_j})_j .$$

Beweis: Da b) aus a) folgt, reicht es, a) zu beweisen. Arbeite mit dem Abschluß

$$\left((X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}, (F_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}} \right)$$

nach 11.27-11.29 bzw. nach 11.33. Seien $S \leq T$ \mathbb{F} -Stopzeiten; zu zeigen ist

$$(\circ) \quad E(1_F X_S) = E(1_F X_T)$$

für beliebiges $F \in \mathcal{F}_S$. Dabei kann man sich auf Ereignisse $F \in \mathcal{F}_S$ mit $F \subset \{S < \infty\}$ beschränken: als \mathbb{F} -Stopzeit ist S eine \mathcal{F}_S -meßbare Zufallsvariable, also gilt $F \cap \{S < \infty\} \in \mathcal{F}_S$ falls $F \in \mathcal{F}_S$; wegen $S \leq T$ und Konvention (*) in 11.30 gilt

$$X_S = X_T = X_\infty \quad \text{auf} \quad \{S = \infty\},$$

folglich muß (\circ) nur für $F \cap \{S < \infty\}$ anstelle von F bewiesen werden.

Wir betrachten also $F \in \mathcal{F}_S$ mit $F \subset \{S < \infty\}$; für diese gilt

$$F \cap \{S \leq n\} \uparrow F, \quad n \rightarrow \infty.$$

1) Stets gilt für $F \in \mathcal{F}_S$

$$F_n = F \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_{S \wedge n} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0$$

denn für $\ell \in \mathbb{N}_0$ beliebig

$$F_n \cap \{S \wedge n \leq \ell\} = (F \cap \{S \leq n\}) \cap \{S \leq \ell\} = F \cap \{S \leq \ell \wedge n\} \in \mathcal{F}_{\ell \wedge n} \subset \mathcal{F}_\ell.$$

2) Wende 11.31 b) und 11.32 an auf das Martingal $(X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$: zuerst ist $(|X_n|)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$ ein nicht-negatives Submartingal, dann ist die Familie $\{|X|_{S \wedge n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ gleichgradig integrierbar, denn jedes $S \wedge n$ ist eine Stopzeit mit endlich vielen Werten. Damit sind auch $\{X_{S \wedge n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ und erst recht $\{1_{F_n} X_{S \wedge n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ gleichgradig integrierbare Familien. Nach 11.33 konvergiert $(X_n)_n$ P -fast sicher gegen X_∞ , also konvergiert $(1_{F_n} X_n)_n$ P -fast sicher gegen $1_F X_\infty$. Wegen gleichgradiger Integrierbarkeit wird daraus

$$(+)$$

$$1_{F_n} X_{S \wedge n} \longrightarrow 1_F X_S \quad P\text{-fast sicher und in } L^1(P), \quad n \rightarrow \infty.$$

Wiederholt man das Argument mit T statt S , erhält man für *dieselbe* Folge $(F_n)_n$

$$(++)$$

$$1_{F_n} X_{T \wedge n} \longrightarrow 1_F X_T \quad P\text{-fast sicher und in } L^1(P), \quad n \rightarrow \infty.$$

3) Doob's Stopsatz für beschränkte Stopzeiten 11.15 zeigt aber

$$(+++) \quad E(1_{F_n} X_{S \wedge n}) = E(1_{F_n} X_{T \wedge n}) \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0,$$

denn $F_n = F \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_{S \wedge n}$ nach Schritt 1). Zusammen liefern (+) bis (+++) die Aussage (o), und der Beweis ist abgeschlossen. \square

E. L^p -Ungleichungen und L^p -Martingale

Unter welchen Bedingungen kann für Martingale wie in 11.33 die dortige Konvergenzaussage zu einer Konvergenz in L^p , $p > 1$, verschärft werden ?

11.35 Satz (Doob): Betrachte den *Maximumsprozeß* $X^* = (X_n^*)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zu einem *nichtnegativen* Submartingal $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$

$$X_n^* := \max_{0 \leq k \leq n} X_k, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Für beliebiges $p > 1$ und q definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt die Abschätzung

$$\|X_n\|_p \leq \|X_n^*\|_p \leq q \cdot \|X_n\|_p \leq \infty$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, mit $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)}$.

Beweis: Wir beweisen das zweite Ungleichheitszeichen; das erste ist trivial. Fixiere $n \geq 1$ und $p > 1$, assoziiere $q = \frac{p}{p-1}$ zu $p > 1$. Wir setzen voraus $X_n \in L^p(P)$ und $\|X_n^*\|_p \neq 0$ (sonst wäre nichts zu zeigen).

1) Betrachte ein Paar nichtfallender stetiger Funktionen $F, G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $F(0) = G(0) = 0$, aufgefaßt als Verteilungsfunktionen σ -endlicher Maße auf $(0, \infty)$, welche durch

$$(*) \quad G(dr) = \frac{1}{r} F(dr) \quad \text{auf } (0, \infty)$$

gekoppelt sind (ein Beispiel wird in Schritt 2) gegeben). Da das Submartingal X nach Voraussetzung nichtnegativ ist, gilt mit Fubini für jedes $N < \infty$ nach (*)

$$\begin{aligned} E(F(X_n^* \wedge N)) &= \int_{\Omega} P(d\omega) \int_0^{X_n^*(\omega) \wedge N} F(dr) = \int_{\Omega} P(d\omega) \int_0^N 1_{\{X_n^*(\omega) > r\}} F(dr) \\ &= \int_0^N F(dr) P(\{X_n^* > r\}) = \int_0^N G(dr) r P(X_n^* > r) \end{aligned}$$

und weiter unter Ausnutzung der Doob-Ungleichung 11.18 i)

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^N G(dr) \left[\int_{\{X_n^* > r\}} X_n dP \right] \\
&= \int_{\Omega} P(d\omega) X_n(\omega) \int_0^{X_n^*(\omega) \wedge N} G(dr) \\
&= E(X_n G(X_n^* \wedge N)) < \infty.
\end{aligned}$$

Mit Hölder 2.14 erhalten wir für p und q wie oben

$$(**) \quad E(F(X_n^* \wedge N)) \leq E(X_n G(X_n^* \wedge N)) \leq \|X_n\|_p \cdot \|G(X_n^* \wedge N)\|_q.$$

2) Nach Wahl von p und q gilt $\frac{1}{q} = \frac{1}{p}(p-1)$ und $(p-1)q = p$. Also gilt (*) insbesondere für

$$F(y) := y^p, \quad G(y) := q y^{p-1}, \quad 0 < y < \infty,$$

und man schreibt mit $Z := X_n^* \wedge N$

$$\|G(Z)\|_q = q \left(\int [Z^{p-1}]^q dP \right)^{1/q} = q \left(\int Z^p dP \right)^{\frac{1}{p}(p-1)} = q \|Z\|_p^{p-1}.$$

In diesem Spezialfall schreibt sich (**) also als

$$(\|X_n^* \wedge N\|_p)^p \leq \|X_n\|_p \cdot q \cdot (\|X_n^* \wedge N\|_p)^{p-1}.$$

Da X_n in $L^1(P)$ und da $X_n^* \wedge N$ nach Konstruktion beschränkt ist, sind alle Normen in der letzten Ungleichung endlich, also gilt nach Division durch $(\|X_n^* \wedge N\|_p)^{p-1}$

$$\|X_n^* \wedge N\|_p \leq q \cdot \|X_n\|_p.$$

Hieraus folgt für $N \rightarrow \infty$ die Aussage des Satzes. □

11.36 Folgerung: Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein *nichtnegatives* Submartingal und X^* der Maximumsprozeß zu X wie in 11.35. Sei $p > 1$. Dann ist die Bedingung

$$(*) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(X_n^p) < \infty$$

hinreichend für

$$X_\infty^* := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n \in L^p(P),$$

und mit $q := \frac{p}{p-1}$ gilt die Abschätzung

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|X_n\|_p \leq \|X_\infty^*\|_p \leq q \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|X_n\|_p.$$

Beweis: Unter (*) ist $(X_n^p)_n$ ein Submartingal: dazu wendet man 11.31 a) an auf das nichtnegative Submartingal X und die konvexe und nichtfallende Funktion $g(y) := (y \vee 0)^p$. Folglich ist $n \rightarrow E(X_n^p)$ nichtfallend. Zusammen mit dieser Zusatzinformation liefert 11.35 für das nichtnegative Submartingal X

$$(+) \quad \sup_{0 \leq k \leq n} \|X_k\|_p = \|X_n\|_p \leq \|X_n^*\|_p \leq q \cdot \|X_n\|_p = q \cdot \sup_{0 \leq k \leq n} \|X_k\|_p$$

für jedes feste n . Wegen Nichtnegativität des Prozesses X und monotoner Konvergenz gilt

$$X_n^* \uparrow X_\infty^* \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad , \quad E((X_n^*)^p) \uparrow E((X_\infty^*)^p) \leq \infty \quad , \quad n \rightarrow \infty .$$

Die behauptete Abschätzung folgt nun für $n \rightarrow \infty$ aus (+). Sie zeigt insbesondere, dass in einem nichtnegativen Submartingal die Voraussetzung (*) hinreichend ist für $X_\infty^* \in L^p(P)$. \square

Mit Hilfe von 11.36 können wir den Konvergenzsatz für gleichgradig integrierbare Martingale (11.27 oder 11.33) noch einmal verschärfen.

11.36' Definition: Sei $p > 1$. Ein Martingal $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$ mit

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(|X_n|^p) < \infty$$

heißt *L^p -Martingal*.

11.37 Hauptsatz über L^p -Martingale: Sei $p > 1$. Für ein L^p -Martingal $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$ gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} |X_n| \in L^p(P) .$$

Insbesondere ist dann die Familie $\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}_0\}$ gleichgradig integrierbar, und man hat

$$X_n \longrightarrow X_\infty \quad P\text{-fast sicher und in } L^p(P) \text{ für } n \rightarrow \infty .$$

Beweis: Da X Martingal, ist der Prozeß $Y := (|X|_n)_n$ nach 11.31 b) ein nichtnegatives Submartingal. Voraussetzung 11.36' kombiniert mit 11.36 für Y liefert also

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} |X|_n = Y_\infty^* \in L^p(P) .$$

Damit gibt es (wie in (++) im Beweis von 11.32) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so daß

$$A \in \mathcal{A}, P(A) < \delta \implies \int_A |Y_\infty^*|^p dP \leq \varepsilon,$$

und mit der trivialen Abschätzung $|X_n| \leq Y_\infty^*$ erhält man

$$A \in \mathcal{A}, P(A) < \delta \implies \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \int_A |X_n|^p dP \leq \varepsilon$$

und daher mit 2.25':

(o) die Familie $\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist gleichgradig integrierbar .

Dann aber ist insbesondere die Voraussetzung des Satzes 11.33 (gleichgradige Integrierbarkeit der $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$) erfüllt. Also gilt P -fast sichere Konvergenz der $(X_n)_n$ gegen eine \mathcal{F}_∞ -meßbare Limesvariable X_∞ . Unter (o) gilt dann aber nach Satz 2.28 auch $X_\infty \in L^p(P)$, und die Konvergenz $X_n \rightarrow X_\infty$ ist eine Konvergenz in $L^p(P)$. \square

Wir schließen das Kapitel mit einem Beispiel.

11.38 Beispiel: (Martingalstruktur in Verzweigungsprozessen, Fortsetzung von Beispiel 11.8)

Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wie in 11.8 der Verzweigungsprozeß

$$X_0 \equiv 1; \quad X_{n+1} = \sum_{j=1}^{X_n} \xi_{n+1,j}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

mit iid Kinderzahlen $(\xi_{n,j})_{n,j}$, \mathbb{N}_0 -wertig und in $L^1(P)$, definiert auf (Ω, \mathcal{A}, P) . $\mathcal{I} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist die von X erzeugte Filtration: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_j, 0 \leq j \leq n)$. Die mittlere Kinderzahl pro Individuum ist $E(\xi_{1,1}) = m$. Nach 11.8 ist $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$M_n := \frac{X_n}{m^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ein (P, \mathcal{I}) -Martingal mit $M_0 \equiv 1$. M hat die folgenden Eigenschaften:

i) Wegen $M_n \geq 0$ für alle n ist M insbesondere ein nichtnegatives Supermartingal, konvergiert also nach 11.25+11.26 P -fast sicher gegen eine \mathcal{F}_∞ -meßbare Limesvariable $M_\infty \geq 0$; dabei gilt $M_\infty \in L^1(P)$ und $E(M_\infty) \leq 1$.

ii) Verschärft man die an die Kinderzahlen $\xi_{n,j}$ gemachten Voraussetzungen zu $\xi_{1,1} \in L^2(P)$, $\sigma^2 := \text{Var}(\xi_{1,1})$, so gilt (siehe Jagers 1975, S. 21-23)

$$\begin{cases} m = 1 : \text{Var}(X_n) = \sigma^2 \cdot n, & n = 1, 2, \dots \\ m \neq 1 : \text{Var}(X_n) = \sigma^2 \cdot m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

und damit

$$E(M_n^2) = \frac{1}{m^{2n}} (\text{Var}(X_n) + (E(X_n))^2) .$$

iii) Betrachte den 'superkritischen' Fall $m > 1$, unter der Bedingung $\xi_{1,1} \in L^2(P)$. Hier nach ii)

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(M_n^2) < \infty ,$$

also ist M ein L^2 -Martingal, und 11.37 zeigt

$$M_n \longrightarrow M_\infty \quad P\text{-fast sicher und in } L^2(P) \text{ f\u00fcr } n \rightarrow \infty .$$

Die L^2 -Konvergenz impliziert

$$E(M_\infty) = 1, \quad E(M_\infty^2) = \lim_n E(M_n^2) = \frac{\sigma^2}{m^2 - m} .$$

Man mache sich klar, da\u00df damit im 'superkritischen' Fall $m > 1$ das Wachstumsverhalten der Pfade des Verzweigungsprozesses beschrieben wird

$$\text{f\u00fcr } P\text{-fast alle } \omega \in \{M_\infty > 0\} \text{ gilt: } X_n(\omega) \sim m^n \cdot M_\infty(\omega) \text{ f\u00fcr } n \rightarrow \infty ;$$

dies ist exponentielles Wachstum $n \rightarrow m^n$ mit einem \mathcal{F}_∞ -me\u00dfbaren Proportionalit\u00e4tsfaktor. Ein Zusatzargument mit wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen (Athreya und Ney 1972, S. 7–10) zeigt, da\u00df die einzige Alternative zu exponentiellem Wachstum das 'Aussterben' ist:

$$\{M_\infty = 0\} = \{X_n = 0 \text{ f\u00fcr schlie\u00dflich alle } n\} \quad P\text{-fast sicher} .$$

iv) F\u00fcr $m \leq 1$ wei\u00df man (siehe Jagers 1975, Athreya und Ney 1972)

$$P(X_n = 0 \text{ f\u00fcr schlie\u00dflich alle } n) = 1 ;$$

also gilt hier $M_\infty \equiv 0$. Ein Abschlu\u00df von $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch Hinzunahme der Limesvariable M_∞ ist also kein Abschluss als Martingal, sondern nur ein Abschluss als nichtnegatives Supermartingal. Insbesondere kann nach Satz 11.33 das Martingal $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ im Fall $m \leq 1$ kein gleichgradig integrables Martingal sein. \square