

# Vorlesung Stochastik I – SoSe19 – Inhaltsverzeichnis

Prof. Dr. R. Höpfner, Institut für Mathematik, Universität Mainz

update October 8, 2019

## Kapitel I: Grundbegriffe

**A.  $\sigma$ -Algebren, Dynkin-Systeme, Masse:**  $\sigma$ -Algebren und ihre Erzeuger - Dynkin-Systeme - Masse - Wahrscheinlichkeitsmasse - Eindeigkeitssatz

**B. Algebren, Inhalte, Prämasse, Konstruktion von Massen:** Algebren - Inhalte - Prämasse - Fortsetzungssatz

**C. Beweis des Fortsetzungssatzes:** äusseres Mass und eindeutige Fortsetzbarkeit  $\sigma$ -endlicher Prämasse

**D. Messbare Abbildungen:** Messbare Abbildungen - Bildmasse - messbare Abbildungen mit Werten in  $\mathbb{R}$  oder  $\overline{\mathbb{R}}$  oder  $\mathbb{R}^d$  - Faktorisierungslemma

## Kapitel II: Integration bezüglich eines Masses

**A. Integrierbarkeit:** messbare numerische Funktionen - Integral einer Elementarfunktion, Integral einer nichtnegativen Funktion - Lemma von Fatou - Satz von der monotonen Konvergenz - integrierbare Funktionen und Raum  $L^1(\mu)$  - Nullmengen - Bemerkungen zu Riemann- und Lebesgue-Integral

**B. Die Räume  $L^p(\mu)$ ,  $\mu$ -fast sichere Konvergenz, Konvergenz in  $L^p(\mu)$ :** die Räume  $L^p(\mu)$  - Jensen-Ungleichung, Hölder-Ungleichung -  $\mu$ -fast sichere Konvergenz - Satz von der dominierten Konvergenz - Vollständigkeit von  $L^p(\mu)$

**C. Endliche Masse  $\mu$ : drei Konvergenzbegriffe:** Beziehungen zwischen fast sicherer, stochastischer,  $L^p$ -Konvergenz - Teilfolgenkriterien - gleichgradige Integrierbarkeit

## Kapitel IV: Produkträume und Produktmasse

**A. Endliche Produkte:** Produkt- $\sigma$ -Algebra, Rechtecke - Messbarkeit von Schnitten - Produktmass - Fubini

**B. Produkträume allgemein:** Produkt- $\sigma$ -Algebra, Säulen mit Rechteckbasis - Produktmass

**C. Unabhängigkeit:** Unabhängigkeit von Ereignissen, von  $\sigma$ -Algebren, von Zufallsvariablen - Produktformeln, Produktdichten

**D. Laplace-Transformierte und Faltungsformeln:** Exkurs über Laplace-Transformierte von Wahrscheinlichkeitsmassen auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  - Exkurs über multivariate Normalverteilungen - Faltungen und Faltungsformeln

## Kapitel V: 0-1-Gesetze, Dreireihensatz, starkes Gesetz der grossen Zahlen

- A. Terminale  $\sigma$ -Algebra und 0-1-Gesetze: Kolmogorovs 0-1-Gesetz, Borel-Cantelli-Lemma
- B. Konvergenz von Random Walks: Kolmogorov-Ungleichung - Konvergenzsatz - Zeichenproblem
- C. Starkes Gesetz der grossen Zahlen: Kronecker-Lemma - Konvergenzsatz - SLLN für iid ZV: notwendige und hinreichende Bedingungen - \*Satz von Glivenko-Cantelli
- \*D. Kolmogorov-Dreireihensatz: Kolmogorov-Dreireihensatz - Folgerungen

## Kapitel VI: Schwache Konvergenz

- A. Wahrscheinlichkeitsmasse auf metrischen Räumen, schwache Konvergenz, stochastische Konvergenz: schwache Konvergenz - Portmanteau-Theorem - continuous mapping theorem - Spezialfall  $\mathbb{R}$ : schwache Konvergenz via Verteilungsfunktionen - schwache und stochastische Konvergenz
- B. Schwache Konvergenz auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  - zwei wichtige Sätze: \*Verteilungsgleiche Ersetzung - \*schwache Konvergenz unterlegt durch f.s. konvergente ZV - Straffheit - Helly'scher Auswahlssatz
- \*C. Verallgemeinerungen (ohne Beweis): vollständige separable metrische Räume

## Kapitel VII: Charakteristische Funktionen

Definition und Grundeigenschaften - Produktformeln, Faltungsformeln - multivariate Normalverteilungen - Eindeutigkeitssatz - Stetigkeitssatz von P. Lévy - Cramer-Wold device - Fourier-Inversion

## Kapitel VIII: Der zentrale Grenzwertsatz

Dreiecksschemata aus zeilenweise unabhängigen  $L^2$ -Variablen - asymptotische Vernachlässigbarkeit, Bedingungen von Lindeberg, Feller, Lyapunov - ZGWS in  $\dim d = 1$  unter Lindeberg-Bedingung - hinreichende und notwendige Bedingungen: Satz von Lindeberg-Feller - ZGWS in  $\mathbb{R}^d$