

Vorlesung Stochastik II – WS19/20 – Inhaltsverzeichnis

Prof. Dr. R. Höpfner, Institut für Mathematik, Universität Mainz

update October 8, 2019

Kapitel III: Lebesgue-Zerlegung von Massen

Absolutstetigkeit und Singularität von Massen - Beispiele - Lebesgue-Zerlegung σ -endlicher Masse - Dichten, Satz von Radon-Nikodym - Standarddarstellung der Lebesgue-Zerlegung - Dichtequotienten

Wdh.: Transformationsformel für Dichten

Kapitel X: Reguläre bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilungen

A. Bedingte Erwartungen: Definition – Existenz – Eigenschaften

B. Faktorisierung der bedingten Erwartung: Faktorisierungen – Ausnahmemengen – ‘bedingte Wahrscheinlichkeit von ... gegeben $X = x$ ’

C. Reguläre Versionen: Übergangswahrscheinlichkeiten – reguläre Versionen der bedingten Wahrscheinlichkeit – polnische Räume – Existenz regulärer Versionen – $P^{Y|C}(\cdot, \cdot)$ und $P^{Y|X=\cdot}(\cdot)$ – bedingte Erwartungen als Integrale bezüglich einer regulären Version der bedingten Verteilung – bedingte Dichten

Kapitel XI: Martingale in diskreter Zeit

A: Martingale, Supermartingale, Submartingale: Random Walk: Trend und trendfreie Zufallsschwankungen – Dynkin-Formel in Markov-Ketten – stochastische Prozesse, Filtrationen, Adaptiertheit – Vorhersehbarkeit und Doob-Meyer-Zerlegung von Submartingalen – Martingale vom Typ ‘sukzessive Prognosen an eine unendlich fernes Ziel’ – Martingale in Verzweigungsprozessen

B. Stopzeiten, Stopsätze: Stopzeiten T – Vergangenheit vor T – Zustand eines Prozesses zur Zeit T – gestoppte Prozesse – Stopsatz für beschränkte Stopzeiten – Stopsatz in nichtnegativen Supermartingalen

C. Doob-Ungleichung und ‘aufsteigende Überquerungen’: Doob-Ungleichungen – Abschluss eines Martingals – Anzahl aufsteigender Überquerungen – Hauptsatz

D. Konvergenzsätze für Martingale, Submartingale und Supermartingale: P -fast sichere Konvergenz in Sub- und nichtnegativen Supermartingalen – Konvergenz fast sicher und in L^1 – Abschluss eines (Sub-, Super-) Martingals – gleichgradige Integrierbarkeit – Hauptsatz über gleichgradig integrierbare Martingale – Stopsatz für gleichgradig integrierbare Martingale

D. L^p -Ungleichungen und L^p -Martingale: Maximumprozess und L^p -Ungleichungen in nichtnegativen Submartingalen – Hauptsatz über L^p -Martingale

Kapitel XII: Der Konsistenzsatz von Kolmogorov

A. Produkträume und Konsistenzsatz: endlichdimensionale Randverteilungen – projektive Systeme – Konsistenzsatz

B. Anwendungen des Konsistenzsatzes: Produktmasse – Markovketten – Markovprozesse in stetiger Zeit – Markovhalbgruppe – Faltungshalbgruppen – Prozesse mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen (PIIS) – Brownsche Bewegung und Poisson-Prozess im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen

Kapitel XIII: Stochastische Prozesse, Pfadeigenschaften, die Brownsche Bewegung

A. Versionen und Pfadeigenschaften: Versionen stochastischer Prozesse – stochastische Stetigkeit – Separabilität – Satz von Kolmogorov-Prohorov

B. Brownsche Bewegung und Poissonprozess: d -dimensionale Standard-Brownsche Bewegung – Drift und Kovarianz – Wienermass auf (C, \mathcal{C}) – Nichtdifferenzierbarkeit der Brownschen Pfade – Poissonprozess – Compound Poisson-Prozesse

C. Eigenschaften der eindimensionalen Brownschen Bewegung: Spiegelungsprinzip – level crossing Zeiten der Brownschen Bewegung – starke Markoveigenschaft (vorläufige Formulierung) – Satz vom iterierten Logarithmus für $t=0$ – Zeitumkehr – Satz vom iterierten Logarithmus für $t \rightarrow \infty$ – Rekurrenzeigenschaften – die Nullstellenmenge des Brownschen Pfades

***D. Exkurs: Markoveigenschaften in stetiger Zeit:** Stopzeiten in rechtsstetigen Filtrationen – Zustand eines Prozesses zur Zeit T – exakte Formulierung der starken Markoveigenschaft – der Prozess nach T – Folgerungen für die Brownsche Bewegung – Folgerungen für den Poissonprozess