

Reinhard Höpfner

Vorlesung Stochastik

Kapitel XIII:

Stochastische Prozesse und ihre Pfadeigenschaften, Brownsche Bewegung, Markoveigenschaften in stetiger Zeit

Wintersemester 2016/17

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

May 4, 2017

Übersicht zu Kapitel XIII :

A. Versionen und Pfadeigenschaften

- Versionen stochastischer Prozesse 13.1–13.1'
- Stetige Versionen unter 'stochastischer Stetigkeit' und 'Separabilität' 13.2
- Satz von Kolmogorov-Prohorov 13.5
- Bemerkung zu Zufallsfeldern 13.8

B. Brownsche Bewegung

- d -dimensionale Standard-Brownsche Bewegung 13.9–13.10
- Brownsche Bewegungen mit Drift und Kovarianz 13.11
- Wienermass auf (C, \mathcal{C}) 13.12
- Pfadraum (C, \mathcal{C}) als polnischer Raum 13.12"
- Nichtdifferenzierbarkeit der Brownschen Pfade 13.13

B'. Poisson-Prozesse

- Poisson-Prozess 13.14–13.16
- Mischungen von Poisson-Prozessen, Compound Poisson Prozess 13.16'

C. Eigenschaften der eindimensionalen Brownschen Bewegung

- Spiegelungsprinzip für den symmetrischen Random Walk 13.17–13.17'
- Spiegelungsprinzip für die Brownsche Bewegung 13.18
- level crossing Zeiten der Brownschen Bewegung 13.19
- Vorläufige Formulierung der starken Markoveigenschaft 13.19'
- Einseitig stabile Verteilung mit Parameter $\frac{1}{2}$ 13.19"
- Gesetz vom Iterierten Logarithmus in $t = 0$ 13.20
- Zeitumkehr 13.21
- Gesetz vom Iterierten Logarithmus für $t \rightarrow \infty$ 13.22
- Rekurrenzeigenschaften der eindimensionalen Brownschen Bewegung 13.23
- Nullstellenmenge des Brownschen Pfades 13.24

*D. Markoveigenschaften in stetiger Zeit

- Stopzeiten T in rechtsstetigen Filtrationen 13.25–13.26
- Vergangenheit bis T 13.26'–13.27
- Level Crossing Zeiten und Geschichte der eindimensionalen Brownschen Bewegung 13.28
- Eigenschaften von Stopzeiten 13.29
- Zustand eines Prozesses zur Zeit T 13.30
- Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung 13.31
- Starke Markoveigenschaft allgemein 13.32–13.34'
- Starke Markoveigenschaft, Prozess nach T , Prozess der Zuwächse nach T 13.34''
- Zur Unabhängigkeit des Prozesses nach T von der Vergangenheit 13.35
- Folgerungen für die Brownsche Bewegung 13.36
- Geschichte des Poisson-Prozesses 13.37
- Starke Markoveigenschaft des Poisson-Prozesses 13.38–13.39

A. Versionen und Pfadigenschaften

In einem stochastischen Prozess $(X_t)_{t \in I}$ auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in (E, \mathcal{E}) (I eine beliebige Indexmenge, (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, (E, \mathcal{E}) ein messbarer Raum) heissen die Abbildungen

$$X_\cdot(\omega) : I \ni t \rightarrow X_t(\omega) \in E \quad , \quad \omega \in \Omega \text{ fest}$$

Pfade (oder *Trajektorien*) des Prozesses X . Für $I \subset [0, \infty)$ interpretiert man den Parameter $t \in I$ im allgemeinen als Zeit. I kann aber auch eine Teilmenge von \mathbb{R}^k sein, z.B. ein Kompaktum in \mathbb{R}^k ; solche Prozesse nennt man auch *Zufallsfelder*.

Die Konstruktion eines stochastischen Prozesses beginnt im allgemeinen wie in Kapitel XII damit, dass man sich mit dem Konsistenzsatz von Kolmogorov ein Wahrscheinlichkeitsmass P auf $(\Omega, \mathcal{A}) = (E^I, \mathcal{E}^I)$ verschafft, unter dem der gewünschte Prozess als *kanonischer Prozess* $\pi = (\pi_t)_{t \in I}$ auf dem kanonischen Pfadraum (E^I, \mathcal{E}^I, P) zur Verfügung steht, mit den gewünschten endlich-dimensionalen Randverteilungen.

In einem zweiten Schritt betrachtet man die Eigenschaften der Pfade spezifischer Prozesse; man möchte z.B. zeigen, dass typische Pfade der Brownschen Bewegung stetig sind, oder dass typische Pfade des Poissonprozesses \mathbb{N}_0 -wertig, stückweise konstant, rechtsstetig und nichtfallend sind, wobei nur Sprünge mit Sprunghöhe 1 auftreten. Bezeichnet $(*)$ eine interessante Pfad Eigenschaft, etwa im Fall $I = [0, \infty)$, $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ eine der beiden Eigenschaften

- für alle $\omega \in \Omega$ gilt: $X_\cdot(\omega) \in C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$, der Klasse aller stetigen Funktionen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$
- für alle $\omega \in \Omega$ gilt: $X_\cdot(\omega) \in D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$, der Klasse aller rechtsstetigen Funktionen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit linksseitigen Limiten (kurz *càdlàg-Funktionen*): für jedes $0 \leq t < \infty$ existiert ein Grenzwert von rechts und stimmt überein mit dem Funktionswert

$$f(t) = \lim_{s \downarrow t} f(s) ,$$

und für jedes $0 < t < \infty$ gibt es einen Grenzwert von links

$$\lim_{s \uparrow t} f(s) \text{ existiert in } \mathbb{R}^d$$

so möchte man durch *geringfügige Abänderung jeder einzelnen Variable* X_t

$$(+)$$

für jedes $t \in I$ fest : $X_t \rightsquigarrow \tilde{X}_t$ so dass $P(\tilde{X}_t \neq X_t) = 0$

zu einem modifizierten Prozess $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \in I}$ auf (Ω, \mathcal{A}, P) übergehen, der wegen (+) notwendig *dieselben endlichdimensionalen Randverteilungen* wie X besitzt, in dem nun aber *alle Pfade* die gewünschte Eigenschaft (*) besitzen.

13.1 Definition: Seien $(X_t)_{t \in I}, (\tilde{X}_t)_{t \in I}$ zwei stochastische Prozesse, auf demselben (Ω, \mathcal{A}, P) , mit demselben Zustandsraum (E, \mathcal{E}) . Dann heisst \tilde{X} eine *Version* (oder *Modifikation*) von X falls gilt:

$$P(X_t \neq \tilde{X}_t) = 0 \quad \text{für jedes einzelne } t \in I .$$

Im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen sind Versionen X, \tilde{X} nicht voneinander zu unterscheiden; Pfadeigenschaften von X, \tilde{X} sind jedoch typischerweise drastisch verschieden, wie das folgende Beispiel zeigt.

13.1' Beispiel: Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ ohne Punktmassen, d.h. es gelte $Q(\{x\}) = 0$ für jedes $x \in [0, 1]$. Setze $(\Omega, \mathcal{A}, P) := ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), Q)$ und setze $I := [0, 1]$. Definiere auf (Ω, \mathcal{A}, P) zwei stochastische Prozesse $(X_t)_{t \in I}, (\tilde{X}_t)_{t \in I}$ durch

$$\text{für alle } t \in I: \quad X_t(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t \neq \omega \\ 1 & \text{falls } t = \omega \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{X}_t(\omega) := 0$$

für alle $\omega \in \Omega$. Nach Voraussetzung über Q gilt dann

$$\text{für } t \in I \text{ fest: } P\left(\left\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \neq \tilde{X}_t(\omega)\right\}\right) = Q(\{t\}) = 0 ,$$

also ist \tilde{X} eine Modifikation von X . Zugleich stimmen aber die Pfade $X_\bullet(\omega)$ und $\tilde{X}_\bullet(\omega)$ für kein einziges $\omega \in \Omega$ überein. □

Wir formulieren die nächsten Sätze für den Fall der Indexmenge $I = [0, \infty)$ (siehe Bemerkung 13.8 für Verallgemeinerungen).

13.2 Satz: Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Hinreichend dafür, dass eine Version $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ von $(X_t)_{t \geq 0}$ existiert, deren Pfade sämtlich stetig sind, ist das folgende Paar von Bedingungen (13.3) und (13.4):

$$(13.3) \quad \begin{cases} \text{Stochastische Stetigkeit:} & \text{für jedes } t \geq 0 \text{ und jede Folge } t_n \rightarrow t \text{ in } [0, \infty) \\ \text{gilt } X_{t_n} \rightarrow X_t & P\text{-stochastisch für } n \rightarrow \infty; \end{cases}$$

$$(13.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Separabilität:} \quad \text{Es gibt eine } P\text{-Nullmenge } N \in \mathcal{A} \text{ und eine} \\ \text{abzählbar dichte Teilmenge } S \subset [0, \infty), \text{ so dass eingeschränkte Pfade} \\ [0, m] \cap S \ni t \rightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d \\ \text{für jedes } \omega \in \Omega \setminus N \text{ und jedes } m \in \mathbb{N} \text{ gleichmässig stetig sind.} \end{array} \right.$$

Beweis: Sei S abzählbar dicht in $[0, \infty)$.

1) Wir starten mit einer Vorüberlegung in Dimension $d = 1$: Sei f eine Funktion $S \rightarrow \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: die Einschränkung von f auf $[0, m] \cap S$ sei gleichmässig stetig, für jedes $m \in \mathbb{N}$. Dann kann f zu einer stetigen Funktion $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

Bew.: i) Fixiere ein beliebiges $t \in [0, \infty)$ und wähle $m > t$. Da f gleichmässig stetig auf $[0, m] \cap S$, ist f insbesondere beschränkt auf $[0, m] \cap S$. Also existieren

$$\bar{f}(t) := \limsup_{s \in S, s \rightarrow t} f(s) \in \mathbb{R}, \quad \underline{f}(t) := \liminf_{s \in S, s \rightarrow t} f(s) \in \mathbb{R}.$$

Angenommen, diese stimmten nicht überein: dann existierten $\underline{f}(t) < a < b < \bar{f}(t)$ und zwei gegen t konvergierende Folgen $(s_n)_n, (r_n)_n$ in S so dass

$$|s_n - r_n| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad f(s_n) < a \quad \text{und} \quad f(r_n) > b \quad \text{für schliesslich alle } n,$$

im Widerspruch zur vorausgesetzten Stetigkeit von f auf $[0, m] \cap S$. Folglich existiert ein Grenzwert

$$\tilde{f}(t) := \lim_{s \in S, s \rightarrow t} f(s) \quad \text{in } \mathbb{R}$$

für jedes $t \in [0, \infty)$. Im Falle $t \in S$ stimmt der Grenzwert $\tilde{f}(t)$ nach Voraussetzung über f mit dem Funktionswert $f(t)$ überein. Wir setzen also $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ durch Hinzunahme von Grenzwerten an allen Stellen $t \in [0, \infty) \setminus S$ fort zu einer Funktion $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

ii) Die Stetigkeit der durch i) definierten Funktion $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zeigt man so. Fixiere $t \in [0, \infty)$, sei $m > t$, sei $(t_n)_n \subset [0, m]$ eine Folge mit $t_n \rightarrow t$. Nach Konstruktion in i) findet man zu jedem t_n ein $s_n \in S$ so dass zugleich $|s_n - t_n| < 2^{-n}$ und

$$\left| \tilde{f}(t_n) - \tilde{f}(s_n) \right| = \left| \tilde{f}(t_n) - f(s_n) \right| < 2^{-n}$$

gelten. Dann gilt aber auch $s_n \rightarrow t$ für $n \rightarrow \infty$, also $\lim_n f(s_n) = \tilde{f}(t)$ nach i): notwendig gilt dann auch $\lim_n \tilde{f}(t_n) = \tilde{f}(t)$. Also ist $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig an jeder Stelle $t \in [0, \infty)$. Dies schliesst den Beweis der Vorüberlegung in Dimension $d = 1$ ab.

2) Wir beweisen die Aussage des Satzes. Zu dem \mathbb{R}^d -wertigen Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ auf (Ω, \mathcal{A}, P) definieren wir mit der P -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ und der abzählbar dichten Teilmenge $S \subset [0, \infty)$ aus (13.4) einen \mathbb{R}^d -wertigen Prozess $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ durch

$$\tilde{X}_t(\omega) := 1_{N^c}(\omega) \cdot \begin{cases} X_t(\omega) & \text{falls } t \in S \\ \lim_{s \in S, s \rightarrow t} X_s(\omega) & \text{falls } t \notin S \end{cases}, \quad t \geq 0, \omega \in \Omega.$$

Für $\omega \in N^c$ ist dann – wegen (13.4) und wegen 1) angewandt auf jede einzelne Komponente des eingeschränkten Pfades $S \cap [0, m] \ni t \rightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ – der neu definierte Pfad $\tilde{X}_\cdot(\omega)$ eine stetige Funktion $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$. Für $\omega \in N$ gilt $\tilde{X}_\cdot(\omega) \equiv 0$ nach Definition. Also sind alle Pfade von \tilde{X} stetig. Der Prozess \tilde{X} ist eine Modifikation von X : Betrachte zuerst $t \in S$. Wegen $N \in \mathcal{A}$ ist dann $\tilde{X}_t = 1_{N^c} X_t$ eine \mathcal{A} -messbare Zufallsvariable; da N eine P -Nullmenge ist, gilt $\tilde{X}_t = X_t$ P -fast sicher. Sei nun $t \notin S$. In diesem Fall ist \tilde{X}_t als Limes \mathcal{A} -messbarer Abbildungen sicher \mathcal{A} -messbar. Für jede Folge $(s_n)_n \subset S$ mit $s_n \rightarrow t$, für beliebiges $\varepsilon > 0$ und für hinreichend grosses $m \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$P(|X_t - \tilde{X}_t| > \varepsilon) \leq P(|X_t - X_{s_n}| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|X_{s_n} - \tilde{X}_{s_n}| \neq 0) + P(|\tilde{X}_{s_n} - \tilde{X}_t| > \frac{\varepsilon}{2})$$

wobei die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt: der erste Term verschwindet wegen stochastischer Stetigkeit (13.3), der zweite ist schon 0 nach Definition von \tilde{X} , und der dritte verschwindet wegen Stetigkeit der Pfade von \tilde{X} . Also gilt auch $X_t = \tilde{X}_t$ P -fast sicher falls $t \notin S$. Gezeigt ist damit $X_t = \tilde{X}_t$ P -fast sicher für jedes $t \in [0, \infty)$. \square

Stetige Versionen \mathbb{R}^d -wertiger stochastischer Prozesse mit Indexmenge $I = [0, \infty)$, die unter gewissen Voraussetzungen existieren, konstruiert man mit Hilfe des Satzes von Kolmogorov-Prohorov.

13.5 Hauptsatz: (Kolmogorov-Prohorov) Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Hinreichend dafür, dass eine Version $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ von $(X_t)_{t \geq 0}$ existiert, deren Pfade sämtlich stetig sind, ist die Bedingung

$$(13.6) \quad \begin{cases} \text{es gibt Konstanten } a > 0, b > 1, c > 0 \text{ so dass} \\ E_P(|X_s - X_t|^a) \leq c \cdot |t - s|^b \quad \forall s, t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Beweis: Wir zeigen in mehreren Schritten, dass (13.6) die Gültigkeit von (13.3)+(13.4) impliziert.

1) Nachweis von (13.3): eine einfache Anwendung der Chebyshev-Ungleichung zeigt für beliebiges $\varepsilon > 0$ und konvergente Folgen $t_n \rightarrow t$ in $[0, \infty)$

$$P(|X_t - X_{t_n}| > \varepsilon) \leq \frac{EP(|X_t - X_{t_n}|^a)}{\varepsilon^a} \stackrel{(13.6)}{\leq} \frac{c|t - t_n|^b}{\varepsilon^a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Also ist $(X_t)_{t \geq 0}$ stochastisch stetig.

2) Sei S abzählbar dicht in $[0, \infty)$, sei $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren einen *Stetigkeitsmodul für die auf $S \cap [0, m]$ eingeschränkten Pfade* des Prozesses X , indem wir für jedes $\delta > 0$ setzen

$$V_{\delta, m}^S(\omega) := \sup_{\substack{s, t \in S \cap [0, m] \\ |s - t| < \delta}} |X_t(\omega) - X_s(\omega)|.$$

Wegen der Abzählbarkeit von S sind die $V_{\delta, m}^S$ wohldefinierte Zufallsvariable auf (Ω, \mathcal{A}) . Nach Definition ist $V_{\delta, m}^S(\omega)$ für festes ω monoton fallend in $\delta \downarrow 0$, und es gilt:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} V_{\delta, m}^S(\omega) = 0 \iff S \cap [0, m] \ni t \rightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d \text{ ist gleichmässig stetig.}$$

Damit erhält man für die in (13.4) relevante Menge C_S aller $\omega \in \Omega$ mit der Eigenschaft

$$S \cap [0, m] \ni t \rightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d \text{ ist gleichmässig stetig, für beliebiges } m \in \mathbb{N}$$

die Aussage

$$C_S = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{ \lim_{\delta \downarrow 0} V_{\delta, m}^S = 0 \} \in \mathcal{A}.$$

Also sind (bei gegebenem S) die folgenden Aussagen i)–ii) gleichwertig:

i) es gilt (13.4) bezüglich S

i') es gilt $P(C_S) = 1$

ii) es gilt für alle $m \in \mathbb{N}$: $\lim_{\delta \downarrow 0} V_{\delta, m}^S = 0$ P -fast sicher.

3) Wir werden (13.4) bezüglich S beweisen, indem wir ii) zeigen; zum Nachweis von ii) reicht es aber,

$$(13.7) \quad \text{für jedes feste } \eta > 0 \text{ und jedes } m \text{ gilt } \lim_{\delta \downarrow 0} P(V_{\delta, m}^S > \eta) = 0$$

nachzuweisen. Das sieht man so: $V_{\delta, m}^S(\omega)$ ist monoton fallend für $\delta \downarrow 0$, also erhält man aus (13.7) mit absteigender Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmassen für jedes feste $\eta > 0$

$$P\left(\lim_{\delta \downarrow 0} V_{\delta, m}^S > \eta\right) = P\left(\bigcap_{\delta > 0} \{V_{\delta, m}^S > \eta\}\right) = \lim_{\delta \downarrow 0} P(V_{\delta, m}^S > \eta) = 0.$$

4) Für den Beweis von Satz 2.5 sind wir frei, eine abzählbar dichte Teilmenge $S \subset [0, \infty)$ zu wählen: ab jetzt sei S die Menge der dyadischen Zahlen in $[0, \infty)$. Mit dieser Wahl von S werden wir aus der Voraussetzung (13.6) des Satzes die Aussage (13.7) folgern. Damit wird wegen i) \iff ii) in Schritt 2) oben die Gültigkeit von (13.4) mit dyadischem S nachgewiesen sein.

5) Betrachte $a > 0, b > 1, c > 0$ wie in (13.6) vorausgesetzt. Wegen $b > 1$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass $b - \varepsilon \cdot a > 1$. Wir definieren Ereignisse

$$B_\ell := \bigcup_{k \geq \ell} \bigcup_{j=0}^{m2^k-1} \left\{ \left| X_{\frac{j+1}{2^k}} - X_{\frac{j}{2^k}} \right| > 2^{-\varepsilon \cdot k} \right\}, \quad \ell \geq 1$$

(mit diesen kontrolliert man Fluktuationen des Prozesses X simultan über alle Gitter $2^{-k}\mathbb{N}_0, k \geq \ell$) und zeigen

$$(*) \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} P(B_\ell) = 0.$$

Bew: Zunächst gilt mit Chebychev und (13.6)

$$P(|X_t - X_s| > \eta) \leq \frac{E(|X_t - X_s|^a)}{\eta^a} \leq c \eta^{-a} |t - s|^b$$

und damit nach Wahl von ε

$$(+)$$

$$P\left(\left|X_{\frac{j+1}{2^k}} - X_{\frac{j}{2^k}}\right| > 2^{-\varepsilon k}\right) \leq c 2^{-(b-\varepsilon a)k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \text{ alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

Angewandt auf die oben definierten Mengen B_ℓ zeigt (+)

$$\begin{aligned} P(B_\ell) &\leq \sum_{k \geq \ell} \sum_{j=0}^{m2^k-1} P\left(\left|X_{\frac{j+1}{2^k}} - X_{\frac{j}{2^k}}\right| > 2^{-\varepsilon k}\right) \\ &\leq \sum_{k \geq \ell} (m 2^k) (c 2^{-(b-\varepsilon a)k}) = c m \sum_{k \geq \ell} 2^{-(b-\varepsilon a-1)k}. \end{aligned}$$

Dieser Reihenrest strebt gegen 0 für $\ell \rightarrow \infty$ nach Wahl von ε ; damit ist (*) bewiesen.

6) Wir betrachten den Stetigkeitsmodul $V_{2^{-\ell}, m}^S$ aus 2) und die Menge B_ℓ aus 5), definiert bezüglich des in Schritt 5) gewählten $\varepsilon > 0$, und zeigen

$$(**) \quad \left\{ V_{2^{-\ell}, m}^S > 2 \cdot \sum_{k \geq \ell} 2^{-\varepsilon k} \right\} \subset B_\ell \quad \text{für schliesslich alle } \ell.$$

Bew.: S ist die Menge der dyadischen Zahlen; wegen

$$V_{2^{-\ell}, m}^S = \sup_{\substack{s, t \in S \cap [0, m] \\ |s-t| < 2^{-\ell}}} |X_t - X_s|$$

gilt für beliebiges $\delta > 0$ sicher

$$\left\{ V_{2^{-\ell}, m}^S > \delta \right\} \subset \bigcup_{\substack{s, t \in S \cap [0, m] \\ |s-t| < 2^{-\ell}}} \{|X_t - X_s| > \delta\} .$$

Also genügt es zum Nachweis von (**), die in die Supremumsbildung eingehenden Paare $s < t$ zu betrachten und zu zeigen

$$(++) \quad \text{für bel. } s, t \in S \cap [0, m] \text{ mit } |t - s| < 2^{-\ell} \text{ gilt: } \left\{ |X_t - X_s| > 2 \cdot \sum_{k \geq \ell} 2^{-\varepsilon k} \right\} \subset B_\ell .$$

Seien dazu $s < t, m, \ell$ wie in (++) fest. Dann gibt es eine spezielle Zerlegung des Intervalls $[s, t]$

$$(+++)$$

$$s = s_1 < t_1 = s_2 < t_2 = \dots = s_r < t_r = t, \quad [s, t] = \bigcup_{i=1}^r [s_i, t_i], \quad r = r(s, t) \text{ geeignet}$$

mit den folgenden Eigenschaften $(\alpha)+(\beta)$:

(α) zu i gibt es ein $k_i \geq \ell$ so dass gilt: s_i, t_i sind benachbarte Punkte im Gitter $2^{-k_i} \mathbb{N}_0$;

(β) für festes $k \geq \ell$ findet man in der Zerlegung höchstens *zweimal* ein Paar s_i, t_i so dass

$$s_i, t_i \text{ sind benachbarte Punkte im Gitter } 2^{-k} \mathbb{N}_0 .$$

Das sieht man so: man betrachtet ein kleinstes $k \geq \ell$ so dass im offenen Intervall (s, t) ein Punkt x des Gitters $2^{-k} \mathbb{N}$ enthalten ist, und teilt das Intervall dort: $[s, t] = [\underline{s}, \underline{t}] \cup [\bar{s}, \bar{t}]$ mit $\underline{t} = x = \bar{s}$. Man betrachtet jedes Teilintervall separat. Für $[\underline{s}, \underline{t}]$ gilt ebenfalls $\underline{t} - \underline{s} < 2^{-\ell}$, damit $2^\ell(\underline{t} - \underline{s}) < 1$, und wegen $\underline{s}, \underline{t} \in S$ hat diese Zahl eine endliche dyadische Entwicklung

$$2^\ell(\underline{t} - \underline{s}) = \sum_{\text{endlich}} \alpha_i 2^{-i}, \quad \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ eindeutig bestimmt} .$$

Genauso erhält man

$$2^\ell(\bar{t} - \bar{s}) = \sum_{\text{endlich}} \beta_i 2^{-i}, \quad \beta_i \in \{0, 1\} \text{ eindeutig bestimmt} .$$

Beiden dyadischen Entwicklungen entspricht in $[s, t]$ ein sukzessives Abspalten maximaler Subintervalle ausgehend vom Punkt $\underline{t} = x = \bar{s}$: dies führt zu den Aussagen $(\alpha)+(\beta)$.

Für die Zerlegung (++) des Intervalls $[s, t]$ gilt

$$|X_t - X_s|(\omega) \leq \sum_{i=1}^r |X_{t_i} - X_{s_i}|(\omega) ,$$

so dass die in (++) betrachtete Aussage

$$(\circ) \quad |X_t - X_s|(\omega) > 2 \cdot \sum_{k \geq \ell} 2^{-\varepsilon k}$$

wegen der Eigenschaften $(\alpha)+(\beta)$ (und per Dreiecksungleichung) notwendig impliziert

$$|X_{t_i} - X_{s_i}|(\omega) > 2^{-\varepsilon k(i)} \quad \text{für mindestens ein } i = 1, \dots, r$$

wobei $k(i)$ die in (α) einem Paar $s_i < t_i$ zugeordnete Gitterschrittweite bezeichnet. Dies zeigt, dass ein $\omega \in \Omega$ mit der Eigenschaft (\circ) notwendig –nach Definition von B_ℓ in Schritt 2), und wegen der Eigenschaft (α) der Zerlegung $(+++)$ – zum Ereignis

$$B_\ell = \bigcup_{k \geq \ell} \bigcup_{j=0}^{m2^k-1} \left\{ \left| X_{\frac{j+1}{2^k}} - X_{\frac{j}{2^k}} \right| > 2^{-\varepsilon k} \right\}$$

gehört. Damit ist $(**)$ bewiesen.

7) Abschluss der Beweises: sei $\eta > 0$ beliebig, dann gilt für hinreichend grosse ℓ nach $(**)$

$$\left\{ V_{2^{-\ell}, m}^S > \eta \right\} \subset \left\{ V_{2^{-\ell}, m}^S > 2 \cdot \sum_{k \geq \ell} 2^{-\varepsilon k} \right\} \subset B_\ell$$

und damit nach $(*)$

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} P \left(V_{2^{-\ell}, m}^S > \eta \right) = 0.$$

Das ist (13.7). Gemäss Schritt 4) ist der Beweis des Satzes damit abgeschlossen. \square

13.8 Bemerkung: Stetige Versionen für \mathbb{R}^d -wertige stochastischen Prozesse $(X_t)_{t \in I}$, deren Indexmenge I ein Kompaktum in \mathbb{R}^m ist, $m \geq 1$ beliebig, kann man mit Argumenten derselben Bauart konstruieren. Für $m \geq 1$ bleibt die Aussage von Satz 13.5 gültig, wenn die Voraussetzung $b > m$ in Bedingung (13.6) eingeschrieben wird.

Die einzige Stelle des Beweises des Satzes 13.5, welche wesentlich von der Dimension m der Indexmenge abhängt, ist das Summationsargument zur Berechnung von $P(B_\ell)$ in Schritt 5). Ist die Indexmenge I ein Kompaktum in \mathbb{R}^m , so braucht man dort Multiindices $\underline{j} = (j_1, \dots, j_m)$ und Wege in Gittern $2^{-k} \mathbb{Z}^m$: dafür gibt es $O(2^{km})$ Möglichkeiten, daher braucht man $(b - \varepsilon a - m) > 0$ für $(*)$ in Schritt 5). Siehe Kallenberg (2002, Theorem 3.23).

B. Die Brownsche Bewegung

Die Brownsche Bewegung trägt den Namen des englischen Botanikers R. Brown, der um 1830 unter dem Mikroskop eine seltsame Zickzackbewegung von Pollenkörnern in einem Wassertropfen beobachtete. L. Bachelier benutzte die Brownsche Bewegung um 1900 zur Analyse von Börsenkursen,

A. Einstein 1905 zur Beschreibung der Bewegung von Molekülen, die in einem Gas unendlich vielen infinitesimalen Stößen durch andere Moleküle ausgesetzt sind. Eine mathematisch rigorose Konstruktion der Brownschen Bewegung wurde von N. Wiener um 1925 gegeben.

13.9 Definition: Eine d -dimensionale *Standard-Brownsche Bewegung* (SBB) ist ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit Werten in \mathbb{R}^d , definiert auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) , der die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

i) X hat unabhängige Zuwächse, die in der folgenden Weise normalverteilt sind:

$$\text{für alle } 0 \leq s < t < \infty : \quad \mathcal{L}(X_t - X_s | P) = \mathcal{N}(0, (t - s)I_d) ;$$

ii) alle Pfade $X_*(\omega) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ sind stetig;

iii) es gilt $X_0 = 0$ P -fast sicher.

13.9' Bemerkung: Oft fordert man auch die Eigenschaft ii) in Definition 13.9 nur P -fast sicher: hat man eine P -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, so dass für alle $\omega \in N^c$ die Pfade $X_*(\omega) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig sind, so liefert $\tilde{X} := (1_{N^c} X_t)_{t \geq 0}$ eine Modifikation von X , die i)–iii) erfüllt.

13.10 Satz: Die Standard-Brownsche Bewegung existiert.

Beweis: 1) Schreibe $I = [0, \infty)$, $E = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Wie in 12.17 konstruiert man zuerst aus der Faltungshalbgruppe $(\mathcal{N}(0_d, tI_d))_{t \geq 0}$ auf (E, \mathcal{E}) und der Startverteilung $\nu := \epsilon_0$ einen Prozess mit den Eigenschaften i)+iii) als kanonischen Prozess $X := (\pi_t)_{t \geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I, P) =: (\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei P durch die Familie (12.18) endlichdimensionaler Randverteilungen

$$\mathcal{L}((\pi_{t_i})_{i=1, \dots, \ell} | P) = \mathcal{N}((0_d)_{i=1, \dots, \ell}, ((t_i \wedge t_j)I_d)_{i, j=1, \dots, \ell})$$

eindeutig bestimmt ist. Dies beruht allein auf dem Konsistenzsatz 12.6.

2) Betrachte für $1 \leq i \leq d$ die Komponenten $X^{(i)}$ des Prozesses $X = (X^{(i)})_{1 \leq i \leq d}$ separat (jedes $X^{(i)}$ ist im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen eine eindimensionale Brownsche Bewegung). Wegen $\mathcal{L}(X_t^{(i)} - X_s^{(i)} | P) = \mathcal{N}(0, t - s)$ und $\int x^4 \mathcal{N}(0, 1)(dx) = 3$ gilt für $s < t$

$$E\left(|X_t^{(i)} - X_s^{(i)}|^4\right) = (t - s)^2 \cdot E\left(\left|\frac{X_t^{(i)} - X_s^{(i)}}{\sqrt{t - s}}\right|^4\right) = 3(t - s)^2.$$

Nach Satz 13.5 existiert zu $X^{(i)}$ eine Modifikation $\tilde{X}^{(i)}$ mit stetigen Pfaden. Wegen $\nu = \epsilon_0$ gilt $\tilde{X}_0^{(i)} = 0$ P -fast sicher. Dies hat man für jedes $i = 1, \dots, d$: damit ist für den \mathbb{R}^d -wertigen Prozess X eine Version $\tilde{X} = (\tilde{X}^{(i)})_{1 \leq i \leq d}$ mit stetigen Pfaden gefunden. Die Version \tilde{X} besitzt alle Eigenschaften i)–iii) aus Definition 13.9. \square

13.11 Bemerkung: Ist auf einem Raum (Ω, \mathcal{A}, P) eine d -dimensionale Standard-Brownsche Bewegung $X = (X_t)_{t \geq 0}$ gegeben, so erhält man für jedes $\Lambda \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch und nichtnegativ definit, $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$ eine d -dimensionale Brownsche Bewegung $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ mit Startpunkt x , Kovarianzmatrix Λ und Drift μ über die Transformation

$$Y_t := x + \Lambda^{1/2} X_t + \mu t, \quad t \geq 0. \quad \square$$

Oft ist es praktisch, die Standard-Brownsche Bewegung direkt als kanonischen Prozess auf dem Pfadraum $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ anzusetzen:

13.12 Satz: Wir versehen den Raum $C := C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ aller stetigen Funktionen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit der von den Koordinatenprojektionen

$$\alpha_t : C \ni f \longrightarrow f(t) \in \mathbb{R}^d, \quad t \geq 0$$

erzeugten σ -Algebra $\mathcal{C} := \sigma(\alpha_t : t \geq 0)$. Dann gilt: Es gibt genau ein Wahrscheinlichkeitsmass Q^W auf (C, \mathcal{C}) , unter dem der kanonische Prozess $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$ auf (C, \mathcal{C}) eine Standard-Brownsche Bewegung ist. Diess Wahrscheinlichkeitsmass Q^W auf (C, \mathcal{C}) nennt man *Wienermass*.

Beweis: 1) Mit 13.9 und 13.10 geht man aus von einer SBB $X = (X_t)_{t \geq 0}$, die auf irgendeinem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) definiert ist, betrachtet die Abbildung, die jedem $\omega \in \Omega$ den ω -Pfad $X_\cdot(\omega) \in C$ zuordnet

$$X_\cdot : \Omega \ni \omega \longrightarrow X_\cdot(\omega) = (X_t(\omega))_{t \geq 0} \in C,$$

und zeigt: X_\cdot ist eine messbare Abbildung von (Ω, \mathcal{A}) nach (C, \mathcal{C}) . Dies liegt an der Definition der σ -Algebra auf C : $\mathcal{C} = \sigma(\alpha_t : t \geq 0)$ wird erzeugt vom System

$$\{\alpha_{t_i} \in F_i, 1 \leq i \leq \ell\} = \{f \in C : f(t_i) \in F_i, 1 \leq i \leq \ell\}, \quad F_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), t_i \geq 0, \ell \in \mathbb{N},$$

und für alle Mengen dieses Systems gilt

$$(X_\cdot)^{-1}(\{f \in C : f(t_i) \in F_i, 1 \leq i \leq \ell\}) = \{\omega \in \Omega : X_{t_i}(\omega) \in F_i, 1 \leq i \leq \ell\} \in \mathcal{A}.$$

2) Definiert man auf (C, \mathcal{C}) ein Wahrscheinlichkeitsmass $Q^W := \mathcal{L}(X, |P)$ als Bild von P unter der messbaren Abbildung $X_\cdot : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (C, \mathcal{C})$, so erbt der Prozess der Koordinatenprojektionen $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$ auf (C, \mathcal{C}, Q^W) die Verteilungseigenschaften von X :

$$\begin{aligned} Q^W(\alpha_{t_i} \in F_i, 1 \leq i \leq \ell) &= Q^W(\{f \in C : f(t_i) \in F_i, 1 \leq i \leq \ell\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X_\cdot(\omega) \in \{f \in C : f(t_i) \in F_i, 1 \leq i \leq \ell\}\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X_{t_i}(\omega) \in F_i, 1 \leq i \leq \ell\}) . \end{aligned}$$

3) Da X eine Standard-Brownsche Bewegung war, deren endlich-dimensionale Randverteilungen durch (12.18) gegeben sind, hat man für den Prozess $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$ auf (C, \mathcal{C}, Q^W) wieder

$$(13.12') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{es gilt } \alpha_0 = 0 \text{ } Q^W\text{-fast sicher, und für } 0 < t_1 < \dots < t_\ell < \infty \text{ beliebig :} \\ \mathcal{L}(\alpha_{t_i})_{1 \leq i \leq \ell} | Q^W) = \mathcal{N}\left((0_d)_{1 \leq i \leq \ell}, ((t_i \wedge t_j)I_d)_{1 \leq i, j \leq \ell}\right) \end{array} \right.$$

für beliebige $0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_\ell$, bzw. äquivalent

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{es gilt } \alpha_0 = 0 \text{ } Q^W\text{-fast sicher, und für } 0 < t_1 < \dots < t_\ell < \infty \text{ beliebig :} \\ \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} \alpha_{t_1} - \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{t_\ell} - \alpha_{t_{\ell-1}} \end{pmatrix} \middle| Q^W\right) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0_d \\ \vdots \\ 0_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1 I_d & & 0 \\ & (t_2 - t_1)I_d & \\ 0 & & (t_\ell - t_{\ell-1})I_d \end{pmatrix}\right) . \end{array} \right.$$

4) Da die σ -Algebra \mathcal{C} auf C von den Koordinatenprojektionen $\alpha_t, t \geq 0$, erzeugt wird, kann es nur ein Wahrscheinlichkeitsmass Q^W auf (C, \mathcal{C}) mit (13.12') geben: dieses nennt man Wienermass. Unter Q^W hat der kanonische Prozess $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$ auf (C, \mathcal{C}) alle Eigenschaften i)–iii) aus 13.9, und ist damit eine Standard-Brownsche Bewegung. \square

13.12'' Satz: Der Raum (C, \mathcal{C}) aus 13.12 ist ein polnischer Raum.

Beweis: Wie in 13.12 bezeichne (C, \mathcal{C}) den Raum der stetigen Funktionen $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, versehen mit der durch die Koordinatenprojektionen $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ erzeugten σ -Algebra \mathcal{C} . Erklärt man auf C die Metrik der lokal gleichmässigen Konvergenz

$$d(f, g) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} \left(1 \wedge \max_{0 \leq s \leq m} |f(s) - g(s)| \right), \quad f, g \in C$$

so ist (C, d) vollständig und separabel, und die bezüglich $d(\cdot, \cdot)$ gebildete Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(C)$ stimmt überein mit der von den Koordinatenprojektionen erzeugten σ -Algebra $\mathcal{C} = \sigma(\alpha_t : t \geq 0)$. Nach Definition 10.24 ist somit (C, \mathcal{C}) aus 13.12 polnisch. Wir begründen die einzelnen Schritte genauer im Fall $d = 1$, die Verallgemeinerung auf beliebige Dimension $d \geq 1$ ist dann leicht.

i) (C, d) ist vollständig: Jede Cauchyfolge $(f_n)_n$ unter $d(\cdot, \cdot)$ ist in Einschränkung auf $[0, N]$ eine Cauchyfolge in $C([0, N])$, dem Raum der stetigen Funktionen $[0, N] \rightarrow \mathbb{R}$ mit gleichmässiger Konvergenz auf $[0, N]$. Die Cauchyfolge $(f_n|_{[0, N]})_n$ konvergiert in $C([0, N])$, d.h. es gibt eine stetige Limesfunktion $g^{[N]} : [0, N] \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen $g^{[N]}|_{[0, N-1]} = g^{[N-1]}$ lassen sich die $g^{[N]}$ zu einer Funktion $g \in C$ zusammensetzen: für diese gilt $f_n \rightarrow g$ in (C, d) .

ii) (C, d) ist separabel: schreibe $\mathcal{A}^{[N, M]}$ für die Klasse aller Funktionen $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften: g ist konstant auf $[M, \infty)$, und in Einschränkung auf $[0, M]$ ist g ein Polygonzug mit Stützstellen $j2^{-N}$, $0 \leq j \leq M2^{-N}$, und mit dyadischen Werten $k2^{-N}$, $|k| \leq N2^{-N}$, an diesen Stützstellen. Damit ist jedes $\mathcal{A}^{[N, M]}$ abzählbar, und die Vereinigung aller $\mathcal{A}^{[N, M]}$, $N, M \in \mathbb{N}$, liegt abzählbar dicht in (C, d) .

iii) Es gilt $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(C)$: nach Wahl der Metrik $d(\cdot, \cdot)$ ist für jedes feste $t \geq 0$ die Koordinatenprojektion α_t eine stetige Funktion $C \rightarrow \mathbb{R}$. Also sind Urbilder offener Mengen offen: $\alpha_t^{-1}(O) \in \mathcal{B}(C)$ für O offen in \mathbb{R} . Damit ist α_t eine $\mathcal{B}(C)$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion. Somit gilt $\mathcal{C} = \sigma(\alpha_t : t \geq 0) \subset \mathcal{B}(C)$.

iv) Es gilt $\mathcal{B}(C) \subset \mathcal{C}$: da (C, d) vollständig und separabel, wird die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(C)$ vom System der offenen Kugeln $B_\varepsilon(g)$, $g \in C$, $\varepsilon > 0$ erzeugt. Jede offene Kugel

$$B_\varepsilon(g) = \{f \in C : d(f, g) < \varepsilon\} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} (1 \wedge \sup_{\substack{0 \leq t \leq j \\ t \in \mathcal{Q}}} |\alpha_t - g(t)|) < \varepsilon \right\}$$

ist wegen der Stetigkeit $t \rightarrow \alpha_t(f)$ für jedes feste $f \in C$ ein Ereignis in $\sigma(\alpha_t : t \geq 0) = \mathcal{C}$.

Damit sind im Fall $d = 1$ alle oben gemachten Behauptungen bewiesen. □

Allerdings sind die Pfade der Brownschen Bewegung keineswegs glatt. Man kann zeigen (siehe Revuz-Yor 1991 S. 25), dass typische Pfade Hölder-stetig mit Hölder-Index $\frac{1}{2} - \varepsilon$ (für $\varepsilon > 0$ beliebig klein) sind. Hier beweisen wir nur:

13.13 Satz: Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ – definiert auf irgendeinem (Ω, \mathcal{A}, P) – eine Standard-Brownsche Bewegung. Dann gilt: P -fast sicher sind die Pfade von X an keiner Stelle $t \geq 0$ differenzierbar.

Beweis: Im Falle einer d -dimensionalen Standard-Brownsche Bewegung reicht es, die Behauptung für jede einzelne Komponente von X nachzuweisen. Wir führen also den Beweis für $d = 1$.

1) Für beliebiges festes $c > 0$ gilt für $n \rightarrow \infty$

$$P\left(\left|X_{\frac{1}{n}} - X_0\right| \leq \frac{c}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

denn: Zuwächse über Zeitintervalle der Länge $\frac{1}{n}$ sind nach $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$ verteilt, also $\sqrt{n}(X_{\frac{1}{n}} - X_0)$ nach $\mathcal{N}(0, 1)$, und damit gilt

$$\mathcal{N}(0, 1) \left(\left[-\frac{c}{\sqrt{n}}, +\frac{c}{\sqrt{n}} \right] \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c/\sqrt{n}}^{+c/\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

2) Ist $f \in C$ an einer Stelle $0 < t < \infty$ differenzierbar, so gibt es eine Konstante $\beta \in \mathbb{N}$ und eine offene Umgebung $U = U(t)$ von t so dass

$$(+) \quad |f(s) - f(t)| \leq \beta |s - t| \quad \forall s \in U(t).$$

Da $U = U(t)$ offen ist, muss es für hinreichend grosse $n \in \mathbb{N}$ eine Kette von vier sukzessiven Punkten des Gitters $\frac{1}{n}\mathbb{N}_0$ in der Nähe der Stelle t enthalten

$$(++) \quad \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n} < \frac{k+2}{n}$$

für die wir betrachten

$$\varphi_{nk}(f) := \max \left\{ \left| f\left(\frac{k+2}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right|, \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|, \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| \right\}.$$

Einschieben von $f(t)$ in jeden Differenzterm, Dreiecksungleichung und (+) liefern die Abschätzung

$$\varphi_{nk}(f) \leq 2 \cdot \beta \cdot \frac{2}{n} = \frac{4\beta}{n}.$$

3) Wir betrachten nun für $0 < t < m$ mit fester Konstante $\beta \in \mathbb{N}$ das Ereignis, dass – irgendwo in dem auf $[0, m]$ eingeschränkten Pfad X , – Zuwächse über drei aufeinander folgende Intervalle im Gitter $\frac{1}{n}\mathbb{N}_0$ die in Schritt 2) gefundene Schranke einhalten:

$$B(\beta, m, n) := \bigcup_{k=1}^{n \cdot m} \left\{ \varphi_{nk} \circ X. \leq \frac{4\beta}{n} \right\} \in \mathcal{A}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse von X erhält man

$$\begin{aligned} P(B(\beta, m, n)) &\leq \sum_{k=1}^{n \cdot m} P \left(\varphi_{nk} \circ X. \leq \frac{4\beta}{n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n \cdot m} P \left(|X_{\frac{k+2}{n}} - X_{\frac{k+1}{n}}| \leq \frac{4\beta}{n}, |X_{\frac{k+1}{n}} - X_{\frac{k}{n}}| \leq \frac{4\beta}{n}, |X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}}| \leq \frac{4\beta}{n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n \cdot m} \left[P \left(|X_{1/n} - X_0| \leq \frac{4\beta}{n} \right) \right]^3 = m \cdot n \cdot \left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)^3 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Dies verschwindet für $n \rightarrow \infty$, also gilt für jedes feste β und m

$$\bigcap_{n \geq n_0} B(\beta, m, n) \quad \text{ist eine } P\text{-Nullmenge in } \mathcal{A}$$

bei beliebigem n_0 .

4) Für die (i.a. nicht in der σ -Algebra \mathcal{A} enthaltene) Teilmenge von Ω

$$A(\beta, m) := \{\omega \in \Omega : \text{es existiert eine Stelle } t \in (0, m) \text{ mit } (+)\}$$

gilt wegen (+) und (++) dann

$$\bigcup_{\beta \in \mathbb{N}} A(\beta, m) \subset \bigcup_{\beta \in \mathbb{N}} \bigcup_{n_0} \bigcap_{n \geq n_0} B(\beta, m, n) \in \mathcal{A}.$$

Auf der rechten Seite steht eine abzählbare Vereinigung von P -Nullmengen in \mathcal{A} , damit eine P -Nullmenge in \mathcal{A} : also ist die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die der Pfad $X_\cdot(\omega) \in C$ an auch nur einer einzigen Stelle $t \in (0, m)$ differenzierbar ist, eine *Teilmenge* einer P -Nullmenge in \mathcal{A} . Hierbei ist $m \in \mathbb{N}$ beliebig: also kann man ein Ereignis von vollem Mass angeben, auf dem der Pfad X_\cdot nirgends in $(0, \infty)$ differenzierbar ist.

5) Eine rein notationelle Abwandlung der Argumente aus 2) für $t = 0$ und einseitig definierte Umgebungen von 0 liefert die entsprechende Behauptung für $t \in [0, \infty)$. \square

B'. Der Poisson-Prozess

Die Brownsche Bewegung ist der Prototyp eines stochastischen Prozesses mit stetigen Pfaden; der Poissonprozess ist der einfachste Prototyp eines stochastischen Prozesses, dessen Pfade Sprünge aufweisen.

13.14 Definition: Sei $\lambda > 0$. Ein *Poissonprozess mit Parameter λ* ist ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$, definiert auf irgendeinem (Ω, \mathcal{A}, P) , mit Zustandsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (oder einfacher: \mathbb{N}_0 versehen mit seiner Potenzmenge), und den folgenden Eigenschaften i) und ii):

i) der Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ hat unabhängige Zuwächse, die wie folgt Poisson-verteilt sind:

$$\forall s < t : P(X_t - X_s \in A) = \sum_{k \in A \cap \mathbb{N}_0} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});$$

ii) es gilt $X_0 = 0$ P -fast sicher, und für alle $\omega \in \Omega$

der Pfad $[0, \infty) \ni t \rightarrow X_t(\omega) \in \mathbb{N}_0$ ist stückweise konstant, nichtfallend, rechtsstetig, und alle Sprünge besitzen die Sprunghöhe +1 .

Insbesondere wächst der Pfad eines Poissonprozesses nur durch Sprünge, und besitzt höchstens endlich viele Sprünge auf endlichen Zeitintervallen.

13.15 Satz: Der Poisson-Prozess existiert.

Beweisskizze: 1) Wie in 12.19 konstruiert man aus der Faltungshalbgruppe $(\mathcal{P}(t\lambda))_{t \geq 0}$ – aufgrund des Kolmogorov-Konsistenzsatzes – einen Prozess mit den durch 13.14 i) vorgeschriebenen Randverteilungen als kanonischen Prozess $X := (\pi_t)_{t \geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I, P) =: (\Omega, \mathcal{A}, P)$ zur Startverteilung $\nu = \epsilon_0$ (mit $E = \mathbb{R}$ oder $E = \mathbb{N}_0$, und $I = [0, \infty)$).

2) Eine einfachere Variante der im Teilkapitel A benutzten Argumente – nachzulesen z.B. bei Bauer (1978, S. 390-391) – liefert eine Version $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ von $X = (\pi_t)_{t \geq 0}$, welche die geforderten Pfadeigenschaften besitzt. Mit $S :=$ Klasse der dyadischen Zahlen, abzählbar dicht in $[0, \infty)$, und mit X wie in 1) sind die wesentlichen Schritte wie folgt:

i) Für alle $s < t$ in S hat man $X_s \leq X_t$ P -fast sicher, auch sind Zuwächse $X_t - X_s$ P -fast sicher \mathbb{N}_0 -wertig. Es gibt also eine P -Nullmenge N_1 so dass auf S eingeschränkte Pfade

$$(*) \quad S \ni s \longrightarrow X_s(\omega) \in \mathbb{R}$$

für alle $\omega \in N_1^c$ nichtfallend und \mathbb{N}_0 -wertig (mit Start in 0 zur Zeit 0) sind. Folglich wird durch

$$\tilde{X}_t := 1_{N_1^c} \lim_{s \in S, s \downarrow t} X_s \quad \text{für alle } t \geq 0$$

ein stochastischer Prozess definiert, dessen Pfade sämtlich nichtfallende càdlàg-Funktionen $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}_0$ (mit Start in 0 zur Zeit 0) sind.

ii) Auch das folgende Ereignis ist eine P -Nullmenge:

$$N_2 := \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \bigcup_{j=0}^{m2^{-n}-1} \left\{ X_{\frac{j+1}{2^n}} - X_{\frac{j}{2^n}} \geq 2 \right\} .$$

Für $\omega \in N_1^c \cap N_2^c$ sind die auf S eingeschränkten Pfade $(*)$ folglich stückweise konstant, und wo es Sprünge in $(*)$ gibt, müssen diese die Sprunghöhe 1 aufweisen. \tilde{X} erbt diese Eigenschaft.

iii) Für $0 < \varepsilon < 1$ und alle $t_1 < t_2$ in $[0, \infty)$ gilt $P(X_{t_2} - X_{t_1} > \varepsilon) = P(X_{t_2} - X_{t_1} \geq 1) = 1 - e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$. Damit ist der Prozess X stochastisch stetig im Sinne von (13.3). Im Fall $t \in S$ erhält man aus der Definition von \tilde{X} und der stochastischen Stetigkeit: $\tilde{X}_t = 1_{N_1^c} X_t$ P -fast sicher, also $\tilde{X}_t = X_t$ P -fast sicher. Im Fall $t \in [0, \infty) \setminus S$ folgt wie in Schritt 3) des Beweises von 13.2 die Aussage $\tilde{X}_t = X_t$ P -fast sicher. Also ist \tilde{X} eine Modifikation von X . \square

In Analogie zur Definition des Wienermasses auf dem Pfadraum $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ als 'einfachste' Konstruktion der Standard Brownschen Bewegung (in 13.12) besteht die 'einfachste' Konstruktion eines

Poissonprozesses mit Parameter $\lambda > 0$ darin, ein Wahrscheinlichkeitsmass auf dem für Poissonprozesse spezifischen Pfadraum festzulegen.

13.16 Satz: Schreibe \mathbb{M} für den Raum aller Funktionen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit den in 13.14 ii) genannten Eigenschaften: f ist stückweise konstant, nichtfallend, rechtsstetig, und alle Sprünge von f haben Sprunghöhe 1. Versehe \mathbb{M} mit der von den Koordinatenprojektionen $\alpha_t : f \rightarrow f(t)$ erzeugten σ -Algebra \mathcal{M} . Für jedes $\lambda > 0$ gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmass Q^λ auf $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$, unter dem der kanonische Prozess $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$ auf $(\mathbb{M}, \mathcal{M}, Q^\lambda)$ ein Poissonprozess mit Parameter λ ist.

Beweis: Man argumentiert genau wie in 13.12: Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess mit Parameter λ , definiert auf (Ω, \mathcal{A}, P) . Indem man den Pfad von X als messbare Abbildung $(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathcal{M})$ betrachtet, definiert man Q^λ als Bild von P unter $X, : \Omega \ni \omega \rightarrow X_\cdot(\omega) \in \mathbb{M}$. Nach Definition von \mathcal{M} ist ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ durch seine endlichdimensionalen Randverteilungen eindeutig festgelegt. \square

13.16' Bemerkung: Betrachte eine Familie unabhängiger Poisson-Prozesse $X^{(i)}$ mit Parametern $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq n + m$, und reelle Konstanten $a_1, \dots, a_{n+m} \neq 0$ so dass $|a_i| > 1$ für $1 \leq i \leq n$ und $|a_i| \leq 1$ für $n + 1 \leq i \leq n + m$. Prozesse der Bauart

$$X = (X_t)_{t \geq 0}, \quad X_t = \sum_{i=1}^n a_i X_t^{(i)} + \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i (X_t^{(i)} - \lambda_i \cdot t), \quad t \geq 0$$

entsprechen den Poissonmischungen aus 9.4 (hier mit $\Lambda := \sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i \epsilon_{a_i}$) und besitzen càdlàg-Pfade mit höchstens endlich vielen Sprüngen über kompakte Zeitintervalle.

13.16'' Bemerkung: Wir geben verschiedene Ausblicke ohne Beweise.

a) $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$ ist ein polnischer Raum: es gibt eine Metrik auf \mathbb{M} , unter der (\mathbb{M}, d) ein vollständiger und separabler metrischer Raum wird, wobei die von den Koordinatenprojektionen erzeugte σ -Algebra \mathcal{M} auf \mathbb{M} übereinstimmt mit der Borelschen $\mathcal{B}(\mathbb{M})$.

Der Konvergenzbegriff (genauer les man nach im Buch von Billingsley 1968) ist der folgende. Schreibe Φ für die Klasse aller Zeittransformationen auf $[0, \infty)$, d.h. aller stetigen streng monoton wachsenden Funktionen $t \rightarrow \varphi(t)$ mit den Eigenschaften $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(t) \uparrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$. Sei $f \in \mathbb{M}$, sei $(f_n)_n$ eine Folge in \mathbb{M} . Wir definieren Konvergenz in \mathbb{M} wie folgt: es gilt $d(f_n, f) \rightarrow 0$

genau dann wenn man zu $(f_n)_n$ eine Folge von Zeittransformationen $(\varphi_n)_n$ finden kann, so dass

$$\phi_n \longrightarrow \text{id} \quad \text{und} \quad f_n \circ \varphi_n \longrightarrow f \quad \text{lokal gleichmässig auf } [0, \infty) \text{ f\u00fcr } n \rightarrow \infty .$$

Äquivalent formuliert: bezeichnet $(t_j)_{j \geq 1}$ die aufsteigend geordnete Folge der Sprungzeiten eines Pfades $f \in \mathcal{M}$, so konvergieren Pfade f_n mit Sprungzeitenfolge $(t_j^{(n)})_{j \geq 1}$ genau dann im Sinne der Metrik $d(f, f_n)$ gegen f , wenn für jedes feste $j \in \mathbb{N}$ die Konvergenz $t_j = \lim_{n \rightarrow \infty} t_j^{(n)}$ gilt.

b) Mit Martingalmethoden, die jenseits der bisher erarbeiteten Techniken liegen, kann man für die in 9.3 als schwacher Limes von Poissonmischungen entstandenen unendlich teilbaren Verteilungen Q_Λ folgendes zeigen: der zur Faltungshalbgruppe $(Q_{t\Lambda})_{t \geq 0}$ nach 12.14" existierende Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen besitzt càdlàg-Pfade. Hierbei ist Λ wie in 9.1 ein beliebiges σ -endliches Mass auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $\int (x^2 \wedge 1) \Lambda(dx) < \infty$.

Ist Λ ein endliches Mass auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, besitzen die Pfade von X höchstens endlich viele Sprünge über kompakte Zeitintervalle, und man nennt X einen *Compound Poisson-Prozess*. Eine empfehlenswerte Referenz insbesondere auch für Compound-Poisson Prozesse ist das Buch von Brémaud, *Point Processes and Queues*, 1981.

Gilt dagegen $\Lambda(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = +\infty$, so ist die Struktur der Pfade (vgl. Bemerkung 12.18" iii) viel subtiler: P -fast sicher sind diese nirgends konstant und besitzen abzählbar unendlich viele Sprünge. Für festes $\varepsilon > 0$ (beliebig klein) findet man auf jedem kompakten Zeitintervall höchstens endlich viele 'grosse' Sprünge (Sprünge, deren Sprunghöhe betragsmässig $> \varepsilon$ ist), daneben aber 'unendlich viele unendlich kleine' Sprünge (Sprunghöhe betragsmässig $\leq \varepsilon$), die sich für 'Sprunghöhe gegen 0' häufen. Diese sind ähnlich wie in Bemerkung 9.7 nur in einem L^2 -Sinn 'zentriert' summierbar. Eine schön lesbare Referenz ist das Buch von Bertoin (1996).

C. Eigenschaften der eindimensionalen Brownschen Bewegung

Ziel dieses Teilkapitels ist das Gesetz vom iterierten Logarithmus, das das Verhalten des Brownschen Pfades im Ursprung $t = 0$ sowie asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ beschreibt, sowie die Untersuchung der Nullstellenmenge des Brownschen Pfades. Die starke Markoveigenschaft, die wir dabei in suggestiver Weise benutzen, wird im Teilkapitel 13 D (insbesondere: 13.32 und 13.36) sorgfältig formuliert werden; Teilkapitel D kann separat gelesen werden.

Zunächst betrachten wir statt der Brownschen Bewegung einen einfachen symmetrischen Random Walk.

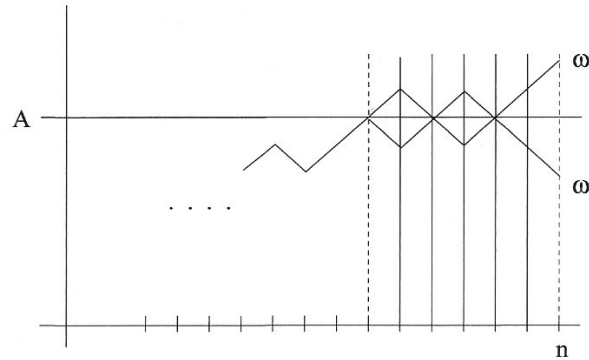
13.17 Hilfssatz (Spiegelungsprinzip): Sei $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der symmetrische Random Walk

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ iid mit } P(\xi_1 = +1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}, \quad S_0 := 0$$

und $M_n := \max_{0 \leq k \leq n} S_k$. Dann gilt für $A \in \mathbb{N}$ beliebig und alle n :

$$P(M_n \geq A) = 2P(S_n > A) + P(S_n = A).$$

Beweis: Sei T_A die Zeit, zu der der Prozess S zum erstenmal die Schranke $A \in \mathbb{N}$ trifft. Im Prozess nach T_A hat jedes Pfadsegment dieselbe Wahrscheinlichkeit wie das entsprechende an A gespiegelte Pfadsegment:



also ist die Verteilung von S_n in Einschränkung auf $\{T_A < n\}$ symmetrisch um A . Damit gilt

$$P(S_n > A) = P(S_n > A, T_A < n) = P(S_n < A, T_A < n)$$

und folglich

$$P(T_A \leq n, S_n \neq A) = P(T_A < n, S_n \neq A) = 2P(S_n > A).$$

Zugleich gilt aber auch

$$P(T_A \leq n, S_n = A) = P(S_n = A)$$

und damit folgt die Behauptung durch Addition der letzten beiden Zeilen

$$P(M_n \geq A) = P(T_A \leq n) = P(S_n = A) + 2P(S_n > A). \quad \square$$

13.17' Bemerkung: Der symmetrische Random Walk $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in 13.17 wird mit Wahrscheinlichkeit 1 jede noch so grosse Schranke $A \in \mathbb{N}$ irgendwann überschreiten: mit dem Zentralen Grenzwertsatz gilt für jede feste Schwelle $A \in \mathbb{N}$ für $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n > A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n > \frac{1}{\sqrt{n}}A\right) = \mathcal{N}(0, 1)((0, \infty)) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n < A) = \frac{1}{2} \quad \text{sowie} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = A) = 0.$$

Daher zeigt die letzte Zeile des Beweises von 13.17

$$P(T_A < \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(T_A \leq n) = 1 \quad \text{für jedes feste } A \in \mathbb{N}. \quad \square$$

13.18 Satz (Spiegelungsprinzip): Wir betrachten eine 1-dimensionale Standard-Brownsche Bewegung $X = (X_t)_{t \geq 0}$ und ihren Maximumsprozess M

$$M = (M_t)_{t \geq 0}, \quad M_t := \max_{s \in [0, t]} X_s.$$

Dann gilt für beliebiges $a > 0$

$$P(M_t > a) = 2P(X_t > a).$$

Beweisskizze: Wir begründen dies mit schwacher Konvergenz eines reskalierten und linear interpolierten Random Walks gegen die Brownsche Bewegung, *ohne auf die hierzu erforderliche Theorie der schwachen Konvergenz in $C([0, 1])$ genauer einzugehen*. Man findet dies mit sorgfältig und detailliert gegebenen Beweisen im Buch von Billingsley (1968). Zur Verallgemeinerung auf $C([0, \infty))$ siehe z.B. Jacod und Shiryaev (1987, Kap. VI.1–VI.3).

1) Wie in 13.12 und in 13.12'' bezeichne (C, \mathcal{C}) den Raum der stetigen Funktionen $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, versehen mit der σ -Algebra $\mathcal{C} = \sigma(\alpha_t : t \geq 0) = \mathcal{B}(C)$, und Q^W das Wienermass auf (C, \mathcal{C}) . Betrachte zum Random Walk $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aus 13.17 eine Folge

$$X^{(n)} = \left(X_t^{(n)} \right)_{t \geq 0}, \quad n \in \mathbb{N}$$

reskalierten und linear interpolierten Random Walks für $n \rightarrow \infty$, definiert durch

$$\begin{aligned} X_t^{(n)} &:= \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\frac{j}{n}} \quad \text{falls } t = \frac{j}{n}, j \in \mathbb{N}_0 \\ X_t^{(n)} &:= \lambda X_{\frac{j}{n}}^{(n)} + (1-\lambda) X_{\frac{j+1}{n}}^{(n)} \quad \text{falls } t = \lambda \frac{j}{n} + (1-\lambda) \frac{j+1}{n} \quad \text{mit } 0 < \lambda < 1. \end{aligned}$$

Wie im Beweis von 13.12 betrachten wir den Pfad $X_{\cdot}^{(n)}$ als messbare Abbildung $(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (C, \mathcal{C})$ und fassen die Prozesse $X^{(n)}$ als Wahrscheinlichkeitsmasse $Q^{(n)}$ auf dem Pfadraum (C, \mathcal{C}) auf. Nach einem wichtigen Satz von Donsker, den wir hier ohne Beweis benutzen (siehe Billingsley 1968, S. 68, zusammen mit Jacod und Shiryaev 1987, Thm. VI.1.5) gilt schwache Konvergenz

$$Q^{(n)} \longrightarrow Q^W \quad (\text{schwach in } C), \quad n \rightarrow \infty.$$

1') Aus 13.17, der Definition der $X^{(n)}$ und dem Zentralen Grenzwertsatz folgert man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\max_{0 \leq s \leq t} X_s^{(n)} > a \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(X_t^{(n)} > a \right) = 2\mathcal{N}(0, t)((a, \infty))$$

für beliebige feste $t > 0$ und $a > 0$.

2) Die Konvergenz auf C ist lokal gleichmässig, siehe 13.12", folglich sind

$$h_1 : C \ni f \rightarrow \max_{0 \leq s \leq t} f(s) \in \mathbb{R} \quad , \quad h_2 : C \ni f \rightarrow f(t) \in \mathbb{R}$$

bei festem $t > 0$ stetige Abbildungen von C nach \mathbb{R} . Mit dem continuous mapping theorem 6.4' folgt schwache Konvergenz der Bildmasse unter h_i für $i = 1, 2$:

$$(Q^{(n)})^{h_i} \rightarrow (Q^W)^{h_i} \quad (\text{schwach in } \mathbb{R}, \text{ für } n \rightarrow \infty) .$$

Für den kanonischen Prozess $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$ auf (C, \mathcal{C}, Q^W) gilt

$$Q^W \left(\max_{0 \leq s \leq t} \alpha_s > a \right) = Q^W (\{f \in C : h_1(f) > a\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q^{(n)} (\{f \in C : h_1(f) > a\})$$

für $(Q^W)^{h_1}$ -fast alle $a > 0$, nach 6.12. Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt überein mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\max_{0 \leq s \leq t} X_s^{(n)} > a \right) = 2\mathcal{N}(0, t)((a, \infty)) = 2Q^W (\alpha_t > a)$$

für alle $a > 0$, nach Schritt 1') oben. Es folgt, dass die Gleichheit

$$Q^W \left(\max_{0 \leq s \leq t} \alpha_s > a \right) = 2Q^W (\alpha_t > a)$$

für alle $a > 0$ gelten muss. Dies schliesst die Beweisskizze ab. □

13.19 Satz: Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung auf (Ω, \mathcal{A}, P) . Die *level crossing Zeiten* von X

$$T_a := \inf\{t > 0 : X_t > a\} , \quad a > 0$$

sind P -fast sicher endlich. Die Verteilung $\mathcal{L}(T_a|P)$ besitzt auf $(0, \infty)$ die stetige Lebesgue-Dichte

$$f_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{a^2}{t}} , \quad 0 < t < \infty .$$

Die level crossing Zeiten $(T_a)_{a>0}$ haben folgende Skalierungseigenschaft

$$\mathcal{L}(T_a|P) = \mathcal{L}(a^2 T_1|P) , \quad a > 0$$

und besitzen *keinen endlichen Mittelwert*: es gilt vielmehr

$$P(T_a > t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{für } t \rightarrow \infty .$$

Beweis: 1) Vorbemerkung: T_a ist eine Stopzeit bezüglich einer der Brownschen Bewegung geeignet zuzuordnenden Filtration, siehe Teilkapitel D.

2) Mit $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} X_s$ und mit Φ Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}(0, 1)$ gilt nach Spiegelungsprinzip

$$P(T_a < t) = P(M_t > a) = 2P(X_t > a) = 2P(X_1 > \frac{a}{\sqrt{t}}) = 2(1 - \Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})).$$

Die rechte Seite ist eine in $t \in (0, \infty)$ stetige Funktion, also gilt auch

$$P(T_a \leq t) = 2(1 - \Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})), \quad 0 < t < \infty$$

und Ableiten nach t liefert die Dichte f_a wie angegeben. Deren Gestalt impliziert die Skalierungseigenschaft (Transformationsformel 3.12 benutzen), die Aussage über das Abklingen von $P(T_a > \cdot)$, und die Nicht-Endlichkeit erster Momente $E(T_a) = +\infty$. \square

13.19' Bemerkung: Wir werden in diesem Teilkapitel die *starke Markov-Eigenschaft* der Brownschen Bewegung X in der folgenden intuitiven Form (siehe Teilkapitel D für exakte Formulierungen) benutzen: ist T eine Stopzeit bezüglich einer geeigneten der Brownschen Bewegung zugeordneten Filtration (genau: siehe 13.32) mit $P(T < \infty) = 1$, so bilden die Zuwächse nach der Zeit T

$$Y = (Y_t)_{t \geq 0}, \quad Y_t := X_{T+t} - X_T, \quad t \geq 0$$

wieder eine Brownsche Bewegung. Diese ist unabhängig von der Vergangenheit im Prozess X bis zur Zeit T (genaue Formulierung siehe 13.35). Insbesondere gilt diese Eigenschaft für die level crossing Zeiten $T := T_a, a > 0$.

13.19'' Hilfssatz: Für jedes feste $a > 0$ ist das Wahrscheinlichkeitsmass $Q_a := \mathcal{L}(T_a | P)$ strikt stabil mit Parameter $\frac{1}{2}$.

Beweis: Die starke Markov-Eigenschaft 13.19' impliziert

$$(+)$$

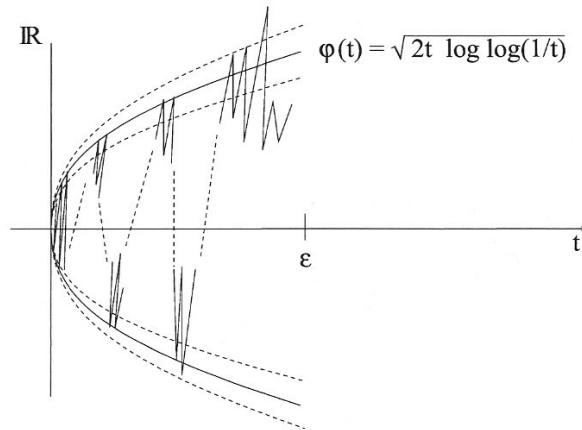
$$\mathcal{L}(T_{a+a'}) = \mathcal{L}(T_a) * \mathcal{L}(T_{a'}), \quad a, a' \in (0, \infty).$$

Dies sieht man so: um ein Niveau $a + a'$ zu erreichen, wartet man zuerst, bis die Brownsche Bewegung X das Niveau a überquert. Zur Zeit T_a startet mit $Y := (X_{T_a+t} - a)_{t \geq 0}$ eine von der Vergangenheit bis T_a unabhängige Brownsche Bewegung. Danach wartet man, bis Y das Niveau a' überquert hat. Dies zeigt (+). Aus der Skalierungseigenschaft in 13.19 folgt mit $\alpha := \frac{1}{2}$

$$\mathcal{L}\left(\frac{T_{na}}{n^{1/\alpha}} \mid P\right) = \mathcal{L}\left(\frac{(na)^2 T_1}{n^2} \mid P\right) = \mathcal{L}(a^2 T_1 \mid P) = \mathcal{L}(T_a \mid P)$$

für jedes feste $a > 0$. Dies kombiniert mit (+) zeigt nach Definition 9.15, dass das Wahrscheinlichkeitsmass $Q_a := \mathcal{L}(T_a|P)$ strikt stabil mit Parameter $\frac{1}{2}$ ist. \square

Das Hauptergebnis in diesem Teilkapitel ist das *Gesetz vom Iterierten Logarithmus (LIL)*. Es geht zurück auf Khintchine (1933) und Hartmann und Wintner (1941) und beschreibt das Verhalten der Brownschen Pfade am 'Ursprung' $t = 0$.



13.20 Satz (LIL in $t = 0$): Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, definiert auf (Ω, \mathcal{A}, P) . Dann gelten die folgenden Aussagen i) und ii) P -fast sicher:

$$\text{i)} \quad \limsup_{t \downarrow 0} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log \log(\frac{1}{t})}} = 1 ,$$

$$\text{ii)} \quad \liminf_{t \downarrow 0} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log \log(\frac{1}{t})}} = -1 .$$

Beweis: 0) Es genügt, die Aussage i) zu beweisen: zugleich mit dem Prozess X auf (Ω, \mathcal{A}, P) ist auch der 'gespiegelte' Prozess $\tilde{X} = (-X_t)_{t \geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung, und die Aussage ii) für X folgt sofort aus der Aussage i) für \tilde{X} . Mit $t_0 := e^{-2}$ setze

$$\varphi(t) := \sqrt{2t \log \log(\frac{1}{t})}, \quad 0 < t < t_0 .$$

Die Behauptung i) ergibt sich aus dem folgenden Paar $(\alpha') + (\beta')$ von Aussagen:

$$(\alpha') \quad \forall \delta > 0 : \quad P \left(\limsup_{t \downarrow 0} 1_{((1+\delta)\varphi(t), \infty)}(X_t) = 1 \right) = 0 ,$$

$$(\beta') \quad \forall \delta > 0 : \quad P \left(\limsup_{t \downarrow 0} 1_{((1-\delta)\varphi(t), \infty)}(X_t) = 1 \right) = 1 .$$

Wir werden $(\alpha') + (\beta')$ zeigen, indem wir das Paar von Aussagen $(\alpha) + (\beta)$ beweisen:

(α) für jedes $\delta > 0$ existiert ein $q = q(\delta) \in (0, 1)$ so dass gilt: P -fast sicher tritt

$$X_t > (1 + \delta) \varphi(t) \quad \text{für ein } t \text{ in } [q^{n+1}, q^n]$$

nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ ein;

(β) für jedes $\delta > 0$ existiert ein $q = q(\delta) \in (0, 1)$ so dass gilt: P -fast sicher tritt

$$X_{q^n} > (1 - \delta) \varphi(q^n)$$

für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ein.

Wir schreiben nun

$$M = (M_t)_{t \geq 0}, \quad M_t := \max_{s \in [0, t]} X_s, \quad t \geq 0$$

für den Maximumprozess der Brownschen Bewegung, und zeigen (α) + (β) in mehreren Schritten.

1) Beweis der Aussage (α): Fixiere $\delta > 0$ beliebig klein. Für $0 < q < 1$ geeignet (die Wahl von q wird später in (\diamond) getroffen) betrachte

$$C_n(q) := \{ X_t > (1 + \delta) \varphi(t) \text{ für ein } t \in [q^{n+1}, q^n] \} \in \mathcal{A}$$

(da alle Pfade von X stetig sind, schreibt sich die Menge $C_n(q)$ als

$$\bigcup_{t \in [q^{n+1}, q^n] \cap \mathcal{Q}} \{ X_t > (1 + \delta) \varphi(t) \}$$

und ist als Vereinigung abzählbar vieler Ereignisse ein Ereignis). Wir starten nach einer groben Abschätzung mit dem Spiegelungsprinzip:

$$\begin{aligned} P(C_n(q)) &\leq P(M_{q^n} > (1 + \delta) \varphi(q^{n+1})) \stackrel{13.17}{\leq} 2 P(X_{q^n} > (1 + \delta) \varphi(q^{n+1})) \\ &= 2 P\left(\underbrace{\frac{X_{q^n}}{\sqrt{q^n}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} > \underbrace{(1 + \delta) \frac{\varphi(q^{n+1})}{\sqrt{q^n}}}_{\rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \right) \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} 2 \left((1 + \delta) \frac{\varphi(q^{n+1})}{\sqrt{q^n}} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[(1 + \delta) \frac{\varphi(q^{n+1})}{\sqrt{q^n}} \right]^2 \right) \end{aligned}$$

wobei für die 'tails' von $\mathcal{N}(0, 1)$ die bekannte Abschätzung (Feller I, 1969, S. 165, mit Notation Φ für die Verteilungsfunktion und n für die Dichte von $\mathcal{N}(0, 1)$)

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x} n(x), \quad x \rightarrow \infty$$

benutzt wurde, zusammen mit

$$\frac{\varphi(q^{n+1})}{\sqrt{q^n}} = \sqrt{2 \cdot q \log \log \left(\left(\frac{1}{q} \right)^{n+1} \right)} = \sqrt{2 \cdot q \left(\log(n+1) + \log \log \left(\frac{1}{q} \right) \right)} \sim \sqrt{2q \log(n)}$$

für $n \rightarrow \infty$. Wählt man nun $q \in (0, 1)$ nahe genug an 1:

$$(\diamond) \quad (1 + \delta)^2 q > 1$$

so gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2} \left[(1 + \delta) \frac{\varphi(q^{n+1})}{\sqrt{q^n}} \right]^2 \sim (1 + \delta)^2 \cdot q \cdot \log n .$$

Damit sind nach Wahl von q in (\diamond) die Wahrscheinlichkeiten

$$P(C_n(q)) = \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{\log n}} n^{-(1+\delta)^2 q} \right)$$

summierbar in n , und Borel-Cantelli 5.5 a) zeigt

$$P(C_n(q) \text{ tritt ein für unendlich viele } n) = 0 ;$$

damit ist (α) bewiesen. Mit (α) gilt aber auch (α') :

$$P \left(\limsup_{t \downarrow 0} 1_{((1+\delta)\varphi(t), \infty)}(X_t) = 1 \right) = 0 .$$

2) Fixiere $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Für $0 < q < 1$ geeignet (die Wahl von q wird später in $(*)$ getroffen) betrachte die unabhängigen Zuwächse

$$Z_n := X_{q^n} - X_{q^{n+1}} \quad \text{verteilt nach } \mathcal{N}(0, q^n - q^{n+1}) = \mathcal{N}(0, q^n(1 - q))$$

und zeige

$$(\gamma) \quad P(D(q)) = 1, \quad D(q) := \{ X_{q^n} > (1 - \varepsilon)\varphi(q^n) + X_{q^{n+1}} \text{ für unendlich viele } n \} .$$

Dies sieht man so: derselbe Schluss wie in Schritt 1) liefert mit einer geeigneten Konstanten C_q

$$\begin{aligned} P(X_{q^n} > (1 - \varepsilon)\varphi(q^n) + X_{q^{n+1}}) &= P(Z_n > (1 - \varepsilon)\varphi(q^n)) \\ &= P \left(\frac{Z_n}{\sqrt{q^n(1 - q)}} > (1 - \varepsilon) \frac{\varphi(q^n)}{\sqrt{q^n(1 - q)}} \right) \\ &\sim C_q \frac{1}{\sqrt{\log n}} n^{-\frac{(1-\varepsilon)^2}{1-q}}, \quad n \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

Wählt man nun $q \in (0, 1)$ klein genug:

$$(*) \quad \frac{(1 - \varepsilon)^2}{1 - q} < 1 ,$$

so sind unter (*) die Wahrscheinlichkeiten in der letzten Gleichungskette *nicht* summierbar über n , und Borel-Cantelli 5.5 b) – wegen Unabhängigkeit der $(Z_n)_n$ – liefert die Aussage (γ).

3) Als Hilfsresultat halten wir fest: für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ und für *jede* Wahl von $0 < q < 1$ gilt

$$(\delta) \quad P(E(q)) = 1, \quad E(q) := \{X_{q^n} \geq -(1+\varepsilon)\varphi(q^n) \text{ für schliesslich alle } n\}.$$

Diese Aussage (δ) ergibt sich sofort aus einer Anwendung der schon bewiesenen Aussage (α') auf die Standard-Brownsche Bewegung $\tilde{X} := (-X_t)_{t \geq 0}$:

$$\begin{aligned} P(\Omega \setminus E(q)) &= P(X_{q^n} < -(1+\varepsilon)\varphi(q^n) \text{ für unendlich viele } n) \\ &\leq P\left(\limsup_{t \downarrow 0} 1_{((1+\varepsilon)\varphi(t), \infty)}(\tilde{X}_t) = 1\right) = 0. \end{aligned}$$

4) Nun beweisen wir die Aussage (β) und schliessen damit den Beweis des Satzes ab. Fixiere $\delta > 0$ beliebig klein. Wir wählen zuerst ein $\varepsilon \in (0, \delta)$, danach ein q in $(0, 1)$, welches klein genug ist, um neben der Bedingung (*) aus Schritt 2)

$$q < 1 - (1 - \varepsilon)^2$$

auch noch die Bedingung

$$(**) \quad \sqrt{q} < \frac{\delta - \varepsilon}{2(1 + \varepsilon)} \iff (1 - \varepsilon) - 2(1 + \varepsilon)\sqrt{q} > 1 - \delta$$

zu erfüllen. Durch sukzessiven Übergang zu Teilmengen erhält man wegen (*) und (**)

$$\begin{aligned} &P(X_{q^n} > (1 - \delta)\varphi(q^n) \text{ für unendlich viele } n) \\ &\stackrel{(**)}{\geq} P(X_{q^n} > [(1 - \varepsilon) - 2(1 + \varepsilon)\sqrt{q}]\varphi(q^n) \text{ für unendlich viele } n) \\ &\geq P\left(X_{q^n} > [(1 - \varepsilon) - (1 + \varepsilon)\underbrace{\frac{\varphi(q^{n+1})}{\varphi(q^n)}}_{\rightarrow \sqrt{q}, n \rightarrow \infty}]\varphi(q^n) \text{ für unendlich viele } n\right) \\ &\geq P\left(\{X_{q^n} > (1 - \varepsilon)\varphi(q^n) + X_{q^{n+1}} \text{ und } X_{q^{n+1}} \geq -(1 + \varepsilon)\varphi(q^{n+1}) \text{ für } \infty \text{ viele } n\}\right) \\ &\geq P\left(\{X_{q^n} > (1 - \varepsilon)\varphi(q^n) + X_{q^{n+1}} \text{ für unendlich viele } n\} \cap \right. \\ &\quad \left. \left\{X_{q^{n+1}} \geq -(1 + \varepsilon)\varphi(q^{n+1}) \text{ für schliesslich alle } n\right\}\right) \\ &= P(D(q) \cap E(q)) \stackrel{(*)}{=} 1 \end{aligned}$$

nach (δ) und (γ). Damit ist (β) bewiesen, und der Beweis von 13.20 ist abgeschlossen. \square

Wir können also obere und untere Einhüllende für den Brownschen Pfad im Ursprung angeben. Das nächste Ziel besteht darin, obere und untere Einhüllende für den Brownschen Pfad 'nach langer Zeit' herzuleiten. Dies kann aus 13.20 mit 'Zeitumkehr' hergeleitet werden.

13.21 Satz: Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, definiert auf irgendeinem (Ω, \mathcal{A}, P) . Für jedes feste $a > 0$ ist der Prozess

$$\tilde{X} := \left(\frac{1}{\sqrt{a}} X_{a \cdot t} \right)_{t \geq 0}$$

ebenfalls eine Standard-Brownsche Bewegung. Nach Abänderung der Pfade auf einer P -Nullmenge ist auch

$$\tilde{X} = (\tilde{X}_s)_{s \geq 0} \quad , \quad \tilde{X}_s(\omega) := \begin{cases} sX_{1/s}(\omega), & s > 0 \\ 0, & s = 0 \end{cases}$$

eine Standard-Brownsche Bewegung.

Beweis: Die erste Aussage ist leicht, sie folgt aus der Unabhängigkeit der Zuwächse in X bzw. \tilde{X} und der üblichen Skalierungseigenschaft von Normalverteilungen. Wir beweisen die zweite Aussage, in der eine 'Zeitumkehr' im Prozess X durchgeführt wird. Die Pfade von \tilde{X} sind stetig auf $(0, \infty)$, und die endlichdimensionalen Randverteilungen von \tilde{X} sind Normalverteilungen, deren Kovarianzmatrix für $0 < s_i, s_j < \infty$ die Einträge

$$E(\tilde{X}_{s_i} \tilde{X}_{s_j}) = s_i s_j E(X_{1/s_i} X_{1/s_j}) = s_i s_j \left(\frac{1}{s_i} \wedge \frac{1}{s_j} \right) = s_j \wedge s_i$$

aufweist. Damit hat der Prozess $(\tilde{X}_s)_{0 < s < \infty}$ die endlichdimensionalen Randverteilungen der auf das Zeitintervall $(0, \infty)$ eingeschränkten Standard-Brownschen Bewegung

$$(*) \quad 0 < s_1 < \dots < s_\ell < \infty : \quad \mathcal{L}((\tilde{X}_{s_1}, \dots, \tilde{X}_{s_\ell}) | P) = \mathcal{N}(0, (s_i \wedge s_j)_{i,j=1, \dots, \ell}) .$$

Es bleibt zu zeigen, dass P -fast alle Pfade von \tilde{X} stetig sind in $t = 0$, genauer:

$$\text{für } P\text{-fast alle } \omega \in \Omega \text{ gilt } \lim_{s \downarrow 0} \tilde{X}_s(\omega) = 0.$$

Setze $\tilde{\mathcal{C}} := C((0, \infty), \mathbb{R})$, und versee $\tilde{\mathcal{C}}$ mit der durch die Koordinatenprojektionen $(\alpha_t)_{0 < t < \infty}$ erzeugten σ -Algebra $\tilde{\mathcal{C}}$. Nach dem Eindeutigkeitsatz gibt es auf $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{C}})$ höchstens ein Wahrscheinlichkeitsmass mit den (*) entsprechenden Eigenschaften

$$0 < s_1 < \dots < s_\ell < \infty : \quad \mathcal{L}((\alpha_{s_1}, \dots, \alpha_{s_\ell}) | P) = \mathcal{N}(0, (s_i \wedge s_j)_{i,j=1, \dots, \ell}) .$$

Als Bild \tilde{Q} des Wienermasses Q^W unter der Abbildung

$$C \ni f = (f(s))_{s \geq 0} \rightarrow (f(s))_{0 < s < \infty} \in \tilde{\mathcal{C}}$$

erhält man ein solches, zugleich aber auch als Bild von P unter der Abbildung

$$\Omega \ni \omega \rightarrow \tilde{X}_*(\omega) \in \tilde{\mathcal{C}}.$$

Notwendig stimmen dann diese zwei Bildmasse auf $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{C}})$ überein, und man erhält

$$P\left(\left\{\lim_{\substack{s \downarrow 0 \\ s \text{ rat.}}} \tilde{X}_s = 0\right\}\right) = \tilde{Q}\left(\underbrace{\left\{\lim_{\substack{s \downarrow 0 \\ s \text{ rat.}}} \alpha_s = 0\right\}}_{\in \tilde{\mathcal{C}}}\right) = Q^W\left(\left\{\lim_{\substack{s \downarrow 0 \\ s \text{ rat.}}} \alpha_s = 0\right\}\right) = 1.$$

Also gibt es eine P -Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, so dass der Prozess $(1_{N^c} \tilde{X}_s)_{s \geq 0}$ stetige Pfade auf ganz $[0, \infty)$ hat und die richtigen endlich-dimensionalen Randverteilungen besitzt, mit $1_{N^c} \tilde{X}_0 \equiv 0$. Damit ist $(1_{N^c} \tilde{X}_s)_{s \geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. \square

Bemerkung: Analog zu den Argumenten des Beweises von 13.12" weist man nach, dass auch die Räume $\tilde{\mathcal{C}} := C((-\infty, \infty), \mathbb{R}^d)$ bzw. $\tilde{\mathcal{C}} := C((0, \infty), \mathbb{R}^d)$ versehen mit der von ihren Koordinatenprojektionen erzeugten σ -Algebra $\tilde{\mathcal{C}}$ polnische Räume sind.

Die Metrik der lokal gleichmässigen Konvergenz definiert man auf $\tilde{\mathcal{C}}$, indem man Kompakta $[-m, m]$ zum Ausschöpfen von $(-\infty, \infty)$ bzw. Kompakta $[2^{-m}, m]$ zum Ausschöpfen von $(0, \infty)$ benutzt, jeweils anstelle der in 13.12" in die Definition der Metrik, den Nachweis von Vollständigkeit und Separabilität, sowie den Nachweis von $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{C}}) = \tilde{\mathcal{C}}$ eingehenden $[0, m]$, $m \in \mathbb{N}$. \square

13.22 Satz (LIL in ∞): Für die eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung $X = (X_t)_{t \geq 0}$ gilt P -fast sicher

$$\text{i) } \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1,$$

$$\text{ii) } \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = -1.$$

Beweis: Man betrachtet die Standard-Brownsche Bewegung $\tilde{X} = (\tilde{X}_s)_{s \geq 0}$, die aus X durch Zeitumkehr nach 13.21 entsteht. Satz 13.20 (LIL in 0) liefert obere und untere Einhüllende für den Pfad von \tilde{X} für $s \downarrow 0$. Schreibt man

$$\frac{\tilde{X}_s}{\sqrt{2s \log \log(\frac{1}{s})}} = \frac{sX_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2s \log \log(\frac{1}{s})}} = \frac{X_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2\frac{1}{s} \log \log(\frac{1}{s})}}$$

und setzt $t := \frac{1}{s}$, werden daraus Einhüllende für den Pfad von X für $t \rightarrow \infty$. \square

Mit dem Gesetz vom iterierten Logarithmus in 0 und ∞ hat man reichhaltige Information zum Verhalten des Brownschen Pfades in Dimension $d = 1$ sowohl für $t \downarrow 0$ als auch für $t \uparrow \infty$. Offenkundig gilt folgende *Rekurrenzeigenschaft*:

13.23 Bemerkung: Für die eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung gilt:

Ist $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Menge von positivem Lebesgue-Mass, so wird der Brownsche Pfad P -fast sicher auch noch in 'beliebig späten' Zeitintervallen $[N, \infty)$, $N \in \mathbb{N}$ gross, die Menge B besuchen. In der Tat: notwendig enthält B einen Punkt $y \in B$, und das Niveau y wird für $t \rightarrow \infty$ gemäss 13.22 beim Wechseln des Brownschen Pfades von der oberen zur unteren Einhüllenden und umgekehrt notwendig unendlich oft durchquert.

Kombiniert man dies mit der starken Markoveigenschaft 13.19', so kann man den Pfad in *iid-Zyklen* zerlegen, die zwischen Zeiten $(T_n)_n$ der Bauart

$$(*) \quad T_0 \equiv 0, \quad S_n := \inf\{t > T_{n-1} : X_t > 1\}, \quad T_n := \inf\{t > S_n : X_t < 0\}, \quad n \geq 1$$

entstehen. Wegen der Stetigkeit aller Pfade gilt $X_{T_n} \equiv 0$ für jedes n . Zwischenzeiten wie $(S_n)_n$ braucht man, weil sich nach 13.19' und 13.20 P -fast sicher rechts von jedem T_n aus $(*)$ ein Cluster von Nullstellen des Brownschen Pfades bilden wird ($c := 1$ ist willkürlich festgesetzt, jede andere Schwelle $c \in (0, \infty)$ leistet in $(*)$ dasselbe). Mit 13.19' und 3.19 und Symmetrie der Brownschen Bewegung gilt P -fast sicher

$$0 \equiv T_0 < T_1 < T_2 < \dots \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty \quad ; \quad T_n < \infty \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}_0 .$$

Die iid-Zyklen erhält man nun wegen $X_{T_n} \equiv 0$, wegen der starken Markov-Eigenschaft 13.19' und wegen $T_{n+1} = T_1 \circ \Theta_{T_n}$ (dabei bezeichnet Θ_{T_n} den Shift um T_n) aus dem Prozess nach T_n

$$Y^{(n)} := (X_{T_n+v})_{v \geq 0} = (X_{T_n+v} - X_{T_n})_{v \geq 0}$$

eingefroren in 0 zu *seiner* ersten Returnzeit $T_1^{(n)}$ (definiert gemäss $(*)$ mit $Y^{(n)}$ anstelle von X):

$$(**) \quad (Y^{(n)})_{T_1^{(n)}} = (Y_v^{(n)} \mathbf{1}_{\{v \leq T_1^{(n)}\}})_{v \geq 0} = (X \mathbf{1}_{[T_n, T_{n+1}]}) \circ \Theta_{T_n} = (X_{(T_n+v) \wedge T_{n+1}})_{v \geq 0}, \quad n \geq 1 .$$

Beachte dabei: alle $Y^{(n)}$ sind wieder Standard-Brownsche Bewegungen, und die zwischen T_n und T_{n+1} ablaufenden Zyklen sind iid Repliken von $X_{\cdot \wedge T_1}$. Man hat zwar P -fast sicher endliche Zyklenlänge, aber der Erwartungswert $E(T_{n+1} - T_n)$ ist nach 3.19 nicht-endlich. Dieses Phänomen nennt man *Nullrekurrenz*. □

Kombiniert mit der starken Markoveigenschaft 13.19' liefert der Satz vom iterierten Logarithmus eine durchaus überraschende Beschreibung der Nullstellenmenge des typischen Pfades der eindimensionalen Standard-Brownschen Bewegung.

13.24 Satz: Für P -fast alle $\omega \in \Omega$ ist die Nullstellenmenge des Brownschen Pfades

$$N(\omega) := \{t \geq 0 : X_t(\omega) = 0\} \in \mathcal{B}([0, \infty))$$

abgeschlossen ohne isolierte Punkte (d.h. eine vollkommene Menge), und hat Lebesgue-Mass 0.

Bemerkung: Insbesondere besitzt $N(\omega)$ P -fast sicher keine inneren Punkte. Vollkommene Mengen sind überabzählbar (siehe Rudin 1998, S. 47 oder Hewitt-Stromberg 1965 S. 70–72). Ein aus der Analysis bekanntes Beispiel einer vollkommenen Menge vom Lebesgue-Mass 0 ist die Cantormenge.

Beweis: Betrachte eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung $X = (X_t)_{t \geq 0}$, definiert auf (Ω, \mathcal{A}, P) . Schreibe $X(t, \omega)$ anstelle von $X_t(\omega)$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$.

1) Jeder Pfad $X(\cdot, \omega)$, $\omega \in \Omega$ fest, ist eine stetige Funktion $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Folglich hat man auf $[0, \infty) \times \Omega$ punktweise Konvergenz für $n \rightarrow \infty$ der Abbildungen

$$(+) \quad (t, \omega) \rightarrow \sum_{k=1}^{n2^n} 1_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})}(t) X\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right)$$

gegen $(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$. Jede dieser Abbildungen ist messbar $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$, also ist

$$(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega) \text{ messbar von } \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{A} \text{ nach } \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Damit gilt

$$\mathbb{H} := \{(t, \omega) : X(t, \omega) = 0\} \in \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{A}$$

und folglich sind die Schnitte durch \mathbb{H} messbar:

$$N(\omega) = \mathbb{H}_\omega = \{t \in [0, \infty) : X_t(\omega) = 0\} \in \mathcal{B}([0, \infty)) \quad , \quad \mathbb{H}_t = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = 0\} \in \mathcal{A}.$$

Da jeder Pfad $X(\cdot, \omega)$ stetig ist, ist $N(\omega)$ notwendig abgeschlossen. Für das Produktmass $\lambda \otimes P$ auf $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{A}$ (λ ist das Lebesgue-Mass eingeschränkt auf $[0, \infty)$) zeigt Fubini

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^m dt \mathcal{N}(0, t)(\{0\}) = \int_0^m dt P(\mathbb{H}_t) \\ &= (\lambda \otimes P)(\mathbb{H} \cap ([0, m] \times \Omega)) \\ &= \int_\Omega P(d\omega) \lambda(\mathbb{H}_\omega \cap [0, m]) = \int_\Omega P(d\omega) \lambda(N(\omega) \cap [0, m]) \end{aligned}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$. Also ist $N(\omega)$ für P -fast alle $\omega \in \Omega$ eine \mathbb{N} -Nullmenge in $\mathcal{B}([0, \infty))$.

2) Für jedes rationale $q > 0$ definiere

$$\tau_q := \inf\{t > q : X_t = 0\}$$

(dies ist eine Stopzeit im Sinne von Teilkapitel D und 13.32+13.35 unten, und nach 13.22 gilt $\tau_q < \infty$ P -fast sicher) und zeige:

$$(\diamond) \quad \begin{cases} \text{es existiert ein Ereignis } \Omega_0 \in \mathcal{A} \text{ mit } P(\Omega_0) = 1 \text{ so dass gilt} \\ \omega \in \Omega_0 \implies 0 \text{ und } \tau_q(\omega), q \in \mathcal{Q}^+, \text{ sind Häufungspunkte von } N(\omega). \end{cases}$$

Dies sieht man so: i) Wegen $X_0 = 0$ P -fast sicher gilt $0 \in N(\omega)$ für P -fast alle $\omega \in \Omega$; der Satz vom iterierten Logarithmus 13.20 zeigt: für P -fast alle $\omega \in \Omega$ ist 0 *kein* isolierter Punkt von $N(\omega)$.

ii) Sei $q > 0$ fest. Mit der starken Markoveigenschaft 13.19' ist der Prozess nach τ_q

$$(X_{\tau_q+t})_{t \geq 0} = (X_{\tau_q+t} - X_{\tau_q})_{t \geq 0}$$

wieder eine Standard-Brownsche Bewegung, also gilt mit 13.20 auch

$$\tau_q(\omega) \text{ ist kein isolierter Punkt von } N(\omega), \text{ für } P\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

iii) Für rationale $q > 0$ lassen sich alle Ausnahmemengen in i) und ii) zu einer einzigen P -Nullmenge in \mathcal{A} zusammenfassen. Damit ist die Behauptung (\diamond) bewiesen.

3) Sei jetzt $\omega \in \Omega_0$ fest, sei $t \in N(\omega)$ fest, sei $t > 0$. Wähle eine rationale Folge $q_n \uparrow t$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: entweder gilt

$$t = \tau_{q_n}(\omega) \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N} \quad \stackrel{(\diamond)}{\implies} \quad t \text{ ist kein isolierter Punkt von } N(\omega),$$

oder es gilt

$$(\times) \quad t \neq \tau_{q_n}(\omega) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $t \in N(\omega)$, wegen Definition der Stopzeit τ_{q_n} und wegen $q_n \uparrow t$ muss es im Fall (\times) für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $s_n \in [q_n, t)$ mit $X_{s_n}(\omega) = 0$ geben. Damit erhält man

$$\text{im Fall } (\times) \text{ gibt es eine Folge } (s_n)_n \subset N(\omega) \text{ mit } s_n \uparrow t.$$

Wieder ist t ein Häufungspunkt von $N(\omega)$. Zusammen mit (\diamond) ist nachgewiesen, dass für $\omega \in \Omega_0$ *jeder* Punkt der Menge $N(\omega)$ ein Häufungspunkt von $N(\omega)$ ist. Damit ist $N(\omega)$ vollkommen. \square

Exzellente Referenzen zur Brownschen Bewegung, ihren Eigenschaften und vielen mit ihr zusammenhängenden Prozessen sind die Bücher Revuz und Yor (1991) und Schilling und Partsch (2014).

*D. Markoveigenschaften in stetiger Zeit

In einem kurzen Abschnitt ohne Anspruch auf Vollständigkeit diskutieren wir die 'starke Markoveigenschaft' zeitstetiger Prozesse. Einziges Ziel ist es, die in Teilkapitel C) intuitiv präsentierten Argumente mit präzisen Definition zu unterlegen und rigoros zu machen. Wir beginnen mit der Definition von Stopzeiten T und mit dem Begriff der Vergangenheit bis zur Zeit T im zeitstetigen Fall; für diskrete Zeit waren diese in Kapitel 11.B eingeführt worden. Wir schreiben in Analogie zu 11.9

$$\bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t := \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\right)$$

für zeitstetig indizierte Filtrationen $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

13.25 Definition: Sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum. Eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{r > t} \mathcal{F}_r \quad \text{für jedes } t \in [0, \infty)$$

heisst *rechtsstetig*.

13.26 Hilfssatz: Betrachte (Ω, \mathcal{A}) versehen mit einer *rechtsstetigen* Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

a) Für jede Abbildung $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig:

- i) für jedes $0 \leq t < \infty$ gilt $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$;
- ii) für jedes $0 < t < \infty$ gilt $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

b) Für jede Abbildung $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ und jedes Ereignis in $A \in \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ sind gleichwertig:

- i) für jedes $0 \leq t < \infty$ gilt $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$;
- ii) für jedes $0 < t < \infty$ gilt $A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Beweis: Sei $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ eine Abbildung. Setzt man die Eigenschaft a)i) voraus, so schreibt man für festes $t > 0$ mit geeignetem $m \in \mathbb{N}$

$$\{T < t\} = \bigcup_{n \geq m} \underbrace{\left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\}}_{\in \mathcal{F}_{t - \frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$$

und erhält a)ii). Setzt man a)ii) voraus, so gilt für festes $t \geq 0$

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n \geq m} \left\{ T < t + \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}_{t + \frac{1}{m}}$$

bei beliebig grossem $m \in \mathbb{N}$, also wegen der vorausgesetzten Rechtsstetigkeit der Filtration \mathbb{F}

$$\{T \leq t\} \in \bigcap_m \mathcal{F}_{t + \frac{1}{m}} = \bigcap_{r > t} \mathcal{F}_r = \mathcal{F}_t.$$

Dies ist a)i). Den Beweis von b) führt man mit analogen Argumenten. □

13.26' Bemerkung: Gilt $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für jedes $0 \leq t < \infty$, so ist das System

$$\left\{ A \in \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in [0, \infty) \right\}$$

eine σ -Algebra. Der Beweis geht analog zum zeitdiskreten Fall genau wie in Bemerkung 11.10 b).

13.27 Definition: Auf (Ω, \mathcal{A}) versehen mit einer *rechtsstetigen* Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$:

a) Eine \mathbb{F} -Stopzeit ist eine Abbildung $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ mit den Eigenschaften i) oder ii) aus 13.26 a).

b) Für eine \mathbb{F} -Stopzeit T definiere die *Vergangenheit bis zur Zeit T* als die σ -Algebra aller Ereignisse $A \in \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ mit den Eigenschaften i) oder ii) aus 13.26 b):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T &:= \left\{ A \in \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in [0, \infty) \right\} \\ &= \left\{ A \in \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t : A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in (0, \infty) \right\}. \end{aligned}$$

Wir betonen: die in 13.27 gegebene Definition der Vergangenheit bis zur Zeit T beruht wesentlich auf der Rechtsstetigkeit der Filtration \mathbb{F} : ohne diese würde die zweite Formelzeile in 13.27 b) ein anderes System beschreiben als die erste, und 13.26 a)i) eine andere Klasse von Abbildungen $T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ als 13.26 a)ii) (siehe dazu Dellacherie und Meyer, Band I 1975, Kapitel IV, IV.3.49 und IV.3.52). Nur unter der Voraussetzung der Rechtsstetigkeit sind die beiden hier gegebenen Darstellungen äquivalent. Das folgende Beispiel zeigt, wo die Schwierigkeit liegt:

13.28 Beispiel: Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess auf (Ω, \mathcal{A}, P) . Wir setzen voraus, dass die Pfade von X sämtlich rechtsstetig oder sämtlich linksstetig sind.

a) Betrachte zwei Filtrationen $\mathbb{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ in \mathcal{A} , definiert durch

$$\mathcal{F}_t^0 := \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t), \quad \mathcal{F}_t := \bigcap_{r > t} \mathcal{F}_r^0 = \bigcap_{r > t} \sigma(X_s : 0 \leq s \leq r), \quad t \geq 0.$$

\mathcal{F}_0 ist die Geschichte von X gemäss 11.3', und \mathcal{F} ist die kleinste rechtsstetige Filtration, an die der Prozess X adaptiert ist. Man nennt \mathcal{F} die *von X erzeugte rechtsstetige Filtration*.

b) Für jedes $a > 0$ ist die *level crossing Zeit*

$$T_a := \inf\{t > 0 : X_t > a\} \quad (\text{mit Konvention } \inf \emptyset = \infty)$$

eine \mathcal{F} -Stopzeit, jedoch nicht notwendig eine \mathcal{F}^0 -Stopzeit. Dies sieht man so. Für jedes $t \geq 0$ gilt

$$(+)$$

$$\omega \in \{T_a \leq t\} \iff \sup_{0 \leq s \leq t + \frac{1}{m}} X_s(\omega) > a \quad \text{für beliebig grosse } m \in \mathbb{N}$$

(wegen der vorausgesetzten Rechts- bzw. Linksstetigkeit aller Pfade von X ist das 'sup ...' auf der rechten Seite in (+) als Supremum über abzählbar viele rationale s eine wohldefinierte Zufallsvariable).

Wegen (+) und Rechtsstetigkeit von \mathcal{F} gehört das Ereignis $\{T_a \leq t\}$ zur σ -Algebra $\bigcap_m \mathcal{F}_{t + \frac{1}{m}}^0 = \mathcal{F}_t$, für jedes $t \geq 0$: damit ist T_a eine \mathcal{F} -Stopzeit. Ohne den Blick 'infinitesimal über t hinaus' kann jedoch für Prozesse mit stetigen Pfaden i.a. nicht entschieden werden, ob ein $\omega \in \Omega$ mit den Eigenschaften

$$X_s(\omega) < a \quad \text{für } 0 \leq s < t, \quad X_t(\omega) = a$$

dem Ereignis $\{T_a \leq t\}$ zuzuordnen ist oder nicht. Daher ist T_a i.a. keine \mathcal{F}^0 -Stopzeit. □

13.29 Satz: Auf (Ω, \mathcal{A}) versehen mit einer *rechtsstetigen* Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ betrachte \mathcal{F} -Stopzeiten T, T_1, T_2, \dots Dann gilt:

a) Jede \mathcal{F} -Stopzeit T ist eine \mathcal{F}_T -messbare Abbildung von Ω nach $[0, \infty]$.

b) Aus $T_1 \leq T_2$ folgt $\mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$.

c) $T_1 \wedge T_2, T_1 \vee T_2, \inf_{m \geq 1} T_m, \sup_{m \geq 1} T_m$ sind \mathcal{F} -Stopzeiten.

d) Für jede fallende Folge $T_n \downarrow T$ von \mathcal{F} -Stopzeiten gilt $\mathcal{F}_T = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$.

Beweis: Die Aussagen a)+b) beweist man analog zu 11.12 a)+b). Wir betrachten $\inf_{m \geq 1} T_m$ und $\sup_{m \geq 1} T_m$ in c). Genau dann ist $\{T_m \leq t\}$ in \mathcal{F}_t enthalten, wenn das Komplement $\{T_m > t\}$ in \mathcal{F}_t enthalten ist. Man hat

$$T := \sup_m T_m : \{T > t\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{T_m > t\}$$

für alle $t \geq 0$, also ist $\sup_m T_m$ eine \mathcal{F} -Stopzeit. Auch hat man

$$T := \inf_m T_m : \{T < t\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{T_m < t\}$$

für alle $t > 0$, also ist $\inf_m T_m$ eine \mathbb{F} -Stopzeit (die letzte Aussage wäre ohne die Voraussetzung der Rechtstetigkeit von \mathbb{F} nicht mehr richtig). Wir beweisen d). Die Inklusion ' \subset ' folgt sofort aus b). Zum Beweis der umgekehrten Inklusion ' \supset ' betrachte ein Ereignis $A \in \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$. Aus $T_n \downarrow T$ folgt

$$A \cap \{T < t\} = A \cap \left(\bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \{T_n < t\} \right) = \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} (A \cap \{T_n < t\}) \in \mathcal{F}_t$$

für jedes $t > 0$. Nach 13.27 gehört A damit zur σ -Algebra \mathcal{F}_T der Vergangenheit bis zur Zeit T (auch dieser Schluss nutzt die Rechtstetigkeit von \mathbb{F} aus). \square

Als nächstes definieren wir im zeitstetigen Setting (vgl. 11.13 für diskrete Zeit) den Zustand eines Prozesses X zu einer zufälligen Zeit T .

13.30 Satz: Betrachte auf (Ω, \mathcal{A}) eine rechtsstetige Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein \mathbb{F} -adaptierter (siehe 11.3) reellwertiger stochastischer Prozess mit rechtsstetigen Pfaden. Für jede \mathbb{F} -Stopzeit T ist der *Zustand von X zur Zeit T* , definiert durch

$$X_T(\omega) := 1_{\{T < \infty\}}(\omega) X(T(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega$$

mit Schreibweise $X(t, \omega)$ für $X_t(\omega)$, eine \mathcal{F}_T -messbare Zufallsvariable $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkung: Beachte wieder: die hier gegebene Definition impliziert

$$X_T := 0 \quad \text{auf} \quad \{T = \infty\}$$

und bezieht sich explizit auf einen Prozess, dessen Indexmenge den Punkt $+\infty$ nicht enthält.

Beweis: 1) Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ rechtsstetig, sei T eine \mathbb{F} -Stopzeit. Definiere zu T eine Folge

$$T_n := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{2^n} 1_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\}} + \infty 1_{\{T = \infty\}}, \quad n \geq 1.$$

Wegen $\{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$ sind die T_n \mathbb{F} -Stopzeiten, $n \in \mathbb{N}$, und nach Konstruktion gilt

$$T < T_n \quad \text{auf} \quad \{T < \infty\}, \quad n \geq 1, \quad \{T_n = \infty\} = \{T = \infty\}, \quad n \geq 1, \quad T_n \downarrow T, \quad n \rightarrow \infty.$$

2) Fixiere $n \in \mathbb{N}$. Da T_n eine \mathbb{F} -Stopzeit ist, die nur abzählbar viele Werte im Gitter $\frac{1}{2^n} \overline{\mathbb{N}}_0$ annimmt, gelten die folgenden Aussagen i)–iii):

i) T_n ist eine Stopzeit bezüglich der diskreten Filtration $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k \in \mathbb{N}_0}$ im Sinne der Definition 11.9. Offenkundig hat man insbesondere $\{T_n \leq \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

ii) Der Begriff der 'Vergangenheit bis zur Zeit T_n ' bleibt derselbe, ob er nun 'diskret' bezüglich $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k \in \mathbb{N}_0}$ nach Definition 11.9 b) oder 'zeitstetig' bezüglich $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ im Sinne von 13.27 verstanden wird. Nach Definition in 13.27 b) ist die Vergangenheit bis zur Zeit T_n bezüglich der zeitstetigen Filtration \mathbb{F} die σ -Algebra

$$\mathcal{F}_{T_n} = \left\{ A \in \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t : A \cap \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für jedes } t \geq 0 \right\};$$

diese stimmt aber überein mit

$$\left\{ A \in \bigvee_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} : A \cap \{T_n \leq \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

d.h. mit der σ -Algebra, die in 11.9 als Vergangenheit bis zur Zeit T_n bezüglich der zeitdiskreten Filtration $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k \in \mathbb{N}_0}$ eingeführt worden war.

iii) Für den Zustand des Prozesses X zur Zeit T_n stimmt die in der Formulierung des zu beweisenden Satzes gegebene Definition überein mit der 'zeitdiskreten' Definition aus 11.13. Nach Voraussetzung ist X adaptiert an \mathbb{F} , damit ist insbesondere der Prozess in diskreter Zeit $(X_{\frac{k}{2^n}})_{k \in \mathbb{N}_0}$ adaptiert an $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k \in \mathbb{N}_0}$. Die Stopzeit T_n nimmt alle ihre Werte im Gitter $\frac{1}{2^n} \overline{\mathbb{N}_0}$ an. Satz 11.13 definiert den Zustand von $(X_{\frac{k}{2^n}})_{k \in \mathbb{N}_0}$ zur Zeit T_n als \mathcal{F}_{T_n} -messbare Zufallsvariable

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) 1_{\{T_n = \frac{k}{2^n}\}}(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

die auf $\{T_n = \infty\}$ den Wert 0 annimmt. Dies kann geschrieben werden als

$$1_{\{T_n < \infty\}}(\omega) X(T_n(\omega), \omega) = X_{T_n}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) 1_{\{T_n = \frac{k}{2^n}\}}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

wie in der Formulierung des zu beweisenden Satzes. Dabei gilt $\{T_n = \infty\} = \{T = \infty\}$ für jedes n .

3) Da die Folge $(T_n)_n$ gegen T absteigt und da alle Pfade von X rechtstetig sind, hat man

$$X_T = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} \text{ ist messbar bezüglich } \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}.$$

Wegen der Rechtsstetigkeit von \mathbb{F} gilt aber $\bigcap_n \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_T$ nach 13.29 d). Also ist X_T eine \mathcal{F}_T -messbare Zufallsvariable. □

13.30' Übungsaufgabe: Sei X eine eindimensionale Brownsche Bewegung, \mathbb{F} die rechtstetige Geschichte von X , sei A offen in \mathbb{R} .

a) $T_A := \inf\{t > 0 : X_t \in A\}$ (mit Konvention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$) ist eine P -fast sicher endliche \mathbb{F} -Stopzeit.

b) Ist S eine \mathbb{F} -Stopzeit, so auch $\tilde{T}_A := \inf\{t > S : X_t \in A\}$; aus $P(S < \infty) = 1$ folgt $P(\tilde{T}_A < \infty) = 1$.

c) Für festes $\delta > 0$ ist $\tilde{T} := \inf\{t > \delta : X_t = 0\}$ eine \mathbb{F} -Stopzeit mit $P(\tilde{T} < \infty) = 1$.

(Hinweis: c) leite man her aus b). Zum Nachweis von b) definiere man zuerst Stopzeiten S_n mit abzählbar vielen Werten, die gegen S absteigen, und betrachte $T_n = \inf\{t > S_n : X_t \in A\}$. \square

13.31 Hilfssatz: Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ eine d -dimensionale Standard-Brownsche Bewegung auf (Ω, \mathcal{A}, P) , sei \mathbb{F}^0 die Geschichte von X nach 11.3', sei \mathbb{F} die von X erzeugte rechtsstetige Filtration

$$\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \quad , \quad \mathcal{F}_t := \bigcap_{r > t} \mathcal{F}_r^0 \quad , \quad \mathcal{F}_r^0 = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq r) .$$

Die Markovhalbgruppe $(K_r)_{r \geq 0}$ bezüglich \mathbb{F}^0 war in 12.9" und (12.11) berechnet worden:

$$\begin{cases} E(1_A(X_t) | \mathcal{F}_s^0) = K_{t-s}(X_s, A) \quad , \quad 0 \leq s < t < \infty \quad , \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \\ K_r(y, A) = \mathcal{N}(y, rI_d)(A) \quad , \quad y \in \mathbb{R}^d \quad , \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad , \quad r \geq 0 \end{cases}$$

Dann ist X auch Markov bezüglich \mathbb{F} , und die Markov-Halbgruppe bleibt dieselbe:

$$E(1_A(X_t) | \mathcal{F}_s) = K_{t-s}(X_s, A) \quad \text{mit } (K_r)_{r \geq 0} \text{ wie oben .}$$

Beweis: 1) Für beschränkte messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir kurz

$$(K_r f)(y) := \int f(x) K_r(y, dx) .$$

Bezeichne \mathcal{C}_b die Klasse der stetigen beschränkten Funktionen auf \mathbb{R}^d wie in Kapitel VI. Für $f \in \mathcal{C}_b$ und für konvergente Folgen $r_n \downarrow r$ in $[0, \infty)$ sowie $y_n \rightarrow y$ in \mathbb{R}^d gilt

$$(\diamond) \quad (K_{r_n} f)(y_n) = \int f(x) \mathcal{N}(y_n, r_n I_d)(dx) \longrightarrow \int f(x) \mathcal{N}(y, r I_d)(dx) = (K_r f)(y) :$$

dies erhält man explizit aus der Gestalt der Normaldichten, die als 'Glättungskerne' mit Zentrum $y_n \rightarrow y$ und Breite proportional zu $\sqrt{r_n} \downarrow \sqrt{r}$ über die Funktion $f \in \mathcal{C}_b$ gezogen werden. Im Fall $r = 0$ gilt die Konvention $K_0(y, \cdot) = \epsilon_y$.

2) Betrachte zuerst die Geschichte von X wie in 11.3' definiert:

$$\mathbb{F}^0 := (\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0} \quad , \quad \mathcal{F}_t^0 := \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t) .$$

Die Markoveigenschaft bezüglich \mathbb{F}^0 war als direkte Folgerung aus der Unabhängigkeit der Zuwächse von X in (12.11) in der Form

$$E(1_F 1_A(X_t)) = E(1_F E(1_A(X_t) | \mathcal{F}_s^0)) = E(1_F K_{t-s}(X_s, A)) \quad \text{für } s < t \quad , \quad F \in \mathcal{F}_s^0 \quad , \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

bewiesen worden; per Aufbau messbarer Funktionen schreibt man dies um in

$$(+) \quad E(1_F f(X_t)) = E(1_F (K_{t-s}f)(X_s)) \quad \text{für } s < t, F \in \mathcal{F}_s^0, f \in \mathcal{C}_b.$$

3) Wir zeigen: aus der Markoveigenschaft bezüglich \mathbb{F}_0 kombiniert mit (\diamond) und der Rechtsstetigkeit der Pfade von X erhält man die Markov-Eigenschaft von X bezüglich der rechtsstetigen Filtration \mathbb{F} . Sei $s < t$ und $F \in \mathcal{F}_s$. Für jede streng monoton fallende Folge $s_n \downarrow s$ gilt dann $F \in \mathcal{F}_{s_n}^0$ für alle n , folglich wegen $(+)$ aus Schritt 2)

$$E(1_F f(X_t)) = E(1_F E(f(X_t)|\mathcal{F}_{s_n}^0)) = E(1_F \cdot (K_{t-s_n}f)(X_{s_n})) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}_b$$

für alle hinreichend grossen n . Wegen (\diamond) und wegen Rechtsstetigkeit der Pfade $X_t(\omega)$ konvergieren die Integranden auf der rechten Seite für $s_n \downarrow s$ punktweise für jedes feste $\omega \in \Omega$. Beschränktheit der Funktionen $f \in \mathcal{C}_b$ impliziert dominierte Konvergenz und damit

$$E(1_F (K_{t-s_n}f)(X_{s_n})) \longrightarrow E(1_F (K_{t-s}f)(X_s))$$

für $n \rightarrow \infty$. Beides zusammen bedeutet

$$(++) \quad E(1_F f(X_t)) = E(1_F (K_{t-s}f)(X_s)) \quad \text{für } s < t, F \in \mathcal{F}_s, f \in \mathcal{C}_b.$$

oder

$$E(1_F 1_A(X_t)) = E(1_F K_{t-s}(X_s, A)) \quad \text{für } s < t, F \in \mathcal{F}_s, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

(monotone Konvergenz wie im Beweis von 6.1 b) zeigt, dass die Funktionen $f \in \mathcal{C}_b$ in $(++)$ ersetzt werden dürfen durch Indikatorfunktionen 1_B für abgeschlossene Mengen $B \subset \mathbb{R}^d$; ein Dynkingschluss verallgemeinert dies von der Klasse aller abgeschlossenen Mengen auf die Klasse aller messbaren Mengen $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Damit liefert $(++)$ die Markoveigenschaft von X bezüglich der rechtsstetigen Filtration \mathbb{F} . \square

Die bisher betrachtete Markoveigenschaft besagte: gegeben eine Filtration \mathbb{F} und damit ein Begriff von 'Informationsstand \mathcal{F}_t zur Zeit t ', hängt die weitere Entwicklung des Prozesses gegeben \mathcal{F}_t nur vom gegenwärtigen Zustand des Prozesses zur Zeit t ab. Falls man eine Aussage dieses Typs für die Klasse der \mathbb{F} -Stopzeiten T anstelle der deterministischen Zeiten t beweisen kann, so spricht man von einer starken Markoveigenschaft bezüglich \mathbb{F} . Mit den eben benutzten Argumenten kommt man zu einem sehr allgemeinen Resultat.

13.32 Hauptsatz (starke Markoveigenschaft): Auf beliebigem (Ω, \mathcal{A}, P) sei ein Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ Markov bezüglich einer Filtration $\mathbb{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$, mit Werten in einem polnischen Raum (E, \mathcal{E}) , und mit rechtsstetigen Pfaden. Die Halbgruppe $(K_t)_{t \geq 0}$ von X bezüglich \mathbb{F}^0 besitze die Eigenschaft

$$(13.33) \quad \text{für jedes } f \in \mathcal{C}_b(E) \text{ ist } (t, y) \longrightarrow (K_t f)(y) \text{ stetig auf } [0, \infty) \times E .$$

Betrachte nun die von X erzeugte rechtsstetige Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Dann ist X Markov bezüglich \mathbb{F} mit derselben Halbgruppe

$$E(1_A(X_t) \mid \mathcal{F}_s) = K_{t-s}(X_s, A) \quad \text{für alle } s < t, A \in \mathcal{E} ,$$

und besitzt sogar die *starke Markoveigenschaft bezüglich \mathbb{F}* :

$$(13.34) \quad \begin{cases} \text{für alle } \mathbb{F}\text{-Stopzeiten } T \text{ mit } P(T < \infty) = 1 : \\ E(1_A(X_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T) = K_t(X_T, A) \quad \text{für } t \geq 0, A \in \mathcal{E} . \end{cases}$$

13.34' Bemerkung: Analog zu 13.30 überlegt man sich im Falle eines polnischen Raumes (E, \mathcal{E}) und einer rechtsstetigen Filtration \mathbb{F} :

i) für einen \mathbb{F} -adaptierten Prozess X mit Werten in (E, \mathcal{E}) , dessen Pfade rechtsstetige Funktionen $[0, \infty) \rightarrow E$ sind, kann der Zustand von X zu einer P -fast sicher endlichen \mathbb{F} -Stopzeit T durch

$$X_T(\omega) := 1_{\{T(\omega) < \infty\}} X(T(\omega), \omega) + x_0 1_{\{T(\omega) = \infty\}}$$

mit beliebigem $x_0 \in E$ (als default value auf der P -Nullmenge $\{T = \infty\} \in \mathcal{F}_T$) definiert werden;

ii) $X_T : \Omega \rightarrow E$ wie in i) festgelegt ist eine \mathcal{F}_T -messbare Zufallsvariable.

Beweis von Satz 13.32: 1) Die Markoveigenschaft von X bezüglich \mathbb{F} mit derselben Halbgruppe folgt mit einer nahezu wörtlichen Übertragung der Argumente des Beweises von 13.31. Hier wird die Voraussetzung (13.33) ausgenutzt.

2) Wir zeigen, dass bezüglich der rechtsstetigen Filtration \mathbb{F} schon die Stetigkeitsbedingung

$$(*) \quad \text{für jedes } f \in \mathcal{C}_b(E) \text{ und jedes } t \geq 0 \text{ ist } y \longrightarrow (K_t f)(y) \text{ stetig auf } E$$

die starke Markoveigenschaft garantiert; (*) ist insbesondere durch (13.33) sichergestellt.

Sei T eine \mathbb{F} -Stopzeit mit $P(T < \infty) = 1$, sei $F \in \mathcal{F}_T$, sei $f \in \mathcal{C}_b(E)$. Mit F ist auch $\tilde{F} := F \cap \{T < \infty\}$ in \mathcal{F}_T , nach 13.29 a). Nach Voraussetzung über T ist $F \setminus \tilde{F}$ eine P -Nullmenge.

Betrachte die fallende Folge von \mathbb{F} -Stopzeiten $T_n \downarrow T$ aus dem Beweis von 13.30:

$$T_n := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{2^n} 1_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\}} + \infty 1_{\{T=\infty\}}, \quad n \geq 1.$$

Für deterministisches $t > 0$ sind mit T, T_n auch $T+t, T_n+t$ \mathbb{F} -Stopzeiten (nach Definition in 13.27), und die Rechtsstetigkeit aller Pfade $X_*(\omega)$ impliziert wegen dominierter Konvergenz

$$(+) \quad E(1_F f(X_{T+t})) = E(1_{\tilde{F}} f(X_{T+t})) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(1_{\tilde{F}} f(X_{T_n+t})).$$

Für jedes feste n gilt aber nach Definition von \tilde{F} und T_n

$$(\times) \quad E(1_{\tilde{F}} f(X_{T_n+t})) = \sum_{k \in \mathbb{N}} E(1_{\tilde{F} \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}} f(X_{T_n+t})) = \sum_{k \in \mathbb{N}} E(1_{\tilde{F} \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}} f(X_{\frac{k}{2^n}+t})).$$

Wegen $\tilde{F} \in \mathcal{F}_{T_n}$ gilt $\tilde{F} \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$. Mit der Markoveigenschaft bezüglich \mathbb{F} kann die rechte Seite der Formelzeile (\times) als

$$(\times \times) \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} E(1_{\tilde{F} \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}} (K_t f)(X_{\frac{k}{2^n}})) = E(1_{\tilde{F}} (K_t f)(X_{T_n}))$$

geschrieben werden. Für $n \rightarrow \infty$ lassen Rechtsstetigkeit aller Pfade von X , die Stetigkeitsbedingung $(*)$ und dominierte Konvergenz die rechte Seite von $(\times \times)$ gegen

$$(++) \quad E(1_{\tilde{F}} (K_t f)(X_T)) = E(1_F (K_t f)(X_T))$$

streben. Damit ist die Übereinstimmung von $(+)$ und $(++)$ für jedes feste $f \in \mathcal{C}_b(E)$ bewiesen, was man wie im Beweis von 13.31 in die Form

$$E(1_F 1_A(X_{T+t})) = E(1_F K_t(X_T, A)), \quad A \in \mathcal{E}, t \geq 0, F \in \mathcal{F}_T$$

zurückschreibt. Das ist die starke Markoveigenschaft bezüglich \mathbb{F} . □

Beachte, dass \mathbb{F}^0 im letzten Satz irgendeine Filtration sein kann, bezüglich der X Markov ist (nicht notwendig speziell die Geschichte von X wie in 11.3'). Beachte auch, dass polnische Räume die natürlichen Zustandsräume für Markovprozesse sind: zum einen können bedingte Wahrscheinlichkeiten auf polnischen Räumen stets regulär festgelegt werden (Korollar 10.28), zum anderen existiert zu jeder Markov-Halbgruppe auf einem polnischen Raum ein Markov-Prozess (Satz 12.9"). Auch liefert Beweisteil 2) des Beweises von 13.32 folgende allgemeinere Aussage: hat X rechtsstetige Pfade, ist X Markov bezüglich einer rechtsstetigen Filtration $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ und erfüllt die Markovhalbgruppe bezüglich \mathcal{G} die Stetigkeitsbedingung $(*)$, so ist X stark Markov bezüglich \mathcal{G} .

13.34" Folgerung: Unter allen Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 13.32 gilt:

a) Aus der starken Markoveigenschaft (12.34) bezüglich \mathbb{F} folgt, dass der *Prozess nach T*

$$X_{T+} := (X_{T+t})_{t \geq 0}$$

Markov bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_{T+t})_{t \geq 0}$ ist, mit derselben Halbgruppe $(K_t(\cdot, \cdot))_{t \geq 0}$ wie zuvor. Dabei ist $(\mathcal{F}_{T+t})_{t \geq 0}$ in Anwendung von 13.29 d) wieder eine rechtsstetige Filtration. $\mathcal{L}(X_T)$ übernimmt die Rolle einer Startverteilung für den Prozess nach T ; die Pfadigenschaften von X_{T+} sind die von X .

b) In Analogie zu (12.13) kann wegen a) die starke Markoveigenschaft in kompakter Form als

$$(13.34''') \quad E(G \circ (X_{T+}) \mid \mathcal{F}_T) = E_{(X_T)}(G \circ X)$$

geschrieben werden, für beliebige beschränkte $\mathcal{E}^{[0, \infty)}$ -messbare Funktionen $G : E^{[0, \infty)} \rightarrow \mathbb{R}$, und für jede P -fast sicher endliche \mathbb{F} -Stopzeit T . Die rechte Seite von (13.34''') ist wie in 12.12 c) als Funktion $y \rightarrow E_y(G \circ X)$ zu lesen, in die der zuletzt erreichte Zustand X_T als Startwert für den Prozess nach T eingesetzt wird. \square

13.35 Folgerung: Unter allen Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 13.32:

a) Ist a ein fester Punkt in E und ist T eine \mathbb{F} -Stopzeit mit der Eigenschaft

$$P(T < \infty, X_T = a) = 1,$$

so ist der Prozess nach T unabhängig von der Vergangenheit \mathcal{F}_T bis zur Zeit T : mit 13.34' gilt

$$\begin{aligned} E(1_F G \circ (X_{T+})) &= E(1_F E(G \circ (X_{T+})) \mid \mathcal{F}_T) \\ &= E(1_F E_a(G \circ X)) = P(F) \cdot E_a(G \circ X) \\ &= P(F) \cdot E(G \circ (X_{T+})) \end{aligned}$$

für alle $F \in \mathcal{F}_T$ und für alle beschränkten $\mathcal{E}^{[0, \infty)}$ -messbaren Funktionen $G : E^{[0, \infty)} \rightarrow \mathbb{R}$.

b) Ist in 13.32 mit $E = \mathbb{R}^d$ insbesondere X ein Prozess mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen nach 12.14' (damit $X_0 = 0$ P -fast sicher), dessen Pfade sämtlich rechtsstetig sind, so ist für *jede* P -fast sicher endliche \mathbb{F} -Stopzeit T der Prozess

$$Y := X_{T+} - X_T = (X_{T+t} - X_T)_{t \geq 0}$$

unabhängig von der Vergangenheit \mathcal{F}_T bis zur Zeit T , mit Start in 0, und ist eine unabhängige Replik des ursprünglichen Prozesses X . Y heisst Prozess der *Zuwächse nach der Zeit T*.

Dies sieht man so: mit $F \in \mathcal{F}_T$, mit den Stopzeiten T_n aus dem letzten Beweis und $\tilde{F} = F \cap \{T < \infty\}$, mit $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_\ell < \infty$ beliebig und $f \in \mathcal{C}_b(E^\ell)$,

$$\begin{aligned} & E \left(1_F f(X_{T+t_1} - X_T, \dots, X_{T+t_\ell} - X_{T+t_{\ell-1}}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(1_{\tilde{F}} f(X_{T_n+t_1} - X_{T_n}, \dots, X_{T_n+t_\ell} - X_{T_n+t_{\ell-1}}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} 1_{\tilde{F} \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}} E \left(f(X_{\frac{k}{2^n}+t_1} - X_{\frac{k}{2^n}}, \dots, X_{\frac{k}{2^n}+t_\ell} - X_{\frac{k}{2^n}+t_{\ell-1}}) \mid \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \right) \right) \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit und zeitlichen Homogenität der Zuwächse von X besitzt die innere bedingte Erwartung aber unabhängig von k und n dieselbe deterministische Festlegung

$$E \left(f(X_{t_1} - X_0, \dots, X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}}) \right)$$

die aus dem Integral herausgezogen werden kann: wie in a) ergibt sich also

$$E \left(1_F f(X_{T+t_1} - X_T, \dots, X_{T+t_\ell} - X_{T+t_{\ell-1}}) \right) = P(F) \cdot E \left(f(X_{t_1} - X_0, \dots, X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}}) \right)$$

für alle $F \in \mathcal{F}_T$, woraus die Behauptung folgt. □

Insbesondere sind mit 13.35 die in Teilkapitel 13 C (z.B. in 13.19', im Beweis von 13.19", im Beweis von 13.24) in intuitiver Weise benutzten Eigenschaften der Brownschen Bewegung bewiesen:

13.36 Folgerung: Ist $X = (X_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung und ist

$$T_a = \inf\{t > 0 : X_t > a\} \quad (\text{mit Konvention } \inf \emptyset = \infty)$$

die level crossing Zeit für das Niveau $a > 0$, so ist der Prozess der Zuwächse nach T_a

$$X_{T_a+} - X_{T_a} = (X_{T_a+t} - a)_{t \geq 0}$$

eine von \mathcal{F}_{T_a} unabhängige Standard-Brownsche Bewegung. □

Wir beenden das Kapitel mit einer Betrachtung des Poissonprozesses und seiner Markoveigenschaften.

13.37 Satz: Betrachte einen reellwertigen stochastischen Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$, definiert auf irgendeinem (Ω, \mathcal{A}, P) , dessen Pfade càdlàg und stückweise konstant sind. Dann ist die Geschichte von X nach 11.3'

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \quad , \quad \mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t) \quad , \quad t \geq 0$$

bereits eine rechtsstetige Filtration.

Beweis: 1) Schreibe \mathcal{I}^F für die Geschichte von X ; zu zeigen ist die Rechtsstetigkeit dieser Filtration.

Definiere $\mathcal{I}^{F^+} := (\mathcal{F}_t^+)_{t \geq 0}$ durch $\mathcal{F}_t^+ := \bigcap_{r>t} \mathcal{F}_r$. Zum Nachweis von $\mathcal{I}^{F^+} = \mathcal{I}^F$ benutzen wir das 'countable dependency theorem' (vgl. Brémaud 1981, S. 265 und S. 304): für jedes $t \geq 0$, jedes $A \in \mathcal{F}_t^+$ und jede Folge $r_n \downarrow t$ gibt es wegen $A \in \mathcal{F}_{r_n} = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq r_n)$ eine höchstens abzählbare Teilmenge $J_n \subset [0, r_n]$ so dass A bereits in $\sigma(X_t : t \in J_n)$ enthalten ist.

Fixiere ab jetzt $A \in \mathcal{F}_t^+$, $(r_n)_n$ und $(J_n)_n$.

2) Ein durchschnittsstabiler Erzeuger für $\mathcal{G}_n := \sigma(X_t : t \in J_n)$ ist

$$\mathcal{C}_n := \left\{ \bigcap_{t \in J_n} \{X_t \in D_t\}, D_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), D_t \neq \mathbb{R} \text{ für höchstens endlich viele } t \in J_n \right\}.$$

Mit Notation

$$B_n := \{X_t = X_{t'} \text{ für alle } t' \in [t, r_n]\}$$

gilt –da alle Pfade von X rechtsstetig und stückweise konstant sind– sicher

$$(\times) \quad \Omega = \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} B_n = \liminf_n B_n.$$

3) Schreibe nun $\tilde{J}_n := (J_n \cap [0, t]) \cup \{t\}$ und betrachte A und B_n wie oben. Es gilt $A \in \mathcal{G}_n$ für alle n . Zu A und jedem n kann man aber ein $\tilde{A}_n \in \sigma(X_t : t \in \tilde{J}_n)$ finden so dass

$$(+)$$

$$A \cap B_n = \tilde{A}_n \cap B_n$$

gilt: dies verifiziert man zuerst direkt aus der Definition von B_n für alle Elemente des Erzeugers \mathcal{C}_n von \mathcal{G}_n , und macht dann einen Dynkinschluss.

4) Aus (+) und (\times) ergibt sich für A und $(B_n)_n$ wie oben eine Darstellung

$$(*) \quad A = A \cap \Omega = \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} (A \cap B_n) = \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} (\tilde{A}_n \cap B_n),$$

von A , aus der man einerseits erhält

$$\begin{aligned} \liminf_n \tilde{A}_n &= (\liminf_n \tilde{A}_n) \cap \Omega = (\liminf_n \tilde{A}_n) \cap (\liminf_n B_n) \\ &\subset \bigcup_m \bigcup_{\ell(m) \geq m} \bigcap_{n \geq \ell(m)} (\tilde{A}_n \cap B_n) \subset \bigcup_{\ell} \bigcap_{n \geq \ell} (\tilde{A}_n \cap B_n) \stackrel{(*)}{=} A, \end{aligned}$$

andererseits aber auch

$$A \stackrel{(*)}{\subset} \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \tilde{A}_n = \liminf_n \tilde{A}_n.$$

Es ergibt sich

$$A = \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \tilde{A}_n \in \mathcal{F}_t$$

da für jedes n das Ereignis \tilde{A}_n in $\sigma(X_t : t \in \tilde{J}_n)$ und damit in \mathcal{F}_t enthalten ist.

5) Schritte 2)–4) zusammen weisen nach, dass $A \in \mathcal{F}_t^+$ schon in \mathcal{F}_t enthalten ist: damit gilt $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$ für jedes $t \geq 0$, also ist die Filtration \mathbb{F} rechtsstetig. \square

13.38 Satz: Der Poissonprozess ist stark Markov bezüglich seiner eigenen Geschichte 11.3'.

Beweis: Die Poisson-Halbgruppe $K_t(k, A) = \mathcal{P}(t\lambda)(A - k)$ (12.14' und 12.19) erfüllt die Bedingung (13.33); die Pfade des Poissonprozesses sind rechtstetig und stückweise konstant (13.14 und 13.15); seine Geschichte ist bereits rechtsstetig (13.37). Also liefert 13.32 die starke Markoveigenschaft. \square

13.39 Satz: Sei X ein Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$, sei \mathbb{F} seine eigene Geschichte 3.3'. Betrachte Treffzeiten $T_n := \inf\{t : N_t = n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- a) T_n ist eine \mathbb{F} -Stopzeit, und $(X_{T_n+t} - n)_{t \geq 0}$ ist ein von \mathcal{F}_{T_n} unabhängiger Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$.
- b) Die Wartezeiten zwischen sukzessiven Sprüngen von X sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ .
- c) Für P -fast alle Pfade von X gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} X_t = \lambda$.

Beweis: 1) Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ definiert auf (Ω, \mathcal{A}, P) , $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$, $t \geq 0$. Nach 13.37 ist \mathbb{F} rechtsstetig. Wegen der in 13.14 definierten Pfadeigenschaften von X gilt

$$(+) \quad \{T_n \leq t\} = \{X_t \geq n\} \in \mathcal{F}_t,$$

also sind die T_n \mathbb{F} -Stopzeiten. Schreibt man in (+) bei festem n für $t \rightarrow \infty$

$$P(T_n \leq t) = P(X_t \geq n) = \mathcal{P}(\lambda t)([n, \infty)),$$

so liefern elementare Eigenschaften von Poissonverteilungen sofort die Aussage $P(T_n < \infty) = 1$.

2) Betrachte $n = 1$: es gilt

$$P(T_1 > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}, \quad \text{für alle } t > 0,$$

folglich ist die Wartezeit T_1 auf den ersten Sprung in X exponentialverteilt mit Parameter λ .

3) Für $n \geq 1$ ist nach der starken Markoveigenschaft $\tilde{X} := (X_{T_n+t} - X_{T_n})_{t \geq 0}$ ein von der Vergangenheit

\mathcal{F}_{T_n} bis zur Zeit T_n unabhängiger Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$. Insbesondere ist die Wartezeit auf den ersten Sprung in \tilde{X} unabhängig von der Vergangenheit bis T_n und exponentialverteilt mit Parameter λ , nach 2). Zusammen bilden also die Zwischen-Sprung-Zeiten

$$T_1, T_2 - T_1, \dots, T_{n+1} - T_n, \dots$$

ein Folge von iid exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter λ .

4) Wegen der P -fast sicheren Endlichkeit aller Zwischen-Sprung-Zeiten wachsen die Pfade von X für $t \rightarrow \infty$ P -fast sicher gegen ∞ . Schritt 3) und das starke Gesetz der grossen Zahlen zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} T_n = E(T_1) = \frac{1}{\lambda} \quad P\text{-fast sicher.}$$

Die Pfade von X sind nichtfallend, und es gilt $X_t(\omega) = n$ für $T_n(\omega) \leq t < T_{n+1}(\omega)$. Also übersetzt man die letzte Aussage sofort in

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} X_t(\omega) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_n(\omega)} = \lambda \quad \text{für } P\text{-fast alle } \omega \in \Omega \\ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} X_t(\omega) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{T_{n+1}(\omega)} = \lambda \quad \text{für } P\text{-fast alle } \omega \in \Omega \end{aligned}$$

Also haben P fast alle Pfade die Eigenschaft $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} X_t(\omega) = \lambda$. Dies schliesst den Beweis ab. \square

Mit Hilfe der starken Markoveigenschaft erhalten wir also die einfachstmögliche Beschreibung des Poissonprozesses mit Parameter $\lambda > 0$: nach Start in 0 zur Zeit 0 folgt man einer exponentiellen Uhr, die jeweils nach Ablauf einer unabhängigen exponentiellen Wartezeit mit Parameter λ schlägt: zu jedem Schlag der Uhr macht der Pfad einen Sprung der Höhe 1.