Kapitel XII

Der Konsistenzsatz von Kolmogorov und Konstruktion stochastischer Prozesse im Sinn ihrer endlichdimensionalen Randverteilungen

Reinhard Höpfner

Vorlesung Stochastik II

Wintersemester 2006/07 und 2010/11

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

30.1.04, 08.02.07, 20.01.11

Übersicht zu Kapitel XII :

A. Produkträume und Konsistenzsatz

Produkträume und Projektionen 12.1

Kanonischer Prozeß 12.1'

endlichdimensionale Randverteilungen 12.2 – 12.3

projektive Systeme 12.4 – 12.5

Konsistenzsatz von Kolmogorov 12.6

B. Anwendungen des Konsistenzsatzes

Produktmaße 12.7

Markovketten 12.7'–12.8

Halbgruppen von Übergangswahrscheinlichkeiten 12.9

Markovprozesse in stetiger Zeit 12.9'–(12.11)

Shifts und Markoveigenschaft 12.12–(12.13)

Faltungshalbgruppen (12.13')–12.14

Prozesse mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen 12.14'–(12.16)

Brownsche Bewegung (endlichdimensionale Randverteilungen) 12.17–(12.18)

symmetrisch stabile Prozesse (endlichdimensionale Randverteilungen) 12.18'

allgemeiner 1-dimensionaler Lévy-Prozeß (endlichdimensionale Randverteilungen) 12.18"

Poisson-Prozeß (endlichdimensionale Randverteilungen) 12.19

A. Produkträume und Konsistenzsatz

Kapitel 5.A setzt bis auf den Begriff eines polnischen Raumes nur den Stoff voraus, der *bis 4.12 einschließlich* bereitgestellt wurde, und beweist den Konsistenzsatz auf dieser Grundlage. Das Teilkapitel könnte also direkt im Anschluß an 4.12 gelesen werden.

12.1 Voraussetzungen und Bezeichnungen: In diesem Kapitel benutzen wir durchgehend die folgenden Notationen:

a) $(E, \mathcal{E})$ ist ein meßbarer Raum, $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge; wir schreiben $\mathcal{H}(I)$ für die Familie aller endlichen Teilmengen von I. Wir betrachten den Produktraum $(E^I, \mathcal{E}^I)$

$$E^I \ := \ \mathop{\times}_{t \in I} E \ = \ \{ \alpha \mid \alpha \text{ ist Abbildung } I \to E \} \, , \quad \mathcal{E}^I \ := \ \bigotimes_{t \in I} \mathcal{E}$$

wobei $\bigotimes_{t \in I} \mathcal{E}$ die vom System $\mathcal{S}$ aller Säulen mit Rechteckbasis

$$\{ \alpha \in E^I \ : \ \alpha(t) \in A_t \ \text{ für } \ t \in J \} \, , \quad J \in \mathcal{H}(I) \, , \ A_t \in \mathcal{E} \, , \ t \in J$$

im Produktraum E^I erzeugte σ-Algebra ist (vgl. 4.11' und 4.12).

b) Für jedes $t \in I$ bezeichnet π_t die Koordinatenprojektion

$$\pi_t \ : \quad E^I \ni \alpha \ \longrightarrow \ \alpha(t) \ \in E \, .$$

Nach Konstruktion ist $\pi_t : (E^I, \mathcal{E}^I) \to (E, \mathcal{E})$ meßbar und es gilt

$$\mathcal{E}^I \ = \ \sigma(\pi_t : t \in I) \, .$$

c) Assoziiere zu $J \in \mathcal{H}(I)$ wie in Kapitel 4.A betrachtet $|J|$-fache Produkträume

$$(E^J, \mathcal{E}^J) \quad , \quad E^J = \mathop{\times}_{t \in J} E \quad , \quad \mathcal{E}^J = \bigotimes_{t \in J} \mathcal{E}$$

und Projektionen

$$\pi_J \ : \quad E^I \ni \alpha \ \longrightarrow \ (\alpha(t))_{t \in J} \ \in E^J \, .$$

Da $\mathcal{E}^J$ vom System der Rechtecke

$$\mathop{\times}_{t \in J} A_t \, , \quad A_t \in \mathcal{E} \ \text{ für jedes } \ t \in J$$

erzeugt wird, da Urbilder von Rechtecken unter π_J

$$(\pi_J)^{-1}(\mathop{\times}_{t \in J} A_t) \ = \ \{ \pi_J \in \mathop{\times}_{t \in J} A_t \} \ = \ \{ \alpha \in E^I \ : \ \alpha(t) \in A_t \ \text{ für } \ t \in J \}$$

Säulen mit Rechteckbasis in E^I sind, ist die Projektion $\pi_J : (E^I, \mathcal{E}^I) \to (E^J, \mathcal{E}^J)$ meßbar.

d) Zu je zwei endlichen Teilmengen $K \subset J$ von I definieren wir eine Projektion

$$\pi_K^J \; : \quad E^J \ni (\alpha(t))_{t\in J} \quad \longrightarrow \quad (\alpha(t))_{t\in K} \in E^K$$

'von J nach K': dann ist $\pi_K^J : (E^J, \mathcal{E}^J) \to (E^K, \mathcal{E}^K)$ meßbar, und es gilt

$$\pi_K(\alpha) = \pi_K^J(\,\pi_J(\alpha)\,) \,, \quad \alpha \in E^I \,.$$

12.1' Bemerkungen: Als Beispiel betrachte man $(E, \mathcal{E}) := (I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$, $I := [0, \infty)$, und interpretiere die Indexmenge I als Zeit.

a) Die Elemente $\alpha \in E^I$ des Produktraumes liefern als Abbildungen $\alpha : I \to I\!R^d$ *alle möglichen Pfade* $I\!R^d$-wertiger stochastischer Prozesse.

b) Mit dem Prozeß der Koordinatenprojektionen $\pi := (\pi_t)_{t\geq 0}$ aus 12.1 b) hat man stets einen stochastischen Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{A}) := (E^I, \mathcal{E}^I)$, vgl. 11.2'; π heißt *kanonischer Prozeß* auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$.

c) Unter jedem Wahrscheinlichkeitsmaß Q, welches auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ betrachtet werden kann, erhält der kanonische Prozeß π gewisse *Eigenschaften*; die 'elementarste' ist die Verteilung unter Q

$$\mathcal{L}\left((\pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_l}) \mid Q\right) \;, \quad 0 \leq t_1 < \ldots < t_l < \infty$$

beliebiger Tupel $(\pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_l})$ von Koordinatenprojektionen. Für $J := \{t_1, \ldots, t_l\}$ ist dies das Bild $\mathcal{L}(\pi_J|Q)$ von Q unter der in 12.1 c) definierten Projektion $\pi_J : E^I \to E^J$.

12.2 Definition: Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Produktraum $(E^I, \mathcal{E}^I)$. Setze

$$Q_J := \mathcal{L}(\pi_J|Q) = Q^{\pi_J} \quad \text{Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (E^J, \mathcal{E}^J)$$

für alle $J \in \mathcal{H}(I)$. Dann heißt die Kollektion von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\{\, Q_J : J \in \mathcal{H}(I) \,\}$$

System der *endlich-dimensionalen Randverteilungen* (*finite dimensional distributions*) von Q.

12.3 Hilfssatz: Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Produktraum $(E^I, \mathcal{E}^I)$. Das System der endlich-dimensionalen Randverteilungen von Q hat die Eigenschaft

$$K \subset J \in \mathcal{H}(I) \quad \Longrightarrow \quad Q_K = \mathcal{L}(\,\pi_K^J \mid Q_J\,) \,.$$

Beweis: Dies folgt sofort aus $\pi_K = \pi_K^J \circ \pi_J$ in 12.1 d). $\square$

Eine wichtigere Fragestellung ist aber die folgende: man möchte auf $(\Omega, \mathcal{A}) = (E^I, \mathcal{E}^I)$ Wahrscheinlichkeitsmaße Q so *konstruieren*, daß Tupel $(\pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_l})$ unter Q *vorgeschriebene* Verteilungen annehmen. Man kann z.B. wünschen, in Dimension $d = 1$ für beliebige $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_t < \infty$ als Verteilung von $(\pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_l})$ unter Q eine Normalverteilung $\mathcal{N}(0, (t_i \wedge t_j)_{i,j=1,\ldots,l})$ zu erhalten, $l \geq 1$, was (nach einer einfachen linearen Transformation gemäß 7.5, siehe auch 12.17 unten) der Forderung nach *unabhängigen und normalverteilten Zuwächsen* im Prozeß π entspricht:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{unter } Q \text{ seien für } l \geq 1 \text{ und } 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l < \infty \text{ beliebig} \\ \text{die Zuwächse } \pi_{t_i} - \pi_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}) \text{ unabhängig,} \\ \text{und es gelte } \pi_0 = 0 \;\; Q\text{-fast sicher .} \end{array} \right.$$

Diese Vorgabe wird in 12.17 und 13.9 zur Definition der Brownschen Bewegung führen. Es ist jedoch bisher noch nicht klar, ob überhaupt (bzw.: warum) ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q mit der gewünschten Eigenschaft auf $(\Omega, \mathcal{A}) = (E^I, \mathcal{E}^I)$ existiert. Der Konsistenzsatz von Kolmogorov (12.6 unten) liefert das Werkzeug, mit dem diese Frage beantwortet werden kann.

12.4 Definition: Sei mit den Bezeichnungen aus 12.1 für jedes $J \in \mathcal{H}(I)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_J auf $(E^J, \mathcal{E}^J)$ vorgegeben. Dann heißt $\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ ein *projektives System* falls die folgende *Konsistenzbedingung* gilt:

$$K \subset J \;\in\; \mathcal{H}(I) \quad \Longrightarrow \quad P_K \;=\; \mathcal{L}(\,\pi_K^J \mid P_J\,)\;.$$

12.5 Bemerkung: a) Für jedes auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ vorgegebene Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist nach 12.3 das System der endlichdimensionalen Randverteilungen von Q ein projektives System.

b) Wir betonen, daß $\{Q_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ aus 12.2+12.3 und $\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ aus 12.4 Systeme von Wahrscheinlichkeitsmaßen sind, die auf *verschiedenen* Räumen $(E^J, \mathcal{E}^J) = (\bigtimes_{t\in J} E,\ \bigotimes_{t\in J}\mathcal{E})$ definiert sind, $J \in \mathcal{H}(I)$. Insbesondere darf man für Mengen $J_1 \neq J_2$ gleicher Mächtigkeit die Räume $(E^{J_1}, \mathcal{E}^{J_1})$ und $(E^{J_2}, \mathcal{E}^{J_2})$ nicht identifizieren: offenkundig sind für

$$l \geq 1\,, \quad 0 < \underbrace{t_1 < \ldots < t_l}_{=:J_1} \;<\; \underbrace{s_1 < \ldots < s_l}_{=:J_2} < \infty\,, \quad A_1, \ldots, A_l \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

die zwei Forderungen

$$\text{es gelte } \pi_{t_i} \in A_i \ , \ 1 \le i \le l \ , \text{ mit Wahrscheinlichkeit } \mathcal{N}(0,(t_i \wedge t_j)_{i,j=1,\ldots,l})(\mathop{\times}_{i=1}^{l} A_i)$$

$$\text{es gelte } \pi_{s_i} \in A_i \ , \ 1 \le i \le l \ , \text{ mit Wahrscheinlichkeit } \mathcal{N}(0,(s_i \wedge s_j)_{i,j=1,\ldots,l})(\mathop{\times}_{i=1}^{l} A_i)$$

essentiell verschieden. □

Zu lösen ist also das folgende Problem: wann kann ein *vorgegebenes* projektives System

$$\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$$

aufgefaßt werden als System endlich-dimensionaler Randverteilungen

$$\{\, \mathcal{L}(\pi_J | P) : J \in \mathcal{H}(I)\,\}$$

eines auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ existierenden Wahrscheinlichkeitsmaßes P ?

12.6 Konsistenzsatz von Kolmogorov: Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in 12.1: Ist $(E,\mathcal{E})$ polnisch, so gibt es zu jedem vorgegebenen projektiven System

$$\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\} \ , \quad P_J \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (E^J, \mathcal{E}^J)$$

genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ so daß

$$P_J \ = \ \mathcal{L}(\pi_J | P) \quad \text{für jedes } J \in \mathcal{H}(I) \ .$$

Beweis: 1) Wir zeigen: das System $\mathcal{Z}$ aller *Zylindermengen* in $\mathcal{E}^I$

$$\{\pi_J \in A_J\} \ , \quad A_J \in \mathcal{E}^J \ , \quad J \in \mathcal{H}(I)$$

ist eine Algebra in $\mathcal{E}^I$, welche $\mathcal{E}^I$ erzeugt (beachte: die in 12.1 eingeführten Säulen mit Rechteckbasis sind spezielle Zylindermengen).

Bew.: Klar gehört $E^I = \{\pi_J \in E^J\}$ zu $\mathcal{Z}$; mit $\{\pi_J \in A_J\}$ ist das Komplement $\{\pi_J \in (E^J \setminus A_J)\}$ in $\mathcal{Z}$; auch sind endliche Vereinigungen von Zylindermengen wieder Zylindermengen: Betrachte $\{\pi_{J_1} \in A_{J_1}\}$, $\{\pi_{J_2} \in A_{J_2}\}$, setze $J := J_1 \cup J_2$ und $A_J^{(i)} := (\pi^J_{J_i})^{-1}(A_{J_i})$, $i = 1,2$. Dann gilt $J \in \mathcal{H}(I)$ und $A_J^{(i)} \in \mathcal{E}^J$, und $\{\pi_{J_i} \in A_{J_i}\} = \{\pi_J \in A_J^{(i)}\}$ wegen $\pi_{J_i} = \pi^J_{J_i} \circ \pi_J$. Also gilt

$$\{\pi_{J_1} \in A_{J_1}\} \cup \{\pi_{J_2} \in A_{J_2}\} \ = \ \{\pi_J \in A_J^{(1)} \cup A_J^{(2)}\} \ \in \mathcal{Z} \ .$$

2) Wir zeigen: wegen der vorausgesetzten Projektivität von $\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ wird durch

$$(*) \qquad \widetilde{P}(Z) \ := \ P_J(A_J) \quad \text{falls } Z = \{\pi_J \in A_J\} \ , \ A_J \in \mathcal{E}^J \ , \ J \in \mathcal{H}(I)$$

ein Inhalt $\widetilde{P}$ auf $\mathcal{Z}$ definiert.

Bew.: i) $\widetilde{P}$ ist als Mengenfunktion auf $\mathcal{Z}$ wohldefiniert: Betrachte verschiedene Darstellungen derselben Zylindermenge $Z \in \mathcal{Z}$

$$Z \ = \ \{\pi_{K_1} \in A_{K_1}\} \ = \ \{\pi_{K_2} \in A_{K_2}\} \ , \quad K_1, K_2 \in \mathcal{H}(I) \ , \ A_{K_i} \in \mathcal{E}^{K_i} \ .$$

Mit $J := K_1 \cup K_2$ und $A_J^{(i)} := (\pi^J_{K_i})^{-1}(A_{K_i})$ wie in 1) muß dann gelten $A_J^{(1)} = A_J^{(2)}$.
Da $\{P_{J'} : J' \in \mathcal{H}(I)\}$ projektiv, gilt $P_{K_i} = \mathcal{L}(\pi^J_{K_i} | P_J)$; zusammen folgt

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(\{\pi_{K_1} \in A_{K_1}\}) \ &= \ P_{K_1}(A_{K_1}) \ = \ \big(\mathcal{L}(\pi^J_{K_1} | P_J)\big)\,(A_{K_1}) \\ &= \ P_J\left(\, (\pi^J_{K_1})^{-1} A_{K_1} \, \right) \ = \ P_J(A_J^{(1)}) \\ &= \ P_J(A_J^{(2)}) \ = \ \ldots \ = \ \widetilde{P}(\{\pi_{K_2} \in A_{K_2}\}) \ . \end{aligned}$$

Also ist die Mengenfunktion $Z \to \widetilde{P}(Z)$ in $(*)$ unabhängig von der Darstellung der Zylindermenge $Z \in \mathcal{Z}$ festgelegt.

ii) $\widetilde{P}$ ist endlich additiv auf $\mathcal{Z}$: Betrachte disjunkte Zylindermengen $Z_i = \{\pi_{J_i} \in A_{J_i}\}$, $i = 1, \ldots, \ell$, setze $J := J_1 \cup \ldots \cup J_\ell$ und $A_J^{(i)} := (\pi^J_{J_i})^{-1}(A_{J_i})$. Da P_J ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E^J, \mathcal{E}^J)$ ist, erhält man

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(\dot{\bigcup_{i=1}^{\ell}} Z_i) \ &= \ \widetilde{P}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\ell}} \{\pi_{J_i} \in A_{J_i}\} \right) \ = \ \widetilde{P}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\ell}} \{\pi_J \in A_J^{(i)}\} \right) \ = \ \widetilde{P}\left(\{\pi_J \in \dot{\bigcup_{i=1}^{\ell}} A_J^{(i)}\} \right) \\ &= \ P_J\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\ell}} A_J^{(i)} \right) \ = \ P_J(A_J^{(1)}) + \ldots + P_J(A_J^{(\ell)}) \\ &= \ P_{J_1}(A_{J_1}) + \ldots + P_{J_\ell}(A_{J_\ell}) \quad = \ \widetilde{P}(Z_1) + \ldots \widetilde{P}(Z_\ell) \ . \end{aligned}$$

3) Wir zeigen: der durch $(*)$ definierte Inhalt $\widetilde{P}$ auf $\mathcal{Z}$ ist σ-stetig in $\emptyset$.

Bew: Betrachte absteigende Folgen $(Z_n)_n$ in $\mathcal{Z}$ und zeige:

$$(**) \qquad \lim_{n \to \infty} \widetilde{P}(Z_n) > \varepsilon \text{ für ein } \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n \geq 1} Z_n \neq \emptyset \ .$$

Schreibe $Z_n = \{\pi_{J_n} \in A_{J_n}\}$, $A_{J_n} \in \mathcal{E}^{J_n}$, $J_n \in \mathcal{H}(I)$; wie in Schritt 2) darf man die Folge $(J_n)_n$ aufsteigend wählen: $J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset J_n \subset J_{n+1} \subset \ldots$ in $\mathcal{H}(I)$.

i) Mit $(E, \mathcal{E})$ sind auch alle $|J_n|$-fachen Produkträume $(E^{J_n}, \mathcal{E}^{J_n})$ polnisch (vgl. 10.25 b), 4.14 oder Billingsley (1968) S. 225), und kompakte Approximierbarkeit der P_{J_n} auf $(E^{J_n}, \mathcal{E}^{J_n})$ nach 10.26 c) oder 6.1' liefert für ε aus $(**)$

$$\begin{aligned}&\text{für jedes } n \geq 1 \text{ gibt es ein Kompaktum } K_{J_n} \text{ in } E^{J_n} \text{ mit}\\ &K_{J_n} \subset A_{J_n} \ , \quad P_{J_n}(A_{J_n} \backslash K_{J_n}) \ \leq \ \varepsilon \cdot 2^{-(n+1)}\end{aligned}$$

(beachte: die Kompakta K_{J_n}, $n \geq 1$, leben in verschiedenen Räumen). Betrachte nun eine absteigende Folge von Zylindermengen $(Y_n)_n$ definiert durch

$$Y_n \ := \ \bigcap_{i=1}^{n} \{\pi_{J_i} \in K_{J_i}\} \quad \subset \quad \{\pi_{J_n} \in A_{J_n}\} \ = \ Z_n \ , \quad n \geq 1$$

Da $(Z_n)_n$ absteigend, gilt nach Wahl der K_{J_i}

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(Z_n \backslash Y_n) \ &= \ \widetilde{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (Z_n \backslash \{\pi_{J_i} \in K_{J_i}\}) \right) \ \leq \ \widetilde{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (\ Z_i \backslash \{\pi_{J_i} \in K_{J_i}\} \ ) \right)\\ &= \ \widetilde{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (\ \{\pi_{J_i} \in A_{J_i} \backslash K_{J_i}\} \ ) \right) \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \cdot 2^{-(i+1)} \ = \ \frac{1}{2}\varepsilon\end{aligned}$$

und damit

$$(+) \qquad \widetilde{P}(Y_n) \ = \ \underbrace{\widetilde{P}(Z_n)}_{>\varepsilon} - \widetilde{P}(Z_n \backslash Y_n) \ > \ \frac{1}{2}\varepsilon \ > \ 0 \quad \text{für alle } n.$$

Wir wollen nun zeigen

$$\bigcap_{n \geq 1} Y_n \ \neq \ \emptyset \ ,$$

dann folgt die zu beweisende Behauptung aus $Y_n \subset Z_n$.

ii) Wegen (+) enthält jedes Y_n mindestens einen Punkt $\alpha_n \in E^I$. Betrachte die Folge $(\alpha_n)_n$. Da $(Y_n)_n$ fallend, gilt

$$\text{für jedes feste } m: \quad (\alpha_n)_{n \geq m} \ \subset \ Y_m \ .$$

Nach Definition von $Y_m = \bigcap_{i=1}^{m} \{\pi_{J_i} \in K_{J_i}\}$ bedeutet das

$$\text{für alle } n,\, i \text{ mit } n \geq i: \quad \pi_{J_i}(\alpha_n) \ \in \ K_{J_i} \ .$$

Für jedes feste i ist also $(\pi_{J_i}(\alpha_n))_{n \geq i}$ eine Folge im Kompaktum K_{J_i} in E^{J_i}.
Sukzessiv in i vorgehend, wählt man sich zunächst eine Teilfolge $\left(n_k^{(1)}\right)_k$ von $I\!N$ so daß

$$\pi_{J_1}(\alpha_{\left(n_k^{(1)}\right)}) \quad \longrightarrow: \quad \beta_1 \ \in \ K_{J_1} \quad (\text{Konvergenz in } E^{J_1} \text{ für } k \to \infty) \ ,$$

dann eine Teilfolge $\left(n_k^{(2)}\right)_k$ von $\left(n_k^{(1)}\right)_k$ so daß

$$\pi_{J_2}(\alpha_{\left(n_k^{(2)}\right)}) \quad \longrightarrow : \quad \beta_2 \ \in \ K_{J_2} \quad (\text{Konvergenz in } E^{J_2} \text{ für } k \to \infty) \ ,$$

dann eine Teilfolge $\left(n_k^{(3)}\right)_k$ von $\left(n_k^{(2)}\right)_k$ so daß

$$\pi_{J_3}(\alpha_{\left(n_k^{(3)}\right)}) \quad \longrightarrow : \quad \beta_3 \ \in \ K_{J_3} \quad (\text{Konvergenz in } E^{J_3} \text{ für } k \to \infty) \ ,$$

u.s.w. ...; dann betrachtet man die Diagonalfolge

$$(\gamma_m)_m \ : \quad \gamma_m \ := \ \alpha_{\left(n_m^{(m)}\right)} \ \in \ E^I \ ;$$

diese erfüllt für jedes feste i

$$(++) \qquad \pi_{J_i}(\gamma_m) \quad \longrightarrow \quad \beta_i \ \in \ K_{J_i} \quad (\text{Konvergenz in } E^{J_i} \text{ für } m \to \infty) \ .$$

Konvergenz im Produktraum E^{J_i} ist komponentenweise Konvergenz, und $\pi_{J_i}(\gamma_m) = (\gamma_m(t))_{t\in J_i}$: also zeigt (++)

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_m(t) \quad \text{existiert in } E \text{ für jedes } t \in \bigcup_{i\geq 1} J_i \ .$$

Mit beliebigem $x_0 \in E$ ist dann

$$\gamma \ := \ (\gamma(t))_{t\in I} \quad \text{definiert durch} \quad \gamma(t) := \begin{cases} \lim_m \gamma_m(t), & t \in \bigcup_{i\geq 1} J_i \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Element von E^I. Für jedes i gilt wegen (++)

$$\pi_{J_i}(\gamma) \ = \ \beta_i \ \in \ K_{J_i} \ ,$$

also ist ein Punkt $\gamma \in E^I$ mit der Eigenschaft

$$\gamma \ \in \ \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\pi_{J_i} \in K_{J_i}\} \ = \ \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$$

gefunden. Insbesondere ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$ nichtleer. Wegen $Y_n \subset Z_n$ ist damit (∗∗) bewiesen: $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \neq \emptyset$. Also ist der Inhalt $\widetilde{P}$ auf $\mathcal{Z}$ (wie in (∗) definiert) σ-stetig in $\emptyset$.

4) Es gilt $E^I = \{\pi_J \in E^J\} \in \mathcal{Z}$ und $\widetilde{P}(E^I) = P_J(E^J) = 1$ für beliebiges $J \in \mathcal{H}(I)$; insbesondere ist $\widetilde{P}$ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{Z}$. Wegen 3) und Fortsetzungssatz 1.18+1.31 kann der Inhalt $\widetilde{P}$ auf $\mathcal{Z}$ eindeutig zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\sigma(\mathcal{Z}) = \mathcal{E}^I$ fortgesetzt werden.

Es bleibt zu verifizieren, daß diese Fortsetzung P die vorgegebenen $\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ als endlichdimensionale Randverteilungen liefert:
Betrachte ein festes $J \in \mathcal{H}(I)$ und Zylindermengen $Z := \{\pi_J \in A_J\}$ mit beliebigen $A_J \in \mathcal{E}^J$. Da P den Inhalt $\widetilde{P}$ fortsetzt, muß einerseits nach Definition in Schritt 2) gelten

$$P(Z) \;=\; \widetilde{P}(Z) \;=\; \widetilde{P}(\{\pi_J \in A_J\}) \;=\; P_J(A_J)\,,$$

andererseits zeigt die Definition eines Bildmaßes

$$P(Z) \;=\; P(\{\pi_J \in A_J\}) \;=\; \mathcal{L}(\pi_J|P)(A_J)\,.$$

Damit ist bewiesen

$$\mathcal{L}(\pi_J|P) \;=\; P_J \quad \text{als Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (E^J, \mathcal{E}^J)$$

für beliebiges $J \in \mathcal{H}(I)$. Damit ist der Beweis von Satz 12.6 abgeschlossen. □

Der Konsistenzsatz von Kolmogorov 12.6 ist das Werkzeug, welches die Konstruktion stochastischer Prozesse mit Werten in polnischen Räumen ermöglicht. Konstruktion bedeutet hier zunächst nur, ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf dem Raum aller möglichen Pfade anzugeben, welches ein gewünschtes System endlichdimensionaler Randverteilungen induziert.

B. Anwendungen des Konsistenzsatzes

Die Existenz beliebiger Produktmaße war in 4.13 als 'Satz ohne Beweis' formuliert worden, mit Verweis auf Bauer (1978, 1991). Als erste Anwendung des Konsistenzsatzes geben wir – wie in Kapitel IV angekündigt – einen Existenzbeweis für Produkte polnischer Räume. In diesen Beweis gehen außer den Eigenschaften polnischer Räume (10.24–10.26) und dem Konsistenzsatz 12.6 nur solche Hilfsmittel ein, die *vor der Formulierung von Satz 4.13* bereitgestellt wurden.

12.7 Satz (Produktmaße): Sei I eine beliebige Indexmenge, sei $(E, \mathcal{E})$ polnisch, sei für jedes $t \in I$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_t auf $(E, \mathcal{E})$ vorgegeben. Dann gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ mit der Eigenschaft

$$P(\mathop{\times}_{t\in I} A_t) \;=\; \prod_{t\in I} \mu_t(A_t) \quad \text{falls } A_t \in \mathcal{E} \text{ für jedes } t \in I,\;\; A_t \neq E \text{ höchstens endlich oft}\,.$$

Dieses P heißt Produktwahrscheinlichkeit $\bigotimes_{t\in I} \mu_t$.

Beweis: 1) Für jedes $J \in \mathcal{H}(I)$ gibt es nach 4.3 das Produktmaß mit endlich vielen Faktoren

$$P_J := \bigotimes_{t\in J} \mu_t \quad \text{auf} \ (E^J, \mathcal{E}^J) = (\mathop{\times}_{t\in J} E, \bigotimes_{t\in J} \mathcal{E}) ,$$

welches eindeutig festgelegt ist durch seine Werte

$$P_J(\mathop{\times}_{t\in J} A_t) = \prod_{t\in J} \mu_t(A_t) , \quad A_t \in \mathcal{E} , \ t \in J$$

auf den Rechtecken in $\mathcal{E}^J$. Die so definierte Familie

$$\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$$

bildet ein projektives System im Sinne von 12.4: Betrachte $K \subset J \in \mathcal{H}(I)$, dann gilt

$$(\pi^J_K)^{-1}(\mathop{\times}_{t\in K} A_t) = \mathop{\times}_{t\in J} \widetilde{A}_t \quad \text{mit } \widetilde{A}_t := A_t \text{ falls } t \in K, \ \widetilde{A}_t := E \text{ falls } t \in J \setminus K$$

und damit

$$P_J(\mathop{\times}_{t\in J} \widetilde{A}_t) = \mathop{\times}_{t\in J} P_t(\widetilde{A}_t) = \mathop{\times}_{t\in K} P_t(A_t) = P_K(\mathop{\times}_{t\in K} A_t) ;$$

zugleich aber hat man nach Definition des Bildmaßes

$$P_J(\mathop{\times}_{t\in J} \widetilde{A}_t) = P_J\left((\pi^J_K)^{-1}(\mathop{\times}_{t\in K} A_t)\right) = \mathcal{L}(\pi^J_K | P_J)(\mathop{\times}_{t\in K} A_t) .$$

Da die σ-Algebra $\mathcal{E}^K$ von den Rechtecken erzeugt wird, stimmen folglich die Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{L}(\pi^J_K|P_J)$ und P_K auf $(E^K, \mathcal{E}^K)$ überein.

2) Bisher wurden nur Wahrscheinlichkeitsmaße auf Produkträumen mit endlich vielen Faktoren betrachtet, die 'zueinander widerspruchsfrei' (das ist der Sinn der Konsistenzbedingung in 12.4) festgelegt sind. Ist $(E, \mathcal{E})$ polnisch, so existiert nach Konsistenzsatz 12.6 ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf dem Produktraum $(E^I, \mathcal{E}^I)$, aus dem man alle P_J als Bildmaße $\mathcal{L}(\pi_J|P)$ unter den Projektionsabbildungen π_J zurückerhält, $J \in \mathcal{H}(I)$. Wendet man P an auf Säulen mit Rechteckbasis in $(E^I, \mathcal{E}^I)$, erhält man für beliebiges $J \in \mathcal{H}(I)$ die Aussage

$$P(\mathop{\times}_{t\in I} A_t) = \prod_{t\in I} \mu_t(A_t) \quad \text{falls } A_t \in \mathcal{E} \text{ für } t \in J, \ A_t = E \text{ für } t \in I \setminus J ;$$

zugleich ist P durch seine Werte auf den Säulen mit Rechteckbasis eindeutig festgelegt. $\square$

Als nächstes konstruieren wir Markovketten (vgl. 11.2) und Markovprozesse in stetiger Zeit als Folgerung aus dem Kolmogorov-Konsistenzsatz.

12.7' Hilfssatz: Betrachte meßbare Räume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\widetilde{P}$ auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und eine Übergangswahrscheinlichkeit $K(\cdot, \cdot)$ von $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

a) Bezeichnet A_{ω_1} den ω_1-Schnitt durch eine Menge $A \in \bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$, so gilt

$$f_A \; : \; \omega_1 \longrightarrow K(\omega_1, A_{\omega_1}) \quad \text{ist } \mathcal{A}_1\text{–meßbar} .$$

b) Für $A \in \bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$ liefert

$$P(A) \; := \; \int_{\Omega_1} \widetilde{P}(d\omega_1) \int_{\Omega_2} K(\omega_1, d\omega_2) \, 1_A(\omega_1, \omega_2) \; = \; \int_{\Omega_1} \widetilde{P}(d\omega_1) \, f_A(\omega_1)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(\bigtimes_{i=1}^{2} \Omega_i \, , \, \bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i \right)$.

Beweis: Die Behauptung a) gilt zunächst für Rechtecke in $\bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$; dann setzt man

$$\mathcal{H} \; := \; \{ A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : \; \omega_1 \; \rightarrow \; K(\omega_1, A_{\omega_1}) \quad \text{ist } \mathcal{A}_1\text{–meßbar} \}$$

und weist analog zum Beweis von 4.6 nach, daß $\mathcal{H}$ Dynkin ist. Es folgt $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$. Wegen Linearität des Integrals ist P wie in b) definiert zunächst endlich additiv, also ein Inhalt auf $\bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$. Wir zeigen σ-Stetigkeit in $\emptyset$. Seien $(A_m)_m$ in $\bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$ mit $A_m \downarrow \emptyset$. Aus $A_m \downarrow \emptyset$ folgt $A_{\omega_1} \downarrow \emptyset$ für jedes feste $\omega_1 \in \Omega_1$, damit für f_{A_m} wie in a) definiert $f_{A_m}(\omega_1) \downarrow 0$. Dominierte Konvergenz unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\widetilde{P}$ auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ liefert nun $P(A_m) \downarrow 0$. Damit ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$. $\square$

12.8 Satz (Markovketten): Zu jeder Übergangswahrscheinlichkeit $Q(\cdot, \cdot)$ auf einem polnischen Raum $(E, \mathcal{E})$ *existiert* eine Markovkette. Genauer: schreibe $(\pi_t)_{t \in I}$ für den kanonischen Prozeß auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$, $I := I\!N_0$, sei ν ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E, \mathcal{E})$; dann existiert zu Q und ν genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ mit der Eigenschaft

$$P\left(\pi_i \in A_i, 0 \le i \le n \right) \; = \; \int \nu(dx_0) \, 1_{A_0}(x_0) \int Q(x_0, dx_1) \, 1_{A_1}(x_1) \ldots \int Q(x_{n-1}, dx_n) \, 1_{A_n}(x_n)$$

für alle $A_i \in \mathcal{E}$ und alle $n \in I\!N$.

Beweis: 1) Eindeutigkeit: ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ ist nach 1.13 durch seine Werte auf den Säulen mit Rechteckbasis eindeutig festgelegt.

2) Existenz: i) Wir betrachten in einem ersten Schritt endliche Teilmengen der Form $J_n := \{0, \ldots, n\}$ von I und zeigen, daß für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$P_n(A) \;:=\; \int_E \nu(dx_0) \int_E Q(x_0, dx_1) \ldots \int_E Q(x_{n-1}, dx_n)\, 1_A(x_0, \ldots, x_n) \quad , \quad A \in \mathcal{E}^{J_n}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_n auf $(E^{J_n}, \mathcal{E}^{J_n})$ gegeben ist.

Dies folgt aus 12.7' per Induktion nach n. Für $n = 0$ ist $P_0 = \nu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E, \mathcal{E})$. Ist für ein $n \geq 0$ schon P_n als Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (E^{J_n}, \mathcal{E}^{J_n})$ nachgewiesen, so setzt man $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (E, \mathcal{E})$, wendet 12.7' an, und sieht, daß P_{n+1} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E^{J_{n+1}}, \mathcal{E}^{J_{n+1}})$ ist.

ii) Liftet man für $n_1 < n_2$ Mengen $A \in \mathcal{E}^{J_{n_1}}$ nach $\mathcal{E}^{J_{n_2}}$ durch die Festsetzung

$$\widetilde{A} \;:=\; A \times \mathop{\times}_{i=n_1+1}^{n_2} E \;=\; \left(\pi^{J_{n_2}}_{J_{n_1}}\right)^{-1}(A) \;,$$

so gilt offensichtlich

$$\mathcal{L}(\pi^{J_{n_2}}_{J_{n_1}} | P_{n_2}) \;=\; P_{n_1}$$

und damit die Konsistenzbedingung des Satzes von Kolmogorov für die Teilfamilie

$$\{P_n : n \in \mathbb{N}_0\} \;.$$

iii) Sei nun K eine beliebige endliche Teilmenge von $I = \mathbb{N}_0$, dann definieren wir

$$P_K \;:=\; \mathcal{L}(\pi^{J_n}_K | P_n)$$

für eine beliebige Obermenge $J_n = \{0, \ldots, n\}$ von K, und haben mit dieser Festsetzung insbesondere die Konsistenzbedingung des Satzes von Kolmogorov

$$P_{K_1} \;=\; \mathcal{L}(\pi^{K_2}_{K_1} | P_{K_2}) \quad \text{für } K_1 \subset K_2 \text{ beliebig in } \mathcal{H}(I)$$

erfüllt. Damit ist $\{P_K : K \in \mathcal{H}(I)\}$ ein projektives System. Da $(E, \mathcal{E})$ nach Voraussetzung polnisch ist, liefert 12.6 die Existenz genau eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf dem Produktraum $(E^I, \mathcal{E}^I)$ mit der Eigenschaft

$$P_J \;=\; \mathcal{L}(\pi_J | P) \quad \text{für jedes } J \in \mathcal{H}(I) \;.$$

Nach Konstruktion hat P dann insbesondere die Eigenschaft

$$P\,(\pi_i \in A_i, 0 \leq i \leq n) \;=\; \int \nu(dx_0)\, 1_{A_0}(x_0) \int Q(x_0, dx_1)\, 1_{A_1}(x_1) \ldots \int Q(x_{n-1}, dx_n)\, 1_{A_n}(x_n)$$

für alle $A_i \in \mathcal{E}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

3) Wir zeigen: unter dem eben konstruierten Wahrscheinlichkeitsmaß P ist der kanonische Prozeß $\pi = (\pi_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ auf $(E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{E}^{\mathbb{N}_0})$ Markov mit Ein-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit $Q(\cdot,\cdot)$ und Startverteilung $\nu = \mathcal{L}(\pi_0 | P))$ wie in 11.2:

Die zweite Behauptung ist klar nach Konstruktion. Zum Nachweis der ersten schreiben wir $\mathcal{F}_n := \sigma(\pi_i : 0 \le i \le n)$ für die σ-Algebra der Vergangenheit bis zur Zeit n, $n \ge 0$. Zu zeigen ist

$$(+) \qquad P(\pi_{n+1} \in F | \mathcal{F}_n) \;=\; Q(\pi_n, F)\;, \quad F \in \mathcal{E}\;.$$

Die Ereignisse in $\mathcal{F}_n$ sind von Form $\{(\pi_0, \ldots, \pi_n) \in A\}$, $A \in \mathcal{E}^{J_n}$, wobei nach Konstruktion

$$\begin{aligned} &E_P\left(1_{\{(\pi_0,\ldots,\pi_n)\in A\}}\, 1_F(\pi_{n+1})\right) \;=\; P_{n+1}(A \times F) \\ &= \int P_n(\, d(x_0, \ldots, x_n)\,)\, 1_A(x_0, \ldots, x_n)\, Q(x_n, F) \\ &= E_P\left(1_{\{(\pi_0,\ldots,\pi_n)\in A\}}\, Q(\pi_n, F)\right) \end{aligned}$$

gilt; also ist $(+)$ nachgewiesen.

6) *Bemerkung:* Es existiert ein anderer Beweis, der ohne die Voraussetzung eines polnischen Zustandsraumes auskommt (Satz von Ionescu-Tulcea, siehe Gänssler-Stute 1977, p.49). Auf Separabilität des Zustandsraumes verzichten zu wollen macht für eine 'schöne' Theorie der Markovketten jedoch aus anderen Gründen, deutlich erklärt im Buch von Nummelin (1985), keinen Sinn. □

Als nächstes betrachten wir Markovprozesse in stetiger Zeit.

12.9 Definition: Sei $(E, \mathcal{E})$ ein meßbarer Raum. Eine Familie $(K_t(\cdot,\cdot))_{t \ge 0}$

$$\text{für jedes } t \ge 0: \quad K_t(x, dy) \quad \text{ist eine Übergangswahrscheinlichkeit auf } (E, \mathcal{E})\;,$$

wobei $K_0(x, \cdot) = \epsilon_x(\cdot)$ Diracmaße sind, $x \in E$, mit der Eigenschaft

$$K_{t+s}(x, dy) \;=\; \int_E K_t(x, dz) K_s(z, dy) \quad \text{für alle } 0 \le s, t < \infty$$

heißt *Halbgruppe von Übergangswahrscheinlichkeiten* oder *Markov-Halbgruppe auf* $(E, \mathcal{E})$.

12.9' Definition: Sei $(E, \mathcal{E})$ ein meßbarer Raum. Betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ in $\mathcal{A}$, und einen $\mathbb{F}$-adaptierten Prozeß $X = (X_t)_{t \ge 0}$ auf

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$. Dann heißt X *Markov bezüglich* $I\!F$ *mit Halbgruppe* $(K_t(\cdot,\cdot))_{t\geq 0}$ *und Startverteilung* ν falls gilt: $\mathcal{L}(X_0 \mid P) = \nu$, und für $0 \leq s < t < \infty$ beliebig

$$(*) \qquad \omega \;\to\; K_{t-s}(x, F) \text{ liefert eine Festlegung von } P(\, X_t \in F \mid \mathcal{F}_s\,)\,, \quad F \in \mathcal{E}\,.$$

Häufig betrachtet man als Filtration einfach die Geschichte von X: $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_r : 0 \leq r \leq t\}$, $t \geq 0$, wie in 11.3', und nennt X kurz *Markov*, ohne ausdrücklich eine Filtration zu erwähnen. Die wichtige Interpretation der Markoveigenschaft $(*)$ lautet: Gegeben die *Vergangenheit* $\mathcal{F}_s$ bis zur Zeit s, wird die beste Prognose für den Zustand des Prozesses X zu einer *zukünftigen* Zeit $t > s$ geliefert durch den Kern $K_{t-s}(X_s, \cdot)$, und dieser hängt *nur vom zuletzt erreichten Zustand* X_s des Prozesses ab.

12.9" Satz (Markovprozesse in stetiger Zeit): Zu jeder Halbgruppe von Übergangswahrscheinlichkeiten auf einem polnischen Raum $(E, \mathcal{E})$ gibt es einen Markovprozeß.

Beweis: a) Schreibe $I = [0, \infty)$, fixiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $(E, \mathcal{E})$ als Startverteilung, sei $(K_t)_{t\geq 0}$ eine Markov-Halbgruppe auf $(E, \mathcal{E})$. Für $J \in \mathcal{H}(I)$, $J = \{t_0, \ldots, t_\ell\}$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty$ wird durch

$$P_J(A) \;:=\; \int_E \nu(dx_0) \int_E K_{t_1-t_0}(x_0, dx_1) \ldots \int_E K_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{\ell-1}, dx_\ell)\, 1_A(x_0, x_1, \ldots, x_\ell)\,, \quad A \in \mathcal{E}^J$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E^J, \mathcal{E}^J)$ definiert. Das beweist man – mit geringfügigen notationellen Änderungen – genau wie im zeitdiskreten Fall in 12.8 1).
Für Mengen J mit $0 \notin J$ setzt man $\widetilde{J} := \{0\} \cup J$, und definiert $P_J(A_J) := P_{\widetilde{J}}(E \times A_J)$, $A_J \in \mathcal{E}^J$.
b) Wir zeigen: $\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ ist eine projektive Familie. Betrachte etwa

$$J := \{t_1, \ldots, t_l\}\,, \quad t_1 < \ldots < t_{r-1} < t_r < t_{r+1} < \ldots < t_\ell\,, \quad K := J \setminus \{t_r\}\,.$$

Sei $A_K := \bigtimes_{t\in K} A_t$ (mit $A_t \in \mathcal{E}$ für $t \in K$) ein Rechteck in $\mathcal{E}^K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P_K(\bigtimes_{t\in K} A_t) \;&=\; \int_E \nu(dx_0) 1_{A_{t_0}}(x_0) \int_E K_{t_1-t_0}(x_0, dx_1)\, 1_{A_{t_1}}(x_1) \ldots \\ &\quad \ldots \int_E K_{t_{r+1}-t_{r-1}}(x_{r-1}, dx_{r+1})\, 1_{A_{t_{r+1}}}(x_{r+1}) \ldots \\ &\quad \ldots \int_E K_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{\ell-1}, dx_\ell)\, 1_{A_{t_\ell}}(x_\ell)\,. \end{aligned}$$

Mit der Halbgruppeneigenschaft von $(K_t)_{t\geq 0}$ kann man das mittlere Integral ersetzen durch

$$\ldots \int_E K_{t_r - t_{r-1}}(x_{r-1}, dx_r)\, 1_E(x_r) \int_E K_{t_{r+1}-t_r}(x_r, dx_{r+1})\, 1_{A_{t_{r+1}}}(x_{r+1}) \ldots$$

und erhält dadurch

$$P_K(A_K) \;=\; P_J(\mathop{\times}_{i=1}^{r-1} A_{t_i} \times E \times \mathop{\times}_{i=r+1}^{\ell} A_{t_i}) \;=\; P_J(\,(\pi_K^J)^{-1}(A_K)\,)\;.$$

Mit analogen Argumenten behandelt man alle Situationen $K \subset J \in \mathcal{H}(I)$. Da das System der Rechtecke einen durchschnittsstabilen Erzeuger von $\mathcal{E}^K$ bildet, ist $\mathcal{L}(\pi_K^J|P_J) = P_K$ gezeigt.
c) Da $(E, \mathcal{E})$ polnisch, liefert der Konsistenzsatz 12.6 ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß $P = P_\nu$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ so daß

$$P_J \;=\; \mathcal{L}(\pi_J|P) \quad \forall\, J \in \mathcal{H}(I)\;.$$

d) Mit Startverteilungen $\nu := \epsilon_x$, $x \in E$, erhält man also eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(P_x)_{x\in E}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$, $I = [0,\infty)$, so daß gilt: der kanonische Prozeß $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ hat die Eigenschaft

$$(12.10)\qquad \begin{cases} P_x(\,\pi_0 \in A_0,\; \pi_{t_i} \in A_{t_i} \text{ für } 1 \leq i \leq \ell\,) \\[1ex] =\; 1_{A_0}(x) \int_E \ldots \int_E K_{t_1 - t_0}(x, dx_1) 1_{A_{t_1}}(x_1) \ldots K_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{\ell-1}, dx_\ell) 1_{A_{t_\ell}}(x_\ell) \\[1ex] \text{für jedes } x \in E\;,\; \text{alle } 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty\;,\; A_{t_i} \in \mathcal{E}\;,\; \ell \geq 1\;. \end{cases}$$

Insbesondere gilt für jedes x

$$\pi_0 = x \quad P_x\text{-fast sicher;}$$

wir schreiben E_x für den Erwartungswert bezüglich P_x auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$, $x \in E$.
e) Definiere $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ als die vom kanonischen Prozeß π auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ erzeugte Filtration: $\mathcal{F}_t := \sigma(\pi_s : 0 \leq s \leq t)$, $t \geq 0$. Wir zeigen die *Markoveigenschaft* von π bezüglich $\mathbb{F}$ unter jedem der Wahrscheinlichkeitsmaße P_x, $x \in E$:

$$(12.11)\qquad P_x(\pi_t \in A|\mathcal{F}_s) \;=\; K_{t-s}(\pi_s, A) \quad \text{für alle } \; s < t\;,\; A \in \mathcal{E}\;.$$

Zum Beweis fixiert man $s < t$, wählt $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_\ell = s$ und Mengen $A_{s_0}, A_{s_1}, \ldots, A_{s_\ell}, A_t$ in $\mathcal{E}$, und verifiziert mit Agumenten analog zum diskreten Fall 12.8 c) zuerst

$$E_x\left(\, 1_{\{\pi_{s_0}\in A_{s_0},\ldots,\pi_{s_\ell}\in A_{s_\ell}\}}\, 1_{A_t}(\pi_t)\right) \;=\; E_x\left(\, 1_{\{\pi_{s_0}\in A_{s_0},\ldots,\pi_{s_\ell}\in A_{s_\ell}\}}\, K_{t-s}(\pi_s, A_t)\right)\;.$$

Damit hat man einen durchschnittsstabilen Erzeuger der σ-Algebra $\mathcal{F}_s = \sigma(\pi_r : 0 \le r \le s)$ betrachtet, und ein Dynkinschluß zeigt

$$E_{P_x}\left(1_F \, 1_{A_t}(\pi_t) \right) \;=\; E_{P_x}\left(1_F \, K_{t-s}(\pi_s, A_t) \right) \quad \text{für jedes } F \in \mathcal{F}_s .$$

Damit ist (12.11) bewiesen.

f) Mit beliebigen Startverteilungen ν auf $(E, \mathcal{E})$ erhält man analog zu (12.11) unter P_ν

$$\begin{cases} i) & P_\nu(\pi_t \in A | \mathcal{F}_s) \;=\; K_{t-s}(\pi_s, A) \quad \text{für alle } \; s < t \; , \; A \in \mathcal{E} \\ ii) & \mathcal{L}(\pi_0 | P_\nu) \;=\; \nu \; . \end{cases}$$

□

Es ist wichtig zu betonen, daß wir bis jetzt einen Markovprozeß im Sinne eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P konstruiert haben, das auf dem Raum aller möglichen Pfade $(E^{[0,\infty)}, \mathcal{E}^{[0,\infty)})$ spielt, um eine Realisierung $t \to \alpha(t)$ gemäß $P(d\alpha)$ auszuwürfeln. In diesem Stadium gibt es noch keine 'Pfadeigenschaften', wie zum Beispiel Stetigkeit P-fast sicher (siehe 13.5) des ausgewürfelten $\alpha \in E^{[0,\infty)}$, für gewisse Klassen von Prozessen. Pfadeigenschaften sind ein zweiter wesentlicher Schritt – nach dem Konsistenzsatz – in der Konstruktion stochastischer Prozesse.

12.12 Bemerkung (Markoveigenschaft): Sei $(E, \mathcal{E})$ polnisch, $I = [0, \infty)$, sei $(K_t)_{t \ge 0}$ eine Markov-Halbgruppe auf $(E, \mathcal{E})$. Betrachte den Markov-Prozeß $(\pi_t)_{t \ge 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I, \mathbb{F}, (P_x)_{x \in E})$ aus 12.9. Die folgenden Aussagen beweist man mit Dynkin-Schlüssen (Details als Übungsaufgabe) bzw. mit 'Aufbau meßbarer Funktionen'.

a) Für jedes feste $A \in \mathcal{E}^I = \sigma(\pi_t : t \ge 0)$ ist $x \to P_x(A)$ eine $\mathcal{E}$-meßbare Funktion.

b) Auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ gibt es *Shifts* $(\Theta_s)_{s \ge 0}$ definiert durch

$$E^I \ni \; \alpha = (\alpha_t)_{t \ge 0} \quad \to \quad \Theta_s \alpha := (\alpha_{s+t})_{t \ge 0} \; \in E^I \; .$$

Ein Shift Θ_s wirft also das Anfangsstück $(\alpha_r)_{0 \le r < s}$ eines Pfades $\alpha \in E^I$ weg und stellt für den verbleibenden Rest des Pfades die Uhr um s zurück: $\Theta_s \alpha$ ist die Abbildung $I \ni t \to \alpha_{s+t} \in E$. Schreibt man $\mathcal{Z}^s$ für die Sub-σ-*Algebra der Zukunft ab* s in $\mathcal{E}^I$ (das ist die Zukunft ab s im kanonischen Prozeß π auf $(E^I \mathcal{E}^I)$)

$$\mathcal{Z}^s \;:=\; \sigma(\, \pi_r : r \ge s \,) \; , \quad s \ge 0 \; ,$$

so ist für jedes $s \geq 0$ der Shift Θ_s eine $\mathcal{Z}^s$–$\mathcal{E}^I$–meßbare Abbildung (für Zylindermengen mit Rechteckbasis $\bigtimes_{t \in I} A_t,\ A_t \neq E$ für höchstens endlich viele t, gilt

$$\{\,\Theta_s \in \bigtimes_{t \in I} A_t\,\} \;=\; \{\,\alpha \in E^I : \alpha_{t+s} \in A_t \text{ für alle } t \geq 0\,\} \;\in\; \mathcal{Z}_s\,,$$

und diese Mengen erzeugen $\mathcal{E}^I$), und für jedes $F \in \mathcal{Z}^s$ gibt es ein $A \in \mathcal{E}^I$ so daß

$$1_F \;=\; 1_A \circ \Theta_s \quad \text{auf } E^I.$$

Damit gibt es für jede beschränkte $\mathcal{Z}^s$-meßbare Funktion $Y : E^I \to I\!R$ eine beschränkte $\mathcal{E}^I$-meßbare Funktion $G : E^I \to I\!R$ so daß

$$Y \;=\; G \circ \Theta_s\,.$$

c) Aufgrund von a) und b) kann die Markov-Eigenschaft in der kompakten Form

(12.13) $\quad E_x\left(G \circ \Theta_s \mid \mathcal{F}_s\right) \;=\; E_{(\pi_s)}\left(G\right)$ für alle $s \geq 0$, alle G beschränkt und $\mathcal{E}^I$-meßbar

geschrieben werden. Beachte dabei: auf der rechten Seite ist $E_{(\pi_s)}(G)$ eine suggestive Schreibweise für $h \circ \pi_s$, wobei h die nach a) meßbare Funktion $x \to h(x) := E_x(G)$ bezeichnet.
Die Interpretation von (12.13) ist noch schöner als die von (12.11):
Gegeben die Vergangenheit $\mathcal{F}_s$ im Prozeß π bis zur Zeit s, wird die Wahrscheinlichkeit einer (ganz allgemein gefaßten) Größe $Y = G \circ \Theta_s$ in der Zukunft $\mathcal{Z}^s$ ab s berechnet durch 'Einsetzen des gegenwärtigen Zustandes π_s als Startwert' in $x \to E_x(G)$. □

Eine wichtige Klasse von reellwertigen Prozessen steht in direktem Bezug zu den in Kapitel IX betrachteten unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $I\!R$. Prozesse dieses Typs starten zur Zeit 0 in 0 und addieren über beliebig vorgegebene Sätze disjunkter Zeitintervalle

$$t_1 - t_0, t_2 - t_1, \ldots, t_l - t_{l-1} \quad \text{mit } 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l < \infty$$

unabhängige Zuwächse auf, deren Verteilung durch charakteristische Funktionen der Form

$$e^{(t_1 - t_0)\psi(\cdot)}\;,\; e^{(t_2 - t_1)\psi(\cdot)}\;,\;\ldots\;,\; e^{(t_l - t_{l-1})\psi(\cdot)}$$

festgelegt ist. Dabei steht $\psi(\cdot)$ für den charakteristischen Exponent einer unendlich teilbaren Verteilung mit Tripel (a, σ^2, Λ) wie in der Lévy-Chintchine-Formel 9.12

(12.13′) $$\psi(v) \;=\; iav - \frac{1}{2}\sigma^2 v^2 + \int_{I\!R \setminus \{0\}} [e^{ivx} - 1 - (ivx)1_{\{|x| \leq 1\}}]\,\Lambda(dx)\,, \quad v \in I\!R$$

($a \in I\!R$, $\sigma^2 \geq 0$, $\Lambda \in \mathcal{M}$, siehe 9.1–9.3). Wieder wird der Konsistenzsatz 12.6 zeigen, daß die oben gemachten Vorgaben durch genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf dem Raum aller möglichen Pfade $\alpha : [0,\infty) \to I\!R$ realisiert werden. Man nennt Prozesse dieser Art 'Prozesse mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen', oft abgekürzt PIIS (increments independent and stationary), oder 'Lévy-Prozesse' nach P. Lévy. Eine exzellente Referenz ist das Buch von Bertoin (1996).

12.14 Definition: Eine *Faltungshalbgruppe* ist eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ mit $\mu_0 = \epsilon_0$ und

$$\mu_{t_1+t_2} = \mu_{t_1} * \mu_{t_2} \;\text{ für alle } t_1, t_2 \text{ in } [0,\infty)\ .$$

Ein Beispiel: für $a \in I\!R$, $\sigma^2 \geq 0$, $\Lambda \in \mathcal{M}$ wird mit den Bezeichnungen aus 9.1–9.3 durch

$$\mu_t \ :=\ \epsilon_{ta} \ *\ \mathcal{N}(0, t\sigma^2) \ *\ Q_{t\Lambda}\ , \quad t > 0\ , \quad \mu_0 := \epsilon_0$$

eine Faltungshalbgruppe auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ definiert, mit zugehörigen charakteristischen Funktionen

$$v \ \longrightarrow\ \int e^{ivx}\, \mu_t(dx) \ =\ e^{t\,\psi(v)}\ , \quad v \in I\!R\ ,\ t \geq 0$$

wobei $\psi(\cdot)$ der charakteristische Exponent (12.13') zu (a, σ^2, Λ) ist.

12.14' Definition: Ein $I\!R^d$-wertiger stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt *Prozeß mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen (PIIS)* oder *Lévy-Prozeß*, falls es eine Kollektion von Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_r, $r \geq 0$, auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ gibt so daß gilt

$$0 \leq s < t < \infty\ :\quad \text{Zuwachs } X_t - X_s \text{ ist unabhängig von } \mathcal{F}_s \text{ und verteilt nach } \mu_{t-s}$$

und $X_0 = 0$ P-fast sicher; dabei steht

$$I\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \quad , \quad \mathcal{F}_t = \sigma\{X_r : 0 \leq r \leq t\}\ ,\ t \geq 0$$

für die Geschichte des Prozesses X.

Es ist leicht zu sehen, daß $(\mu_r)_{r\geq 0}$ in 12.14' notwendig eine Faltungshalbgruppe sein muß.

12.14” Satz (PIIS): Zu jeder Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ gibt es einen Prozeß mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen.
Dieser ist insbesondere Markov mit Halbgruppe

$$(K_t(\cdot,\cdot))_{t\geq 0}\ , \quad K_t(x,F) := \mu_t(F-x)\ ,\ t\geq 0\ ,\ x\in\mathbb{R}^d\ ,\ F\in\mathcal{E}$$

wobei $F - x = \{v - x : v \in F\}$ die um x verschobene Menge F bezeichnet.

Beweis: Schreibe $(E,\mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ und $I = [0,\infty)$, sei $(\mu_t)_{t\geq 0}$ ein Faltungshalbgruppe auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Auf irgendeinem Hilfsraum $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{P})$ bereiten wir (etwa mit Hilfe von 12.7) vor

$$\text{unabhängige Zufallsvariable} \quad \xi_r \ \sim\ \mu_r\ , \quad r > 0\ .$$

Nach Definition der Faltung von Wahrscheinlichkeitsmaßen gilt dann für jedes Paar t_1, t_2 in I

$$(\mu_{t_1} * \mu_{t_2})(F) \ =\ \overline{P}(\xi_{t_1} + \xi_{t_2} \in F) \ =\ \int_{\mathbb{R}^d} \mu_{t_1}(dy)\,\mu_{t_2}(F-y)\ , \quad F\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\ .$$

1) Wir zeigen: Jede Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ definiert eine Markov-Halbgruppe $(K_t)_{t\geq 0}$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ durch die Festsetzung

$$K_t(x,F) \ :=\ \overline{P}(x + \xi_t \in F) \ =\ \mu_t(F-x)\ , \quad x\in\mathbb{R}^d\ ,\ F\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\ ,\ t\geq 0\ .$$

Bew.: Die Meßbarkeit von $K_t(\cdot, A)$ für festes $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ checkt man zunächst für d-dimensionale halboffene Intervalle $A := (-\infty, a] = \bigtimes_{i=1}^{d} (-\infty, a_i]$, $a = (a_1,\ldots,a_d)$: jede Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^d$ ist eine meßbare Funktion, also ist mit $F_t := \mu_t((-\infty,\cdot])$ für festes a auch

$$x \ \to\ F_t(a-x) \ =\ \mu_t((-\infty, a-x]) \ =\ \mu_t(A-x) \ =\ K_t(x,A)$$

meßbar; danach zeigt ein Dynkinschluss die Aussage für beliebige $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Klar ist $K(x,\cdot)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß für festes x. Also ist jedes $K_t(\cdot,\cdot)$ eine Übergangswahrscheinlichkeit auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Die Halbgruppeneigenschaft von $(K_t)_{t\geq 0}$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} K_{t_1+t_2}(x,F) \ &=\ \mu_{t_1+t_2}(F-x) \ =\ (\mu_{t_1} * \mu_{t_2})(F-x) \ =\ \overline{P}(\xi_{t_1} + \xi_{t_2} \in F-x) \\ &=\ \overline{P}\,(\,x + \xi_{t_1} + \xi_{t_2}\ \in\ F\,) \\ &=\ \int_{\mathbb{R}^d} \overline{P}([x+\xi_{t_1}] \in dy)\ \overline{P}(\xi_{t_2}\ \in\ F-y) \\ &=\ \int_{\mathbb{R}^d} \overline{P}(\,x + \xi_{t_1} \in dy\,)\ \overline{P}(\,y + \xi_{t_2} \in F\,) \\ &=\ \int_{\mathbb{R}^d} K_{t_1}(x,dy)\ K_{t_2}(y,F)\ . \end{aligned}$$

2) Da $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) = (E, \mathcal{E})$ polnisch, zeigen 12.6 und 12.9 zusammen: zur Startverteilung $\nu := \epsilon_0$ gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$, so daß der kanonische Prozeß $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ Markov ist mit Halbgruppe $(K_t)_{t\geq 0}$

$$(+) \qquad P(\pi_t \in A | \mathcal{F}_s) \;=\; K_{t-s}(\pi_s, A) \quad \text{für alle } s < t, A \in \mathcal{E}$$

und P-fast sicher in $0 \in \mathbb{R}^d$ startet; dabei ist $\mathbb{F}$ die Geschichte von π.

3) Wir zeigen: Unter P aus 2) ist der kanonische Prozeß $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ ein Prozeß mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen.

Bew: Wegen $(+)$ gilt nach 10.33 für jede meßbare Funktion $h : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$

$$\begin{aligned} E_P(h(\pi_t - \pi_s)|\mathcal{F}_s) &= \int_{\mathbb{R}^d} h(y - \pi_s) K_{t-s}(\pi_s, dy) \\ &= \int h(y - \pi_s)\, \overline{P}(\pi_s + \xi_{t-s} \in dy) \;=\; \int h(v)\, \overline{P}(\xi_{t-s} \in dv) \\ &= \int h(\xi_{t-s})\, d\overline{P} \;=\; \int h(y)\, \mu_{t-s}(dy) \quad =: \; \mu_{t-s}(h)\;; \end{aligned}$$

beachte, daß die rechte Seite dieser Gleichungskette deterministisch ist. Nach Definition der bedingten Erwartung erhält man hieraus

$$(\diamond) \qquad E_P\,(\,1_A\, h(\pi_t - \pi_s)\,) \;=\; E_P\,(\,1_A\, E_P(h(\pi_t - \pi_s)|\mathcal{F}_s)\,) \;=\; P(A) \cdot \mu_{t-s}(h)$$

für beliebiges $A \in \mathcal{F}_s$, $h = 1_B$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Insbesondere ist $\pi_t - \pi_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ unter P. Mit $(\diamond)$ ist also bewiesen

$$(12.15) \qquad 0 \leq s < t < \infty \text{ beliebig: } \; \pi_t - \pi_s \text{ ist unabhängig von } \mathcal{F}_s \text{ mit } \mathcal{L}(\pi_t - \pi_s | P) = \mu_{t-s}$$

Insbesondere impliziert (12.15) bei sukzessivem Hintereinanderschalten disjunkter Zeitintervalle

$$(12.16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{für beliebige } 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty : \text{ die Zuwächse} \\ \pi_{t_1}, \pi_{t_2} - \pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_\ell} - \pi_{t_{\ell-1}} \text{ sind unabhängig unter } P \\ \text{mit } \mathcal{L}(\pi_{t_i} - \pi_{t_{i-1}} | P) = \mu_{t_i - t_{i-1}}, \quad 1 \leq i \leq \ell \end{array} \right.$$

(beachte $\pi_0 = 0$ P-fast sicher). Also ist der kanonische Prozeß $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I, P)$ ein Prozeß mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen. □

Wir diskutieren nun einige wichtige Spezialfälle. Mit 12.14" geben wir zunächst eine *vorläufige* Konstruktion der d-dimensionalen Brownschen Bewegung: diese wird konstruiert als kanonischer Prozeß auf dem Raum $((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}, (\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^{[0,\infty)})$ aller möglichen Abbildungen $[0, \infty) \to \mathbb{R}^d$

unter einem durch den Konsistenzsatz eindeutig bestimmten Wahrscheinlichkeitsmaß, welches unabhängige normalverteilte Zuwächse des kanonischen Prozesses sicherstellt. Dies ist eine Konstruktion allein im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen; der kanonische Prozeß $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ hat offenkundig noch keinerlei 'Pfadeigenschaften'.

12.17 Beispiel (Brownsche Bewegung): Sei $d \geq 1$, sei $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch und nichtnegativ definit. Wir wollen einen $\mathbb{R}^d$-wertigen PIIS mit normalverteilten Zuwächsen konstruieren.
1) Auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ist eine Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ gegeben durch

$$(*) \qquad \mu_t \;:=\; \mathcal{N}(\,0\,,\, t\cdot\Sigma\,)\,, \quad t \geq 0\;:$$

die zugehörigen charakteristischen Funktionen sind nach 7.7

$$v \quad\longrightarrow\quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\,v^\top x}\,\mu_t(dx) \;=\; e^{-\frac{1}{2}\,t\;\,v^\top\Sigma\,v}\,, \quad v \in \mathbb{R}^d\,,\; t \geq 0$$

(wir identifizieren $\mathcal{N}(0,0)$ mit dem Diracmaß ϵ_0, $0 \in \mathbb{R}^d$), wobei der Faktor t im charakteristischen Exponenten die Faltungshalbgruppeneigenschaft impliziert: $\mu_{t_1} * \mu_{t_2} = \mu_{t_1+t_2}$.
2) Betrachte wieder den kanonischen Prozeß $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$, mit $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $I = [0,\infty)$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die Geschichte von π, wie in 12.14": dann gibt es zur Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ in $(*)$ genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$, so daß π unter P unabhängige und zeitlich homogene normalverteilte Zuwächse besitzt:

für $0 \leq s < t < \infty$: $\pi_t - \pi_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ mit $\mathcal{L}(\pi_t - \pi_s | P) = \mathcal{N}(\,0\,,\,(t-s)\cdot\Sigma\,)$

besitzt, vgl. (12.15), mit $\pi_0 = 0$ P-fast sicher. Insbesondere wird (12.16) zu

$$\begin{pmatrix} \pi_{t_1} \\ \pi_{t_2} - \pi_{t_1} \\ \vdots \\ \pi_{t_\ell} - \pi_{t_{\ell-1}} \end{pmatrix} \quad\sim\quad \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0_d \\ 0_d \\ \vdots \\ 0_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1\Sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (t_2-t_1)\Sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (t_\ell - t_{\ell-1})\Sigma \end{pmatrix}\right)$$

unter P, für beliebige $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty$, mit $\pi_0 = 0$ P-fast sicher. Transformationseigenschaften von Normalverteilungen unter linearen Abbildungen (siehe 7.5) zeigen, daß die letzte Aussage äquivalent ist zu

$$(12.18) \qquad \begin{pmatrix} \pi_{t_1} \\ \pi_{t_2} \\ \vdots \\ \pi_{t_\ell} \end{pmatrix} \quad\sim\quad \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0_d \\ 0_d \\ \vdots \\ 0_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1\Sigma & t_1\Sigma & \dots & t_1\Sigma \\ t_1\Sigma & t_2\Sigma & \dots & t_2\Sigma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1\Sigma & t_2\Sigma & \dots & t_\ell\Sigma \end{pmatrix}\right)$$

unter P, für beliebige $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty$, mit $\pi_0 = 0$ P-fast sicher. Will man nicht notwendig aufsteigend geordnete Zeitpunkte t_i betrachten, schreibt man die $d \times d$-Blöcke der Kovarianzmatrix in (12.18) als

$$(t_i \wedge t_j) \cdot \Sigma \ , \quad i, j = 1, \ldots, \ell \ .$$

Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ ist eindeutig durch das System seiner endlichdimensionalen Randverteilungen festgelegt, nach Definition der σ-Algebra $\mathcal{E}^I$; (12.18) ist das System der *endlichdimensionalen Randverteilungen der Brownschen Bewegung mit Kovarianzmatrix* Σ.
3) Wir werden in Kapitel XIII zeigen, daß ein 'typischer' Pfad der Brownschen Bewegung stetig ist, und werden die Forderung nach *stetigen Pfaden* in die endgültige Definition der Brownschen Bewegung aufnehmen (siehe unten 13.9). □

Als nächstes wichtiges Beispiel konstruieren wir symmetrisch stabile Prozesse.

12.18' Beispiel (Symmetrisch stabile Prozesse mit Index $0 < \alpha < 2$): Betrachte in Dimension $d = 1$ wie in 9.1–9.3 und 9.13 die symmetrischen Maße Λ auf $I\!R \setminus \{0\}$

$$\Lambda(dx) \ = \ \xi \, \alpha \, |x|^{-\alpha-1} \, dx \quad \text{auf} \quad I\!R \setminus \{0\}$$

mit $0 < \alpha < 2$, $\xi = \xi^+ = \xi^- > 0$, und setze

$$\psi(v) \ := \ - c_\Lambda \, |v|^\alpha \ = \ \int_{I\!R \setminus \{0\}} [e^{ivx} - 1 - (ivx) 1_{\{|x| \le c\}}] \, \Lambda(dx) \ \ , \ \ v \in I\!R$$

(beachte: nach 9.13 ist die rechte Seite unabhängig von der Wahl des Trunkationsfaktors $c > 0$, wegen Symmetrie von Λ; die Konstante $c_\Lambda > 0$ wurde in 9.14 explizit angegeben). Mit $\Lambda \in \mathcal{M}$ gilt $t \, \Lambda \in \mathcal{M}$ für jedes $t > 0$, und wir schreiben μ_t für das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ mit charakteristischer Funktion

$$(+) \qquad v \ \longrightarrow \ e^{t \, \psi(v)} \ = \ e^{-t \, c_\Lambda \, |v|^\alpha} \quad , \quad v \in I\!R \ .$$

Wie in 12.14 hat man so eine Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \ge 0}$ auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$ definiert, mit $\mu_0 = \epsilon_0$. Nach 12.14" induziert diese Faltungshalbgruppe in eindeutiger Weise einen PIIS als kanonischen Prozeß auf dem kanonischen Pfadraum $(E^I, \mathcal{E}^I)$, $I = [0, \infty)$, $E = I\!R$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(I\!R)$, unter einem geeigneten, nach Kolmogorov eindeutig durch $(\mu_t)_{t \ge 0}$ bestimmten Wahrscheinlichkeitsmaß P. Den so enstandenen Prozeß unter P nennen wir *symmetrisch stabil mit Parameter* α, $0 < \alpha < 2$.

Der Parameter $0 < \alpha < 2$ liefert die Skalierungseigenschaft für die (unabhängigen) Zuwächse des Prozesses:

$$\text{für } 0 \leq s < t < \infty \text{ gilt} \quad \mathcal{L}\left(\frac{\pi_t - \pi_s}{(t-s)^{1/\alpha}} \mid P\right) = \mathcal{L}(\pi_1 \mid P) \ ;$$

dies folgt sofort aus der Gestalt der charakteristischen Funktion (+), vergleiche 9.16+9.17. Der Parameter $\xi > 0$ ist ein Gewichtsparameter. Der Grenzfall $\alpha = 2$ in (+) entspricht der Brownschen Bewegung.

Wieder ist dies eine vorläufige Definition der symmetrisch stabilen Prozesse, ohne jede Pfadeigenschaften, allein im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen. □

12.18" Beispiel (allgemeiner eindimensionaler PIIS): 1) In analoger Weise konstruiert man aus der Lévy-Chinchine Formel 9.12 eindimensionale Lévy-Prozesse $(\pi_t)_{t\geq 0}$ aus ihrer Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$: für $t > 0$ ist μ_t das Wahrscheinlichkeitsmaß mit charakteristischer Funktion

$$v \longrightarrow e^{t\,\psi(v)} \quad , \quad \psi(v) := iav - \frac{1}{2}\sigma^2 v^2 + \int_{I\!R\setminus\{0\}} [e^{ivx} - 1 - (ivx)1_{\{|x|\leq 1\}}]\,\Lambda(dx)$$

($v \in I\!R$) mit Lévy-Tripel

$$\big(a\,,\,\sigma^2\,,\,\Lambda\big) \quad : \quad \Lambda \in \mathcal{M} \text{ wie in 9.1}, \ a \in I\!R\,,\ \sigma^2 \geq 0\,.$$

Nach 9.12 liefert dies die allgemeine Gestalt der Zuwächse eines eindimensionalen Lévy-Prozesses. Der Parameter a steht dabei für einen deterministischen Shiftanteil, σ skaliert die Varianz einer Brownschen Bewegung, und Λ bestimmt als Lévy-Maß einen Prozeß mit Zuwächsen vom Typ 'Poisson-Mischung'. Notwendig sind Brownsche Bewegung und 'Poisson-Mischung' als Bestandteile des Prozesses $(\pi_t)_{t\geq 0}$ hierbei unabhängig, nach Gestalt der charakteristischen Funktion.

2) Ohne Beweis bemerken wir für den Fall $\sigma = 0$ (kein Gaußscher Anteil) in 1) folgendes:

i) Es ist bekannt, daß $\mathcal{L}(\pi_t|P)$ unter der 'Kallenberg-Bedingung'

$$\frac{1}{\varepsilon^2 |\ln\varepsilon|}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} y^2\,\Lambda(dy) \longrightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \downarrow 0$$

für jedes $t > 0$ eine unendlich oft differenzierbare Lebesgue-Dichte besitzt. Die Kallenberg-Bedingung ist eine hinreichende Bedingung; auch eine notwendige Bedingung ist bekannt: siehe Knopova und Schilling (2011).

ii) Die Kallenberg-Bedingung ist offensichtlich für die symmetrisch stabilen Prozesse mit Parameter $0 < \alpha < 2$ wie in 12.18' erfüllt. Also besitzen die Zuwächse des symmetrisch stabilen

Prozesse mit Parameter $0 < \alpha < 2$ 'schöne' Lebesgue-Dichten. Diese können allerdings –bis auf den Spezialfall symmetrischer Cauchy-Prozeß ($\alpha = 1$, Cauchy-Dichten)– nicht in geschlossener Form angegeben werden. Nur Darstellungen in Form unendlicher Reihen existieren, siehe Feller II (1971, S. 568–570, S. 582).
iii) Besitzt das Maß $\Lambda \in \mathcal{M}$ unendliche Gesamtmasse auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, so weiß man, daß die typischen Pfade des Prozesses $(\pi_t)_{t\geq 0}$ nirgends konstant sind und nur durch Sprünge wachsen. Dabei findet man auf jedem endlichen Zeitintervall p-fast sicher stets endlich viele 'große' zusammen mit 'unendlich vielen unendlich kleinen' Sprüngen. Die 'kleinen' Sprünge sind i.a. nicht einmal im üblichen Sinn summierbar, sondern nur kompensiert summierbar in einem L^2-Sinn. □

Als drittes wichtiges Beispiel betrachten wir den Poisson-Prozeß (ebenfalls im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen, ohne 'Pfadeigenschaften').

12.19 Beispiel (Poisson-Prozeß): Sei $I = [0, \infty)$, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (oder noch einfacher $E = \mathbb{N}_0$ versehen mit seiner Potenzmenge). Sei $\lambda \in (0, \infty)$ ein fester Parameter. Man sieht sofort, daß durch

$$\mu_t \ = \ \mathcal{P}(t \cdot \lambda)\ , \quad t \geq 0$$

eine Faltungshalbgruppe auf $(E, \mathcal{E})$ gegeben ist, vergleiche 4.25 und 7.6. Dies ergibt sich auch als Spezialfall aus 12.18" mit $a = \lambda$, $\sigma = 0$, $\Lambda = \lambda \cdot \epsilon_1$. Also gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(E^I, \mathcal{E}^I, \mathbb{F}, P)$ wie in 12.14", so daß für den kanonischen Prozeß gilt

$$(12.19') \qquad \mathcal{L}((\pi_{t_1}, \pi_{t_2} - \pi_{t_1}, \ldots \pi_{t_\ell} - \pi_{t_{\ell-1}})|P) \ = \ \bigotimes_{i=1}^{\ell} \mathcal{P}((t_i - t_{i-1}) \cdot \lambda)$$

mit $\pi_0 = 0$ P-fast sicher, für beliebige $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots t_\ell < \infty$. Das aber bedeutet

$$P\,(\,\pi_{t_1}{=}k_1\,,\ \pi_{t_2}{=}k_1{+}k_2\,,\ \ldots\,,\ \pi_{t_\ell}{=}k_1{+}\ldots{+}k_\ell\,) \ = \ e^{-t_\ell \cdot \lambda} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{[(t_i - t_{i-1}) \cdot \lambda]^{k_i}}{(k_i)\,!}$$

für beliebige $k_1, \ldots, k_\ell$ in $\mathbb{N}_0$. Insbesondere gilt $0 \leq \pi_{t_1} \leq \ldots \leq \pi_{t_\ell}$ P-fast sicher, und man erhält die endlichdimensionalen Randverteilungen aus $\pi_0 = 0$ P-fast sicher und

$$(12.19'') \qquad P\,(\,\pi_{t_1}{=}m_1\,,\ \pi_{t_2}{=}m_2\,,\ \ldots\,,\ \pi_{t_\ell}{=}m_\ell\,) \ = \ e^{-t_\ell \cdot \lambda} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{[(t_i - t_{i-1}) \cdot \lambda]^{(m_i - m_{i-1})}}{(m_i - m_{i-1})\,!}$$

für aufsteigend geordnete Tupel natürlicher Zahlen $0 = m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_\ell < \infty$.
Dies ist die Konstruktion eines *Poisson-Prozesses mit Parameter* λ im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, daß 'typische' Pfade des

Poisson-Prozesses stückweise konstant und rechtsstetig sind, und auf kompakten Zeitintervallen höchstens endlich viele Sprünge – alle mit Sprunghöhe 1 – besitzen. □