Reinhard Höpfner

Vorlesung Stochastik II

Kapitel XI: Martingale in diskreter Zeit

Wintersemester 2019/20

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

December 9, 2019

Übersicht zu Kapitel XI :

A. Martingale, Submartingale, Supermartingale

'Trend' und 'trendfreie Zufallsschwankungen' in Random Walks 11.1

Dynkin-Formel in Markov-Ketten 11.2

stochastische Prozesse 11.2'

Filtrationen, adaptierte Prozesse 11.3–11.3'

Martingale, Submartingale, Supermartingale 11.4–11.5

Vorhersehbarkeit und Doob-Meyer-Zerlegung von Submartingalen 11.5'–11.6'

Martingale vom Typ 'sukzessive Prognosen an ein unendlich fernes Ziel' 11.7

Martingale in Galton-Watson-Verzweigungsprozessen 11.8

B. Stopzeiten, Stopsätze

Stopzeiten T, σ-Algebra der Vergangenheit vor T 11.9–11.12

Zustand eines Prozesses zur zufälligen Zeit T 11.13

Einfrieren eines Prozesses (Martingals, Supermartingals, ...) zur Zeit T 11.14

Stopsatz für beschränkte Stopzeiten 11.15

Beispiele: Verzweigungsprozesse, Glücksspiele 11.16

Stopsatz in nichtnegativen Supermartingalen 11.17

C. Doob-Ungleichung und 'aufsteigende Überquerungen'

Doob-Ungleichung 11.18

Verallgemeinerung auf abzählbare Indexmengen 11.19

Abschluss eines Martingals, Sub- oder Supermartingals 11.20–11.20'

Indexmengen mit Häufungspunkt links, Abschluss nach links 11.21

Anzahl aufsteigender Überquerungen $N^I_{a,b}$ 11.22

Hauptsatz über aufsteigende Überquerungen 11.23–(11.24)

D. Konvergenzsätze für Martingale, Submartingale und Supermartingale

E. L^p-Ungleichungen und L^p-Martingale

A. Martingale, Submartingale, Supermartingale

Martingale enstehen durch Aufaddieren 'trendfreier Zufallsschwankungen'. Dies wird zunächst an Beispielen aufgezeigt.

11.1 Beispiel: Betrachte eine Folge von Glücksspielen. Schreibe Y_n für den Gewinn/Verlust im n-ten Spiel, und setze voraus: Y_n, $n = 1, 2, \ldots$, sind iid ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $Y_1 \in L^1(P)$ und $E(Y_1) =: m$. Bilde dazu den Partialsummenprozess oder Random Walk $(S_n)_n$

$$S_n \;:=\; \sum_{j=1}^{n} Y_j \;, \quad n \geq 1 \;, \quad S_0 \equiv 0 \;,$$

der die Entwicklung des Vermögens des Spielers als Funktion der Zeit beschreibt. Definiere eine wachsende Folge $(\mathcal{F}_n)_n$ von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{A}$

$$\mathcal{F}_n \;:=\; \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n) \;=\; \sigma(Y_1, \ldots, Y_n) \;, \quad n \geq 1 \;, \quad \mathcal{F}_0 \;:=\; \{\emptyset, \Omega\} \;;$$

$\mathcal{F}_n$ beschreibt den Informationsstand eines idealen Beobachters, der bis zur Zeit n einschliesslich den Verlauf der Folge von Glücksspielen verfolgen kann. Wegen der Unabhängigkeit der einzelnen Glücksspiele liefert die bedingte Erwartung

$$E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) \;=\; S_n + E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \;=\; S_n + m$$

die beste Prognose für den Vermögensstand S_{n+1} zur Zeit $n+1$ gegeben den Spielverlauf bis zur Zeit n. Die Folge von Glücksspielen ist damit für den Spieler tendentiell

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{vorteilhaft} \\ \text{fair} \\ \text{unvorteilhaft} \end{array} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} m > 0 \\ m = 0 \\ m < 0 \end{array} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) \left\{ \begin{array}{c} > S_n \\ = S_n \\ < S_n \end{array} \right\} \quad \forall\, n \in I\!N_0.$$

Dementsprechend zerlegen wir den Prozess $(S_n)_n$ in einen 'vorhersehbaren Trend' plus einen Prozess 'trendfreier Zufallsschwankungen'

$$S_n \;=\; S_0 + A_n + M_n \;, \quad n \in I\!N_0$$

wobei der vorhersehbare Trend ein deterministischer Prozess

$$A = (A_n)_{n \in I\!N_0} \;, \quad A_n := mn \;,\; n \in I\!N_0$$

und der Prozess trendfreier Zufallsschwankungen

$$M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0} , \quad M_0 := 0 \, , \; M_n := \sum_{j=1}^{n}(Y_j - m) \, , \; n \geq 1$$

ein zentrierter Random Walk ist, vgl. 5.7. $\square$

11.2 Beispiel: a) Eine *Markov-Kette* $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Werten in einem messbaren Raum $(E,\mathcal{E})$ mit *1-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit* $Q(\cdot,\cdot)$ ist ein stochastischer Prozess, definiert auf irgendeinem $(\Omega,\mathcal{A},P)$, der sich sukzessiv in der Zeit entwickelt gemäss

$$(*) \qquad \begin{cases} \forall\, n \geq 0 \; : \quad P(X_{n+1} \in F \mid \mathcal{F}_n) \; = \; Q(X_n, F) \, , \quad \forall\, F \in \mathcal{E} \, , \\ \mathcal{L}(X_0|P) \; = \; \nu \, . \end{cases}$$

Dabei ist

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$$

die *σ-Algebra der Vergangenheit im Prozess X bis zur Zeit n*, ν ist ein vorgegebenes Wahrscheinlichkeitsmass auf $(E,\mathcal{E})$, welches die Startverteilung für X liefert, und $Q(\cdot,\cdot)$ eine Übergangswahrscheinlichkeit auf $(E,\mathcal{E})$. Diese würfelt in Abhängigkeit allein von dem jeweils zuletzt erreichten Zustand X_n einen Folgezustand X_{n+1} aus.
Genauer: mit $(*)$ sind für den Prozess X eine Startverteilung ν und eine reguläre Version $(\omega, F) \to Q(X_n(\omega), F)$ der bedingten Verteilung von X_{n+1} gegeben $\mathcal{F}_n$ festgelegt, für jedes $n \geq 0$; diese reguläre Version benutzt von der ganzen Vergangenheit im Prozess bis zur Zeit n nur noch den *zuletzt erreichten Zustand X_n*.

b) Sei nun X eine Markov-Kette mit 1-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit $Q(.,.)$. Betrachte Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$, beschränkt und $\mathcal{E}$-messbar, und definiere einen Operator $\mathcal{L}$ auf dem Raum der beschränkten $\mathcal{E}$-messbaren Funktionen durch

$$(+) \qquad (\mathcal{L}f)(x) \; := \; \int_E [f(y) - f(x)] Q(x, dy) \, , \quad x \in E \, .$$

Der Operator $\mathcal{L}$ heisst *Markov-Generator* der Kette $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Mit $(*)$ liefert 10.33 a)

$$E(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \; = \; \int f(y) Q(X_n, dy) \; = \; f(X_n) + (\mathcal{L}f)(X_n) \, , \quad n \in \mathbb{N}_0 \, ;$$

dies ist die beste Prognose für $f(X_{n+1})$ gegeben $\mathcal{F}_n$. Damit zerlegen wir jedes 'Funktional' $(f(X_n))_n$ der Markovkette X, f beschränkt und $\mathcal{E}$-messbar, vermöge

$$f(X_n) \; = \; f(X_0) + \sum_{j=1}^{n} [f(X_j) - f(X_{j-1})]$$

in einen 'vorhersehbaren Trend' $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$A_n := \sum_{j=1}^{n} (\mathcal{L}f)(X_{j-1}) \quad \mathcal{F}_{n-1}\text{–messbar} , \quad n \geq 1 , \quad A_0 := 0$$

plus einen Prozess $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, welcher 'trendfreie Zufallsfluktuationen' aufaddiert

$$\begin{aligned} M_n &:= \sum_{j=1}^{n} [f(X_j) - f(X_{j-1}) - (\mathcal{L}f)(X_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^{n} [\, f(X_j) - E(f(X_j)|\mathcal{F}_{j-1})\,] , \quad n \geq 1 , \quad M_0 := 0 \end{aligned}$$

plus einen Startwert: die so entstandene Zerlegung

$$(++) \qquad f(X_n) = f(X_0) + M_n + A_n , \quad n \geq 0$$

nennt man eine *Dynkin-Formel* für die Markovkette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. □

Zunächst geben wir die noch ausstehende Definition für den Begriff 'stochastischer Prozess':

11.2' Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein ein messbarer Raum, sei I eine beliebige Indexmenge, sei $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum. Ein *stochastischer Prozess* $X = (X_t)_{t \in I}$ *auf* $(\Omega, \mathcal{A})$ *mit Werten in* $(E, \mathcal{E})$ ist eine Kollektion messbarer Abbildungen $X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E}),\ t \in I$.

Wir werden in diesem Kapitel Indexmengen $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ betrachten, und $t \in I$ als 'Zeit' interpretieren. Die Beispiele 11.1 und 11.2 motivieren die folgenden Begriffe.

11.3 Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, sei $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Indexmenge.

a) Eine *Filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ *in* $\mathcal{A}$ ist eine aufsteigende Familie von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{A}$:

$$s < t \quad \text{in } I \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t .$$

b) Sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$, sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ eine Filtration in $\mathcal{A}$. Der Prozess X heisst $\mathbb{F}$*-adaptiert* falls gilt

$$\text{für jedes } t \in I \text{ gilt: } \ X_t : \Omega \to E \ \text{ ist } \mathcal{F}_t\text{–}\mathcal{E}\text{–messbar.}$$

11.3' Bemerkung: Die *Geschichte von* $X = (X_t)_{t\in I}$ ist die Filtration $(\sigma(X_s : s \in I, s \le t))_{t\in I}$. $\mathbb{F}$-Adaptierheit des Prozesses X bedeutet nichts anderes, als dass die Geschichte von $X = (X_t)_{t\in I}$ Teil einer grösseren 'Geschichte' $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ ist.

11.4 Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine Indexmenge, sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ eine Filtration in $\mathcal{A}$. Betrachte einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t\in I}$ mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und mit den Eigenschaften

$$X \text{ ist } \mathbb{F}\text{-adaptiert, und } X_t \in L^1(P) \text{ für jedes } t \in I.$$

Der Prozess X heisst

$$(P, \mathbb{F}) - \left\{ \begin{array}{l} \textit{Submartingal} \\ \textit{Martingal} \\ \textit{Supermartingal} \end{array} \right\} \quad \text{falls für alle } s < t \text{ in } I \text{ gilt : } \quad X_s \left\{ \begin{array}{c} \le \\ = \\ \ge \end{array} \right\} E(X_t | \mathcal{F}_s) \ .$$

Im Sinne einer besten Prognose an X_t gegeben den Informationsstand $\mathcal{F}_s$, $s < t$, ist ein Submartingal *tendentiell wachsend*, ein Supermartingal *tendentiell fallend*, ein Martingal *trendfrei*.

11.5 Bemerkungen: Unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 11.4:

a) Es gilt

$$X \text{ Submartingal} \iff (-X) := (-X_t)_{t\in I} \text{ Supermartingal ;}$$

also genügt es oft, entweder Sub- oder Supermartingale zu betrachten.

b) Nach Definition ist X ein $(P, \mathbb{F})$-Submartingal falls

$$\forall\, s < t \in I \ : \quad X_s \ \le \ E_P(X_t | \mathcal{F}_s) \ .$$

Mit einer $\mathcal{F}_s$-messbaren Festlegung $g_{t,s}$ von $E_P(X_t|\mathcal{F}_s)$ ist die letzte Aussage äquivalent zu

$$\forall\, s < t \in I \ , \ \forall\, F \in \mathcal{F}_s \ : \quad E_P(1_F X_s) \ \le \ E_P(1_F\, g_{t,s}) \ = \ E_P(1_F E_P(X_t|\mathcal{F}_s)) \ = \ E_P(1_F X_t) \ .$$

Damit ist die Submartingaleigenschaft bezüglich $(P, \mathbb{F})$ äquivalent zu

$$(*) \qquad \forall\, s < t \in I \ , \ \forall\, F \in \mathcal{F}_s \ : \quad E_P(1_F X_s) \ \le \ E_P(1_F X_t) \ .$$

Dasselbe gilt für Martingale mit '=', und für Supermartingale mit '$\ge$'. Oft liefert $(*)$ den einfachsten Weg, eine Submartingaleigenschaft (analog Martingal-, Supermartingaleigenschaft) zu verifizieren.

c) Sei X ein $(P, \mathbb{F})$-Martingal (Sub-, Supermartingal). Geht man von P zu einem anderen Wahrscheinlichkeitsmass P' auf $\mathcal{A}$ über, oder von $\mathbb{F}$ zu einer anderen Filtration $\mathbb{F}'$ in $\mathcal{A}$, so geht im allgemeinen die Martingaleigenschaft (Sub-, Supermartingaleigenschaft) von X verloren.

Den folgenden Begriff geben wir nur in einer auf 'diskrete Zeit' zugeschnittenen Einfachversion.

11.5' Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration in $\mathcal{A}$. Ein stochastischer Prozess $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heisst *$\mathbb{F}$-vorhersehbar* falls gilt: für jedes $n \geq 1$ ist die Zufallsvariable A_n $\mathcal{F}_{n-1}$–messbar, und $A_0 \equiv cst$ ist deterministisch.

11.6 Beispiel: Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine $(E, \mathcal{E})$-wertige Markovkette auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Als Filtration betrachten wir die Geschichte $\mathbb{F} = (\sigma(X_j : 0 \leq j \leq n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ von X. Die Dynkinformel (++) aus Beispiel 11.2 liefert für $f : E \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\mathcal{E}$-messbar eine Zerlegung

$$f(X_n) \ = \ f(X_0) + A_n + M_n$$

in einen $\mathbb{F}$-vorhersehbaren Prozess $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$A_n \ = \ \sum_{j=1}^{n} (\mathcal{L}f)(X_{j-1}) \ , \quad n \geq 1 \ , \quad A_0 \equiv 0$$

und ein $(P, \mathbb{F})$-Martingal $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$M_n \ = \ \sum_{j=1}^{n} \left(f(X_j) - f(X_{j-1}) - (\mathcal{L}f)(X_{j-1}) \right) \ , \quad n \geq 1 \ , \quad M_0 \equiv 0 \ .$$

Eine Darstellung des Typs 'Startwert + vorhersehbarer Trend + Martingal' nennt man eine *Semimartingaldarstellung*. Viele stochastische Prozesse gestatten eine solche Darstellung.

11.6' Doob-Meyer-Zerlegung von Submartingalen : Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}{=}(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, P)$. Die Submartingaleigenschaft liefert

$$E(X_j - X_{j-1} | \mathcal{F}_{j-1}) \ \geq \ 0 \quad \text{für jedes } j \geq 1 \ ;$$

folglich existiert ein *wachsender* vorhersehbarer Prozess $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$A_n \ := \ \sum_{j=1}^{n} E(X_j - X_{j-1} | \mathcal{F}_{j-1}) \ , \quad n \geq 1 \ , \quad A_0 \equiv 0$$

und ein Martingal $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$M_n \;:=\; \sum_{j=1}^{n} ((X_j - X_{j-1}) - E(X_j - X_{j-1}|\mathcal{F}_{j-1})) \;, \quad n \geq 1 \;, \quad M_0 \equiv 0$$

so dass gilt

$$(*) \qquad X_n \;=\; X_0 + M_n + A_n \;, \quad n \in \mathbb{N}_0 \;.$$

Die Zerlegung eines Submartingals $(*)$ in Form

Startwert + vorhersehbarer wachsender Prozess + Martingal

nennt man *Doob-Meyer-Zerlegung.* Eine solche Zerlegung ist notwendig *eindeutig*:
Sei A' ein anderer wachsender vorhersehbarer Prozess (bezüglich $(P,\mathbb{F})$) und M' ein anderes $(P,\mathbb{F})$-Martingal, beide mit Start in 0, so dass zusätzlich zu $(*)$ auch

$$(**) \qquad X_n \;=\; X_0 + M'_n + A'_n \;, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Setze $N_n := M_n - M'_n,\ V_n := A_n - A'_n$. Aus $(*)$ und $(**)$ folgt

$$N_n + V_n \;=\; (X_n - X_0) - (X_n - X_0) \;=\; 0 \quad \text{für alle } n \;.$$

Als Differenz zweier Martingale muss $N = (N_n)_n$ ein Martingal bezüglich $(P,\mathbb{F})$ sein, also gilt $E(N_n|\mathcal{F}_{n-1}) = N_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits ist $N_n = -V_n$ $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar, folglich ist N_n selbst eine Festlegung der bedingten Erwartung $E(N_n|\mathcal{F}_{n-1})$. Beide Aussagen zusammen erzwingen $N_n = N_{n-1}$ P-fast sicher. Dies gilt für jedes $n \geq 1$: sukzessiv zurückgehend bis zum Startwert $N_0 = M_0 - M'_0 = 0$ erhält man $N_n = 0$ P-fast sicher für jedes $n \geq 1$. Aus $N_n + V_n = 0$ folgt dann auch $V_n = 0$ P-fast sicher für jedes $n \geq 1$. Also ist die Zerlegung eindeutig. $\square$

Martingale können als 'sukzessive Prognosen an ein unendlich fernes Ziel' entstehen. Dieser Typ von Martingalen wird in der Folge eine wichtige Rolle spielen.

11.7 Satz: Sei $X \in L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$, sei $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine wachsende Folge von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{A}$; dann erhält man durch

$$M_n \;:=\; E_P(X|\mathcal{F}_n) \;, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ein $(P,\mathbb{F})$-Martingal $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis: Per Definition ist jedes M_n eine $\mathcal{F}_n$-messbare ZV; nach Jensen-Ungleichung bzw. nach Satz 10.11 gilt $M_n \in L^1(P)$ für $n \geq 0$. Die Martingaleigenschaft von M bezüglich P und $I\!\!F$ folgt aus

$$E_P(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(E(X|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = E(X|\mathcal{F}_n) = M_n \ , \quad n \in I\!\!N_0 \ . \qquad \square$$

11.8 Beispiel: (Martingalstruktur in Galton-Watson-Verzweigungsprozessen) Bereite vor eine Familie $(\xi_{n,j})_{n\in I\!\!N_0\,,\,j\in I\!\!N}$ von $I\!\!N_0$-wertigen i.i.d. Zufallsvariablen auf einem Grundraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, und definiere einen $I\!\!N_0$-wertigen stochastischen Prozess $X = (X_n)_{n\in I\!\!N_0}$ durch

$$X_0 \equiv 1 \ , \quad X_{n+1} \ := \ 1_{\{X_n > 0\}} \sum_{j=1}^{X_n} \xi_{n+1,j} \ + \ 0 \cdot 1_{\{X_n = 0\}} \ , \quad n \in I\!\!N_0 \ .$$

Wir interpretieren X_n als Grösse einer Population in der n-ten Generation; $\xi_{n+1,j}$ ist die Zahl von Nachkommen, mit der ein j-tes Individuum der Generation n zur Generation $n+1$ beiträgt. Damit ist $X = (X_n)_{n\in I\!\!N_0}$ ein klassischer *Galton-Watson-Verzweigungsprozess*, siehe z.B. Jagers (1975). Wir setzen stets voraus:

$$\xi_{1,1} \in L^1(P) \quad , \quad m := E(\xi_{1,1}) \ > \ 0 \ .$$

2) Auf zwei Arten kann man eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ erklären. Die Geschichte von X

$$I\!\!F = (\mathcal{F}_n)_{n\in I\!\!N_0} \quad , \quad \mathcal{F}_n \ := \ \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) \ , \ \ n \geq 0$$

modelliert einen idealen Beobachter, der (nur) die zeitliche Entwicklung von Generationsgrössen verfolgen kann. Insbesondere gilt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ da X_0 konstant. Die grössere Filtration

$$I\!\!F' = (\mathcal{F}'_n)_{n\in I\!\!N_0} \quad , \quad \mathcal{F}'_n \ := \ \sigma(\xi_{m,j} : 1 \leq m \leq n, j \geq 1) \ , \ n \geq 1 \ \ , \ \ \mathcal{F}'_0 := \{\emptyset, \Omega\}$$

beschreibt einen Beobachter, der zusätzlich zum Verlauf des Prozesses X bis zur Zeit n auch individuelle Nachkommenszahlen für alle bis zur Zeit n möglicherweise zu realisierenden Individuen kennt: es gilt $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}'_n$ für jedes $n \in I\!\!N_0$. Da die Familie $\{\xi_{n+1,j} : j \geq 1\}$ nach Voraussetzung unabhängig von $\mathcal{F}'_n$ und damit erst recht unabhängig von $\mathcal{F}_n$ ist, gilt mit 10.9

$$E(\xi_{n+1,j}|\mathcal{F}'_n) \ = \ E(\xi_{n+1,j}) \ = \ m \quad , \quad E(\xi_{n+1,j}|\mathcal{F}_n) \ = \ E(\xi_{n+1,j}) \ = \ m \ .$$

3) Wir zeigen zuerst:

$$m\,X_n \ \text{ ist eine Festlegung der bedingten Erwartung } \ E_P(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$$

für jedes $n \in I\!\!N_0$. Zerlege dazu Ereignisse $F \in \mathcal{F}_n$ nach den für X_n möglichen Werten und betrachte $F_k := F \cap \{X_n = k\} \in \mathcal{F}_n$. Mit 10.9 gilt für $k \geq 1$

$$\int_{F_k} X_{n+1}\, dP \ = \ \int_{F_k} \sum_{i=1}^{k} \xi_{n+1,j}\, dP \ = \ \int_{F_k} m\,k\, dP \ = \ \int_{F_k} m\,X_n\, dP$$

sowie für $k = 0$

$$\int_{F\cap\{X_n=0\}} X_{n+1}\,dP \;=\; 0 \;=\; \int_{F\cap\{X_n=0\}} m\,X_n\,dP\;,$$

und Summation über $k \in I\!N_0$ liefert

$$\int_F X_{n+1}\,dP \;=\; \int_F mX_n\,dP\;, \quad \forall\, F \in \mathcal{F}_n\;.$$

Damit ist X ein $(P, I\!F)$-Martingal falls $m = 1$, d.h. falls jedes Individuum der Generation n mit im Mittel $m = 1$ Nachkommen zur Generation $n+1$ beiträgt; für $m > 1$ ist X ein Submartingal, für $m < 1$ ein Supermartingal. Mit iterativer Berechnung bedingter Erwartungen zeigt die Behauptung in 2) auch $E(X_n) = m^n$ für alle $n \in I\!N_0$.

4) Betrachte nun $Y := (Y_n)_n$ definiert durch

$$Y_n \;:=\; \frac{X_n}{m^n}\;\;,\;\; n \in I\!N_0\;.$$

Wegen

$$E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \;=\; \frac{1}{m^{n+1}}E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \;=\; \frac{m\,X_n}{m^{n+1}} \;=\; Y_n$$

ist der Prozess $Y := (Y_n)_n$ ein $(P, I\!F)$-Martingal mit Werten in $[0,\infty)$.

4) Martingaleigenschaften wie in 3) für X und wie in 4) für Y gelten genauso –mit analogem Beweis– bezüglich der grösseren Filtration $I\!F'$ anstelle von $I\!F$. $\square$

11.8' Beispiel: Unter den Voraussetzungen des Beispiel 11.1 wurde für den Prozess $S = (S_n)_{n\in I\!N_0}$ des Vermögens eines Glücksspielers durch

$$S_n = S_0 + M_n + A_n \quad,\quad A_n = m\cdot n \quad,\quad M_n = \sum_{j=1}^{n}(Y_j - m)$$

eine Semimartingalzerlegung des Prozesses $S = (S_n)_{n\in I\!N_0}$ angegeben.

B. Stopzeiten, Stopsätze

Stopzeiten sind 'Zufallszeiten' mit einer speziellen Struktur. Wir betrachten sie nur im Rahmen diskreter Zeit.

11.9 Definition: Sei $(\Omega,\mathcal{A})$ ein messbarer Raum versehen mit einer Filtration $I\!F = (\mathcal{F}_n)_{n\in I\!N_0}$; definiere

$$\bigvee_n \mathcal{F}_n \;:=\; \sigma(\bigcup_{n\in I\!N_0} \mathcal{F}_n)\;.$$

a) Eine Abbildung $T : \Omega \to \overline{I\!N}_0 = I\!N_0 \cup \{\infty\}$ heisst *$I\!F$-Stopzeit* falls

$$\forall\, n \in I\!N_0 \ : \ \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n \ .$$

b) Ist T eine $I\!F$-Stopzeit, so heisst

$$\mathcal{F}_T \ := \ \{ \ A \in \bigvee_n \mathcal{F}_n \ : \ A \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n \text{ für jedes } n \in I\!N_0 \ \}$$

σ-Algebra der Vergangenheit bis zur Zeit T.

Eine $I\!F$-Stopzeit T ist also eine zufällige Zeit, über die ein Beobachter mit Kenntnisstand $\mathcal{F}_n$ zur Zeit n stets sagen kann, ob diese bereits eingetreten ist oder nicht.

11.10 Bemerkungen: Sei $I\!F = (\mathcal{F}_n)_{n \in I\!N_0}$, sei $T : \Omega \to \overline{I\!N}_0$ eine $I\!F$-Stopzeit.

a) Für alle $n \in I\!N_0$ gilt

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad , \quad \{T > n\} \in \mathcal{F}_n \ .$$

Dies folgt aus $\{T = n\} = \{T \le n\} \setminus \{T \le n{-}1\}$, $n \ge 1$, und aus $\{T > n\} = \{T \le n\}^c$, $n \ge 0$.

b) Das System $\mathcal{F}_T$ – wie in 11.9 b) definiert – ist wirklich eine σ-Algebra:
man hat $\Omega \in \mathcal{F}_T$ (denn $\Omega \cap \{T \le n\} = \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$ für jedes $n \in I\!N_0$, nach Definition der Stopzeit); danach liegt mit $A \in \mathcal{F}_T$ auch $A^c = \Omega \setminus A$ in $\mathcal{F}_T$, wegen

$$A^c \cap \{T \le n\} \ = \ \{T \le n\} \setminus (A \cap \{T \le n\}) \ \in \ \mathcal{F}_n \ , \quad n \in I\!N_0 \ ;$$

klar ist $\mathcal{F}_T$ abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen.

c) Für jede $I\!F$-Stopzeit T liegt das Ereignis $\{T = \infty\} = \bigcap_{n \in I\!N_0} \{T > n\}$ in der σ-Algebra $\bigvee_n \mathcal{F}_n$.
Für $A \in \bigvee_n \mathcal{F}_n$ liegt damit auch $A \cap \{T = \infty\}$ in $\bigvee_n \mathcal{F}_n$; insbesondere gilt dies für alle $A \in \mathcal{F}_T$.

d) In diskreter Zeit hat man $\{T \le n\} = \bigcup_{j=0}^{n} \{T = j\}$, und kann die in Definition 11.9 geforderten Eigenschaften folgendermassen umschreiben: eine Abbildung $T : \Omega \to \overline{I\!N}_0$ ist eine $(\mathcal{F}_n)_{n \in I\!N_0}$-Stopzeit genau dann wenn

$$\forall\, j \in I\!N_0 \ : \quad \{T = j\} \in \mathcal{F}_j \ ,$$

und die σ-Algebra der Vergangenheit bis zur Zeit T kann äquivalent als

$$\mathcal{F}_T \ = \ \{ \ A \in \bigvee_n \mathcal{F}_n \ : \ A \cap \{T = j\} \in \mathcal{F}_j \ \text{ für jedes } j \in I\!N_0 \ \}$$

eingeführt werden. Beides gilt *nur* in diskreter Zeit.

e) Jede konstante Zeit $T \equiv m$, $m \in I\!N_0$, ist eine $I\!F$-Stopzeit. $\square$

11.11 Beispiele: Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$, sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration in $\mathcal{A}$, sei X adaptiert an $\mathbb{F}$.

a) Für jedes $F \in \mathcal{E}$ ist die *Treffzeit* oder *Zeit des ersten Besuchs* in F

$$T \;:=\; \min\{\, n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in F \,\} \quad (\text{mit Konvention } \min\emptyset := +\infty)$$

eine $\mathbb{F}$-Stopzeit, wegen $\{T = 0\} = \{X_0 \in F\} \in \mathcal{F}_0$ und

$$(\times) \qquad \{T = n\} = \{\, X_n \in F\,,\; X_j \notin F\,,\; 0 \le j < n \,\} \;\in \mathcal{F}_n\;,\;\; n \ge 1\,.$$

b) Für jedes $F \in \mathcal{E}$ ist die *Eintrittszeit* in F (beachte den Unterschied im Zeitpunkt 0)

$$S \;:=\; \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \in F\} \quad (\text{mit Konvention } \min\emptyset := +\infty)$$

sowie die sukzessiv definierten *Wiedereintrittszeiten* in F

$$S_0 \equiv 0\;,\;\; S_1 := S\;,\;\; S_m \;:=\; \min\{n : n > S_{m-1}\,,\; X_n \in F\}\;,\;\; m = 2, 3, \ldots$$

$\mathbb{F}$–Stopzeiten. Dies sieht man induktiv. Zuerst ist S_1 eine $\mathbb{F}$-Stopzeit, wegen $(\times)$ und $\{T = 0\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0$. Ist für ein $m \ge 2$ schon S_{m-1} als $\mathbb{F}$-Stopzeit nachgewiesen, so ist auch S_m eine $\mathbb{F}$-Stopzeit, denn

$$\begin{aligned}
\{S_m = n\} \;&=\; \bigcup_{k=1}^{n-1} \{\, S_{m-1} = k\,,\; S_m = n \,\} \\
&=\; \bigcup_{k=1}^{n-1} (\{S_{m-1} = k\} \cap \{\, X_j \notin F\,,\; k < j < n \,\} \cap \{\, X_n \in F \,\}) \quad \in \;\; \mathcal{F}_n\,.
\end{aligned}$$

c) Für $\mathcal{E}$–messbares $f : E \to [0, \infty)$ und festes Niveau $a > 0$ ist die *level crossing Zeit*

$$T' \;:=\; \min\{\, n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{j=0}^{n} f(X_j) > a \,\} \quad (\text{mit Konvention } \min\emptyset := +\infty)$$

eine $\mathbb{F}$-Stopzeit: definiere $Y_n := \sum_{j=0}^{n} f(X_j)$, dann ist mit X ist auch $Y = (Y_n)_n$ $\mathbb{F}$-adaptiert, und T' ist die Zeit des ersten Besuchs von Y in (a, ∞). $\square$

11.12 Satz: Betrachte $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, und $\mathbb{F}$-Stopzeiten $T, T_1, T_2, \cdots : \Omega \to \overline{\mathbb{N}_0}$.

a) T ist eine $\mathcal{F}_T$-messbare Abbildung von Ω nach $\overline{\mathbb{N}}_0$.

b) Aus $T_1 \le T_2$ folgt $\mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$.

c) $T_1 \wedge T_2$, $T_1 \vee T_2$, $\inf\limits_{m\ge1} T_m$ und $\sup\limits_{m\ge1} T_m$ sind $\mathbb{F}$-Stopzeiten.

Beweis: a) Für $T : \Omega \to \overline{I\!N}_0$ ist zu zeigen $\{T \le a\} \in \mathcal{F}_T$ für jedes $a \in [0,\infty)$ (vgl. 1.42). Bezeichne $\lfloor a \rfloor$ die grösste ganze Zahl $\le a$. Da T $I\!F$–Stopzeit, gilt für beliebiges $n \in I\!N_0$

$$(+) \qquad \{T \le a\} \cap \{T \le n\} \;=\; \{T \le (n \wedge \lfloor a \rfloor)\} \quad \in \mathcal{F}_{n \wedge \lfloor a \rfloor} \;\subset\; \mathcal{F}_n \;.$$

Da $a < \infty$, zeigt Vereinigung über alle $n \in I\!N_0$ in (+) zuerst: es gilt $\{T \le a\} \in \bigvee\limits_n \mathcal{F}_n$. Nach Definition der σ-Algebra $\mathcal{F}_T$ zeigt eine zweite Anwendung von (+) sodann auch $\{T \le a\} \in \mathcal{F}_T$ für alle $a \in [0,\infty)$. Damit ist T als $\mathcal{F}_T$-messbare Abbildung nachgewiesen.

b) Zum Nachweis der Monotonieeigenschaft b) sei $A \in \mathcal{F}_{T_1}$ beliebig. Nach Definition von $\mathcal{F}_{T_1}$ gilt $A \cap \{T_1 \le n\} \in \mathcal{F}_n$ für jedes $n \in I\!N_0$. Mit $T_1 \le T_2$ folgt

$$A \cap \{T_2 \le n\} \;=\; \underbrace{(A \cap \{T_1 \le n\})}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T_2 \le n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \;\in\; \mathcal{F}_n$$

für alle $n \in I\!N_0$ und damit $A \in \mathcal{F}_{T_2}$.

c) Für $S := \sup\limits_m T_m$ liegt das Ereignis $\{S > n\} = \bigcup\limits_m \{T_m > n\}$ in $\mathcal{F}_n$, damit auch $\{S \le n\} = \{S > n\}^c$ für $n \in I\!N_0$ beliebig. Für $S := \inf_m T_m$ betrachtet man für jedes n

$$\{S \le n\} \;=\; \{S < n+1\} \;=\; \bigcup_m \{T_m < n+1\} \;=\; \bigcup_m \{T_m \le n\} \;\in\; \mathcal{F}_n \;.$$

Genauso argumentiert man für $T_1 \wedge \ldots \wedge T_\ell$ oder $T_1 \vee \ldots \vee T_\ell$ für endliches ℓ. $\square$

Die folgenden Definitionen nutzen ganz wesentlich die Eigenschaften einer Stopzeit.

11.13 Satz: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, I\!F{=}(\mathcal{F}_n)_{n \in I\!N_0})$ einen reellwertigen $I\!F$-adaptierten stochastischen Prozess $X = (X_n)_{n \in I\!N_0}$ und eine $I\!F$-Stopzeit T. Wir definieren den *Zustand von X zur Zeit T* durch

$$X_T := \sum_{n \in I\!N_0} X_n 1_{\{T=n\}} \;.$$

Dann ist $X_T : \Omega \to I\!R$ eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable.

Bem: Hinweis: die für $X = (X_n)_{n \in I\!N_0}$ in 11.13 gegebene Definition impliziert

$$X_T := 0 \text{ auf } \{T = \infty\}$$

und bezieht sich explizit *auf einen Prozess X, dessen Indexmenge den Punkt $+\infty$ nicht enthält.*

Beweis: Da X $I\!F$-adaptiert, da T eine $I\!F$-Stopzeit, ist zunächst

$$X_T \;=\; \sum_{n \in I\!N_0} X_n 1_{\{T=n\}} \;+\; 0 \cdot 1_{\{T=\infty\}}$$

eine $\bigvee_n \mathcal{F}_n$-messbare Zufallsvariable: also gilt $\{X_T \in B\} \in \bigvee_n \mathcal{F}_n$ für jedes $B \in \mathcal{B}(I\!R)$. Weiter gilt

$$\{X_T \in B\} \cap \{T = n\} \;=\; \{X_n \in B\} \cap \{T = n\} \;\in \mathcal{F}_n\;, \quad n \in I\!N_0\;.$$

Nach Definition 11.9 und nach 11.10 c) folgt, dass das Ereignis $\{X_T \in B\}$ zur σ-Algebra $\mathcal{F}_T$ der Vergangenheit bis T gehört. Damit ist X_T eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable. □

11.14 Satz: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, I\!F{=}(\mathcal{F}_n)_{n\in I\!N_0})$ einen reellwertigen $I\!F$-adaptierten stochastischen Prozess $X = (X_n)_{n\in I\!N_0}$ und eine $I\!F$-Stopzeit T. Dann ist

$$X^T \;:=\; (X_{T\wedge n})_{n\in I\!N_0}$$

ein $I\!F$-adaptierter stochastischer Prozess. Man nennt X^T den *zur Zeit T gestoppten* oder *zur Zeit T eingefrorenen* Prozess. Ist X ein $(P, I\!F)$-Martingal (Submartingal, Supermartingal), so ist auch der zur Zeit T eingefrorene Prozess X^T ein $(P, I\!F)$-Martingal (Submartingal, Supermartingal).

Beweis: Es gilt $X_0^T = X_0$, und für $n \geq 1$ und jedes $B \in \mathcal{B}(I\!R)$

$$\{X_n^T \in B\} \;=\; \bigcup_{j=0}^{n} \left(\underbrace{\{X_j \in B\}}_{\in \mathcal{F}_j} \cap \underbrace{\{T = j\}}_{\in \mathcal{F}_j} \right) \bigcup \left(\underbrace{\{X_n \in B\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T > n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \right) \quad \in \mathcal{F}_n\;.$$

Also ist X^T ein $I\!F$-adaptierter stochastischer Prozess. Sei nun X ein Martingal oder ein Supermartingal bezüglich P und $I\!F$. Wegen $|X_{T\wedge n}| \leq |X_0| + \ldots + |X_n|$ ist dann jede Variable X_n^T in $L^1(P)$, und

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}^T - X_n^T | \mathcal{F}_n) &= E(X_{T\wedge(n+1)} - X_{T\wedge n} | \mathcal{F}_n) \\ &= E(\, 0 \cdot 1_{\{T \leq n\}} + (X_{n+1} - X_n) 1_{\{T > n\}} \,| \mathcal{F}_n) \\ &= 1_{\{T>n\}}\, E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

da $\{T > n\} = \{T \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$ nach Definition einer Stopzeit. Damit gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} E(X_{n+1}^T | \mathcal{F}_n) \leq X_n^T \\ E(X_{n+1}^T | \mathcal{F}_n) = X_n^T \end{array} \right\} \quad \text{falls} \quad \left\{ \begin{array}{l} X \text{ Supermartingal} \\ X \text{ Martingal} \end{array} \right.$$

für alle $n \in I\!N_0$. Ist X ein Submartingal, so ist $-X$ ein Supermartingal. □

11.15 Hauptsatz (Stopsatz für beschränkte Stopzeiten, Doob): Betrachte einen stochastischen Prozess $X = (X_n)_{n\in I\!N_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, I\!F{=}(\mathcal{F}_n)_{n\in I\!N_0}, P)$ mit der Eigenschaft

$$X = (X_n)_{n\in I\!N_0} \quad \text{ist ein } (P, I\!F)\text{-Martingal (Submartingal, Supermartingal)}\;.$$

a) Für *beschränkte* $I\!\!F$-Stopzeiten $S \le T$ gilt X_S, X_T in $L^1(P)$ und

$$E(X_T|\mathcal{F}_S) \left\{ \begin{array}{c} \ge \\ = \\ \le \end{array} \right\} X_S \quad \text{falls } X \left\{ \begin{array}{l} \text{Submartingal} \\ \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \end{array} \right. .$$

b) Ist $(T_j)_j$ eine aufsteigende Folge *beschränkter* Stopzeiten und setzt man

$$\widetilde{X}_j := X_{T_j} \ , \quad \widetilde{\mathcal{F}}_j := \mathcal{F}_{T_j}$$

(Zeittransformation durch *beschränkte* Stopzeiten), so gilt

$$\widetilde{X} := (\widetilde{X}_j)_j \quad \text{ist ein} \left\{ \begin{array}{l} \text{Submartingal} \\ \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \end{array} \right\} \text{bezüglich } (P, \widetilde{I\!\!F}), \text{ mit } \ \widetilde{I\!\!F} \ := \ (\widetilde{\mathcal{F}}_j)_j \ .$$

Beweis: Es reicht, Martingale und Supermartingale zu betrachten. Sei zuerst S eine durch $k \in I\!\!N$ beschränkte $I\!\!F$-Stopzeit. Für diese gilt $X_S = X_k^S$ und $|X_S| \le |X_0| + \ldots + |X_k|$, also $X_S \in L^1(P)$. Seien nun $S \le T$ durch $k \in I\!\!N$ beschränkte $I\!\!F$-Stopzeiten, sei $C \in \mathcal{F}_S$. Sicher gilt $C \cap \{S = j\} \in \mathcal{F}_j$, $0 \le j \le k$, nach Definition von $\mathcal{F}_S$. Zugleich hat man aber auch $C \cap \{S = j\} \in \mathcal{F}_S$ nach 11.12 a). Wegen $S \le T$ und 11.14 für den eingefrorenen Prozess X^T folgt

$$\begin{aligned} \int_{C\cap\{S=j\}} (X_T - X_S)\, dP \ &= \ \int_{C\cap\{S=j\}} (X_T - X_j)\, dP \\ &= \ \int_{C\cap\{S=j\}} (X_k^T - X_j^T)\, dP \quad \left\{ \begin{array}{ll} \le 0 & \text{falls } X \text{ Supermartingal} \\ = 0 & \text{falls } X \text{ Martingal} \end{array} \right\} . \end{aligned}$$

Summation über $j = 0, 1, \ldots, k$ liefert

$$E(1_C X_T) \left\{ \begin{array}{c} \le \\ = \end{array} \right\} E(1_C X_S) \ \text{ für alle } C \in \mathcal{F}_S$$

und damit die Behauptung von a). Aussage b) folgt sofort aus a) und 11.13. $\square$

11.16 Bemerkung: Für unbeschränkte $I\!\!F$-Stopzeiten wird die Aussage von 11.15 i.a. *falsch.* Zwei typische Beispiele illustrieren dies.

a) Das asymptotische Verhalten des Verzweigungsprozesses X aus Beispiel 11.8 ist bekannt. Wir setzen hier zusätzlich zu 11.8 voraus, dass die Reproduktionsvariablen die Bedingung $\xi_{1,1} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ erfüllen. Im 'kritischen' Fall $m = 1$ ist $X = (X_n)_{n \in I\!\!N_0}$ nach 11.8 ein Martingal mit $X_0 \equiv 1$; zugleich weiss man, dass X im Fall $m=1$ mit Wahrscheinlichkeit 1 aussterben wird: hier gilt

$$\begin{cases} P(X_n = 0 \text{ für schliesslich alle } n) \;=\; 1 \;, \\ P(X_n > 0) \;\sim\; \text{cst} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{für } n \to \infty \end{cases}$$

(siehe Jagers, 1975, p. 25). Die Aussterbezeit ist die Zeit des ersten Eintreffens im Zustand 0: also ist

$$T \;:=\; \inf\{n \in I\!N_0 \;:\; X_n = 0\}$$

eine $I\!F$-Stopzeit, welche P-fast sicher endlich, aber nicht beschränkt ist. Damit erfüllt T nicht die in 11.15 a) gemachte Voraussetzung. Für den Zustand des Verzweigungsprozesses X zur Zeit T gilt $X_T \equiv 0$ P-fast sicher. Trivialerweise ist auch $R \equiv 0$ eine $I\!F$-Stopzeit, und es gilt $X_R = X_0 \equiv 1$. Beides zusammen ergibt

$$R \leq T \;, \quad 1 \;=\; X_R \;\neq\; E(X_T|\mathcal{F}_R) \;=\; 0 \;.$$

b) Ein weiteres Beispiel liefert eine Folge fairer Glücksspiele wie in Beispiel 11.1; wir setzen zusätzlich voraus, dass für das Einzelspiel die Bedingung $Y_1 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ erfüllt sei. Für $m=0$ ist $S=(S_n)_n$ ein Martingal mit Startwert $S_0 \equiv 0$. Man weiss, dass die $I\!F$-Stopzeit

$$T \;:=\; \inf\{\, n \in I\!N_0 \;:\; S_n > 0 \,\} \;,$$

zu der das Vermögen des Spielers zum erstenmal strikt positiv wird, eine P-fast sicher endliche, aber unbeschränkte Stopzeit ist: es gilt (siehe Feller II Kapitel XII, insbesondere (7.10)–(7.12) pp. 414–415)

$$P\,(T > n) \;\sim\; cst\; n^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } n \to \infty$$

Also erfüllt T nicht die in 11.15 a) gemachte Voraussetzung. Es gilt $S_T > 0$ auf $\{T < \infty\}$, also $S_T > 0$ P-fast sicher auf Ω. Damit ist jede Festlegung von $E(S_T|\mathcal{F}_0)$ P-fast sicher strikt positiv: mit der trivialen Stopzeit $R \equiv 0$ entsteht wegen $S_R = S_0 \equiv 0$ die Situation

$$R \leq T \;, \quad S_R \;\neq\; E(S_T|\mathcal{F}_R) \;.$$

Hätte der Spieler Lebenszeit genug, um bis zur Zeit T zu warten, wäre er sicher, zur Zeit T mit einem strikt positiven Gewinn nach Hause gehen. Beachte jedoch: T besitzt nicht einmal einen endlichen Mittelwert, und Doobs Stopsatz setzt Beschränktheit der Stopzeiten voraus. □

Eine Ausnahme gibt es jedoch: in *nichtnegativen Supermartingalen* bleibt der Stopsatz auch mit unbeschränkten Stopzeiten gültig.

11.17 Satz: Betrachte in 11.15 ein *nichtnegatives* $(P, \mathbb{F})$-Supermartingal X. Dann gilt

$$X_S \;\geq\; E(X_T|\mathcal{F}_S)$$

für *beliebige* $\mathbb{F}$-Stopzeiten $S \leq T$, und Transformation durch *beliebige* aufsteigende Folgen $(T_j)_j$ von $\mathbb{F}$-Stopzeiten wie in 1.15 b) liefert wieder ein nichtnegatives Supermartingal.

Beweis: Sei S eine beliebige $\mathbb{F}$-Stopzeit, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

1) Für den nichtnegativen Prozess $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt

$$\begin{array}{lrcl} S(\omega) < \infty : & \lim_{n\to\infty} X_{S\wedge n}(\omega) & = & X_S(\omega) \\ S(\omega) = \infty : & X_{S\wedge n}(\omega) = X_n(\omega) & \geq & 0 \;=\; X_S(\omega) \end{array}$$

weil X_S nach Definition 1.13 auf dem Ereignis $\{S = \infty\}$ den Wert 0 annimmt, und damit

$$X_S \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} X_{S\wedge n}$$

auf ganz Ω. Im Sinne des Integrals über nichtnegative messbare Funktionen wenden wir nun zuerst Fatou 2.8 an, und danach –da X Supermartingal– den Stopsatz 11.15 a) für beschränkte Stopzeiten:

$$E(X_S) \;\leq\; E(\liminf_{n\to\infty} X_{S\wedge n}) \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} E(X_{S\wedge n}) \;\leq\; E(X_0) \;<\; \infty\,.$$

Da X nichtnegativ ist, folgt $X_S \in L^1(P)$.

2) Für $\mathbb{F}$-Stopzeiten $S \leq T$ bleibt zu zeigen: $X_S \geq E_P(X_T|\mathcal{F}_S)$. Wir zeigen dies in der Form

$$(*) \qquad \forall\, A \in \mathcal{F}_S : \quad \int_A X_S\, dP \;\;\geq\; \int_A X_T\, dP\,.$$

Sei dazu $A \in \mathcal{F}_S$ beliebig. Mit 11.12 a) gilt $A \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_S$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen zuerst, dass $A \cap \{S \leq n\}$ sogar zur σ-Algebra $\mathcal{F}_{S\wedge n}$ gehört:

$$\forall\, \ell \in \mathbb{N}_0 : \; (A \cap \{S \leq n\}) \cap \{S \wedge n \leq \ell\} \;=\; \underbrace{(A \cap \{S \leq n\})}_{\in\mathcal{F}_S} \cap \{S \leq \ell\} \quad \in \mathcal{F}_\ell\,.$$

Mit 11.15 a) für die beschränkten $\mathbb{F}$-Stopzeiten $S \wedge n \leq T \wedge n$ folgt dann

$$\begin{aligned} \int_{A\cap\{S\leq n\}} X_S\, dP \;&=\; \int_{A\cap\{S\leq n\}} X_{S\wedge n}\, dP \\ &\geq\; \int_{A\cap\{S\leq n\}} X_{T\wedge n}\, dP \quad \text{(da } X \text{ Supermartingal)} \\ &\geq\; \int_{A\cap\{T\leq n\}} X_{T\wedge n}\, dP \quad \text{(wegen } S \leq T \text{ und } X_{T\wedge n} \geq 0) \\ &=\; \int_{A\cap\{T\leq n\}} X_T\, dP\,. \end{aligned}$$

Lässt man nun auf beiden Seiten dieser Ungleichungskette n gegen ∞ streben, erhält man mit dominierter Konvergenz

$$(**) \qquad \forall\, A \in \mathcal{F}_S : \quad \int_{A\cap\{S<\infty\}} X_S \, dP \;\geq\; \int_{A\cap\{T<\infty\}} X_T \, dP \; .$$

Da $X_S = 0$ auf $\{S = \infty\}$ und $X_T = 0$ auf $\{T = \infty\}$ nach Definition 11.13, ist mit $(**)$ die Behauptung $(*)$ nachgewiesen. □

Bemerkung: Startet man in 11.17 insbesondere mit einem nichtnegativen *$I\!F$-Martingal X*, so wird bei Zeittransformation durch eine aufsteigende Folge beliebiger $I\!F$-Stopzeiten $(T_j)_j$ die Martingaleigenschaft im allgemeinen verlorengehen. Ein Beispiel liefert der Verzweigungsprozess mit $m = 1$ in 11.16 a): der mit $T_0 \equiv 0$, $T_1 = T, ...$ wie dort zeittransformierte Prozess ist nur noch ein Supermartingal $(X_{T_j})_j$ bezüglich der zeittransformierten Filtration $(\mathcal{F}_{T_j})_j$.

C. Doob-Ungleichung und 'aufsteigende Überquerungen'

Die Ungleichung von J.L. Doob und seine Analyse der Anzahl der 'aufsteigenden Überquerungen' ist der Schlüssel zu allen Martingalkonvergenzsätzen. Doobs Buch erschien 1953.

11.18 Doob-Ungleichung: Sei $(X_n)_{n\in I\!N_0}$ ein Sub- oder Supermartingal bezüglich $I\!F = (\mathcal{F}_n)_{n\in I\!N_0}$, auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sei J eine *endliche* Teilmenge von $I\!N_0$, setze

$$\beta := \max\{n : n \in J\} \;, \quad \alpha := \min\{n : n \in J\} \;,$$

sei $r > 0$ beliebig.

i) Ist X ein *Submartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\max_{n\in J} X_n > r) \;\leq\; \int_{\{\max_{n\in J} X_n > r\}} X_\beta \, dP \;\leq\; E(X_\beta^+) \; .$$

ii) Ist X ein *Supermartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\max_{n\in J} X_n > r) \;\leq\; E(X_\alpha) - \int_{\{\max_{n\in J} X_n \leq r\}} X_\beta \, dP \; .$$

iii) Ist X ein *nichtnegatives Supermartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\max_{n\in J} X_n > r) \;\leq\; E(X_\alpha) \; .$$

Beweis: Notwendig gilt $\alpha, \beta \in J$ da J endlich. Definiere

$$T \;:=\; \min\{n \in J : X_n > r\}$$

(mit $\min \emptyset := +\infty$). Dann ist T ist eine $\mathbb{F}$-Stopzeit, denn für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\{T \le \ell\} \;=\; \bigcup_{n \le \ell\,,\, n \in J} \{X_n > r\} \quad \in \mathcal{F}_\ell \,.$$

Für diese gilt $\{\max\limits_{n\in J} X_n > r\} = \{T \le \beta\}$ und $X_T > r$ auf $\{T \le \beta\}$, damit

$$\begin{aligned} r \cdot P(\max_{n\in J} X_n > r) \;&=\; r \cdot P(T \le \beta) \;\le\; \int_{\{T\le\beta\}} X_T\, dP \;=\; \int_{\{T\le\beta\}} X_{T\wedge\beta}\, dP \\ &=\; \int_\Omega (X_{T\wedge\beta} - X_\beta)\, dP \;+\; \int_{\{T\le\beta\}} X_\beta\, dP \qquad (1)\\ &=\; E(X_{T\wedge\beta}) \;-\; \int_{\{T>\beta\}} X_\beta\, dP. \qquad (2)\end{aligned}$$

Der Stopsatz für beschränkte Stopzeiten 11.15 schliesst nun den Beweis ab: ist X ein Submartingal, gilt in dieser Ungleichungskette in (1)

$$\int_\Omega (X_{T\wedge\beta} - X_\beta)\, dP \;\le\; 0$$

und das ist die Aussage 11.18 i); ist X ein Supermartingal, so gilt in (2)

$$E(X_{T\wedge\beta}) \;\le\; E(X_\alpha)$$

und damit 11.18 ii); iii) folgt sofort aus ii). $\square$

Als Folgerung formulieren wir ein analoges Ergebnis für gewisse abzählbare Indexmengen I, das sich später als extrem nützlich heraustellen wird. Als Beispiel kann man an $I = \mathbb{Q} \cap [0, N]$ denken, $N \in \mathbb{N}$.

11.19 Satz: Betrachte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und eine *abzählbare* Indexmenge $I \subset [0, \infty]$ mit

$$\alpha := \inf\{t : t \in I\} \in I \;, \quad \beta := \sup\{t : t \in I\} \in I \;.$$

Sei $X = (X_t)_{t\in I}$ ein Sub- oder ein Supermartingal bezüglich $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$. Dann bleiben die Abschätzungen aus 11.18 gültig, falls man überall '$\max\limits_{n\in J} X_n$' durch '$\sup\limits_{t\in I} X_t$' ersetzt:

i) Ist X ein *Submartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\sup_{t\in I} X_t > r) \;\le\; \int_{\{\sup\limits_{t\in I} X_t > r\}} X_\beta\, dP \;\le\; E(X_\beta^+) \,.$$

ii) Ist X ein *Supermartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\sup_{t\in I} X_t > r) \;\leq\; E(X_\alpha) - \int_{\{\sup\limits_{t\in I} X_t \leq r\}} X_\beta \, dP \; .$$

iii) Ist X ein *nichtnegatives Supermartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\sup_{t\in I} X_t > r) \;\leq\; E(X_\alpha) \; .$$

Beweis: Wähle eine Folge endlicher Teilmengen $J_n \subset I$ mit $J_n \uparrow I$ für $n \to \infty$, setze

$$\alpha_n \;:=\; \min J_n \; , \quad \beta_n \;:=\; \max J_n \; .$$

Für $n \to \infty$ gilt $\alpha_n \downarrow \alpha$, $\beta_n \uparrow \beta$, und

$$F_n := \{\max_{t\in J_n} X_t > r\} \;\uparrow\; \{\sup_{t\in I} X_t > r\} =: F$$

für festes $r > 0$. Aufsteigende Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmassen liefert also

$$r \cdot P(\max_{t\in J_n} X_t > r) \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad r \cdot P(\sup_{t\in I} X_t > r) \quad , \quad n \to \infty \; .$$

Ist X ein Submartingal, kann man für jede endliche Indexmenge J_n die rechte Seite der Ungleichung 11.18 i) wegen $F_n = \{\max\limits_{t\in J_n} X_t > r\} \in \mathcal{F}_{\beta_n}$ fortsetzen zu einer Abschätzung

$$\int_{F_n} X_{\beta_n} \, dP \;\leq\; \int_{F_n} X_\beta \, dP \; ,$$

und hat mit dominierter Konvergenz für $n \to \infty$ nach Definition von $F = \{\sup\limits_{t\in I} X_t > r\}$ und wegen $\beta \in I$

$$\int_{F_n} X_\beta \, dP \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_F X_\beta \, dP \; .$$

Zusammen erhält man für ein Submartingal X: aus 1.18 i) für jedes J_n und $J_n \uparrow I$ folgt

$$r \cdot P(\sup_{t\in I} X_t > r) \;\leq\; \int_{\{\sup\limits_{t\in I} X_t > r\}} X_\beta \, dP \;\leq\; E(X_\beta^+) \; .$$

Ist X ein Supermartingal, kann man für jedes J_n das Integral auf der rechten Seite von 11.18 ii) mit demselben Argument weiter abschätzen durch

$$\int_{F_n^c} X_{\beta_n} \, dP \;\geq\; \int_{F_n^c} X_\beta \, dP \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_{F^c} X_\beta \, dP \; ;$$

klar gilt in diesem Fall auch

$$E(X_{\alpha_n}) \;\leq\; E(X_\alpha) \quad \forall\, n$$

wegen $\alpha \in I$. Aus 1.18 ii) für jedes J_n und $J_n \uparrow I$ folgt also

$$r \cdot P(\sup_{t\in I} X_t > r) \;\le\; E(X_\alpha) \;-\; \int_{\{\sup\limits_{t\in I} X_t \le r\}} X_\beta \, dP \;. \qquad \square$$

Die in 11.19 gemachte Voraussetzung '$\sup I \in I$' gilt sicherlich nicht für Indexmengen der Art $I = [0,1) \cap \mathbb{Q}$ oder $I = \mathbb{N}_0$. Damit erhebt sich die Frage: kann man in Martingalen, Sub- oder Supermartingalen Indexmengen durch Hinzufügen von $\sup I$ in sinnvoller Weise 'abschliessen'?

11.20 Definition: (Abschluss eines Martingals, Submartingals oder Supermartingals) Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}{=}(\mathcal{F}_t)_{t\in I}, P)$ mit Indexmenge $I \subset \mathbb{R}$ ein $(P, \mathbb{F})$-Martingal (Submartingal, Supermartingal) $X = (X_t)_{t\in I}$. Betrachte

$$\beta := \sup\{t : t \in I\} \notin I \;, \quad \overline{I} := I \cup \{\beta\} \subset \overline{\mathbb{R}} \;.$$

Gibt es eine sinnvolle Ergänzung $(X_\beta, \mathcal{F}_\beta)$ 'nach rechts', mit der die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ zu $(\mathcal{F}_t)_{t\in\overline{I}}$ und der Prozess $(X_t)_{t\in I}$ zu $(X_t)_{t\in\overline{I}}$ so fortgesetzt werden kann, dass gilt

$$(X_t)_{t\in\overline{I}} \text{ ist ein Martingal (Submartingal, Supermartingal) bezüglich } \big(P, (\mathcal{F}_t)_{t\in\overline{I}}\big) \;,$$

so heisst $\big((X_t)_{t\in\overline{I}}\,,\,(\mathcal{F}_t)_{t\in\overline{I}}\big)$ *Abschluss* des Martingals (Sub-, Supermartingals) $((X_t)_{t\in I}\,,\,(\mathcal{F}_t)_{t\in I})$.

11.20' Beispiel: Das Martingal $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus 1.7

$$M_n \;:=\; E_P(X|\mathcal{F}_n) \;, \quad n \in \mathbb{N}_0 \;,$$

welches durch Vorgabe einer Zufallsvariable $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{A}$ entsteht, erlaubt einen Abschluss auf zwei Weisen:

i) durch $\beta := +\infty$, $\mathcal{F}_\beta := \mathcal{A}$ und $M_\beta := X$;

ii) durch $\beta := +\infty$, $\mathcal{F}_\beta := \bigvee_n \mathcal{F}_n$ (Notation aus 11.9) und $M_\beta := E_P(\,X \mid \bigvee_n \mathcal{F}_n)$. $\square$

Ein Abschluss im Sinne von 11.20 muss keineswegs existieren. In Teilkapitel D werden wir sehen (Satz 11.33), dass *gleichgradig integrable* Martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ stets einen Abschluss durch

(1.20″) $\qquad \mathcal{F}_\infty \;:=\; \bigvee_n \mathcal{F}_n$ zusammen mit einer $\bigvee_n \mathcal{F}_n$-messbaren *Limesvariable* X_∞

erlauben. Ab jetzt wird für Indexmenge $I = \mathbb{N}_0$ die Bezeichnung $\mathcal{F}_\infty$ ausschliesslich für die in (11.20") –und vorher bereits in 11.9– definierte σ-Algebra $\bigvee_n \mathcal{F}_n = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{F}_n\right)$ reserviert sein.

11.21 Bemerkung: ('Abschluss nach links') Martingale mit Indexmenge $I \subset \mathbb{R}$ so dass

$$\alpha := \inf\{t : t \in I\} \notin I\ , \quad \overline{I} := \{\alpha\} \cup I \subset \overline{\mathbb{R}}$$

kann man stets 'nach links' abschliessen (typische Beispiele solcher Indexmengen sind

$$(*) \qquad I := \{t \in \mathbb{R} : t = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{oder} \quad I := \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

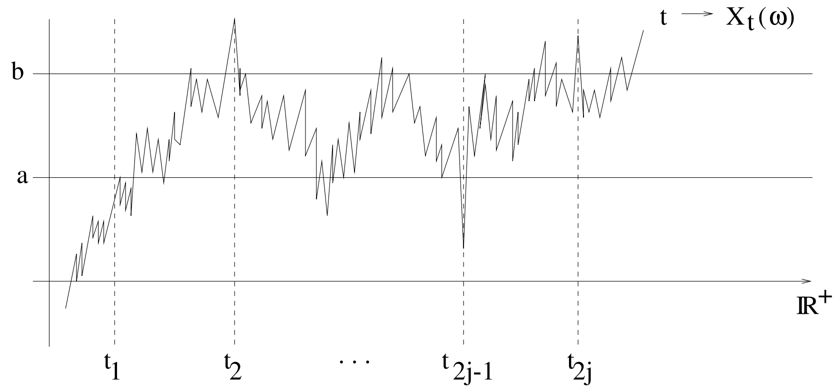
mit $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = -\infty$). Betrachte ein Martingal $X = (X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}{=}(\mathcal{F}_t)_{t\in I}, P)$. Für α wie oben setzt man

$$\mathcal{F}_\alpha := \bigcap_{s\in I} \mathcal{F}_s\ , \quad M_\alpha := E(M_{t_0}|\mathcal{F}_\alpha)$$

für ein beliebiges $t_0 \in I$, und erhält ein Martingal $(M_t)_{t\in\overline{I}}$ bezüglich $(P, (\mathcal{F}_t)_{t\in\overline{I}})$.

Martingale $((M_t)_{t\in I}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I})$ mit Indexmengen vom Typ $(*)$ werden gelegentlich 'Rückwärtsmartingale' genannt; dies ist jedoch ein schlimmer sprachlicher Lapsus, denn auch bei Indexmengen vom Typ $(*)$ gilt die Martingaleigenschaft stets *vorwärts in der Zeit wie in 11.4 definiert.* □

Martingalkonvergenzsätze (siehe Teilkapitel D) beruhen auf Abschätzungen für die 'Anzahl aufsteigender Überquerungen' im Pfad $I \ni t \to X_t(\omega) \in \mathbb{R}$ eines Martingals (oder: Submartingals,



Supermartingals) $X = (X_t)_{t\in I}$. Wir definieren diese.

11.22 Definition: Sei $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ endlich oder abzählbar, sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sei $-\infty < a < b < +\infty$. Für $\omega \in \Omega$ setze

$$N_{ab}^I(\omega) \;:=\; \sup \Big\{ \ell \in \mathbb{N}_0 : \quad \text{es existieren Paare } t_1 < t_2 < \ldots < t_{2\ell-1} < t_{2\ell} \text{ in } I \\ \text{so dass} \left\{ \begin{array}{ll} X_{t_{2j-1}}(\omega) & < a \\ X_{t_{2j}}(\omega) & > b \end{array} \right\} \text{für } 1 \le j \le \ell \Big\} .$$

N_{ab}^I heisst die *Anzahl aufsteigender Überquerungen des Streifens* $[a, b]$ *entlang* I.

11.23 Hauptsatz über 'aufsteigende Überquerungen' (Doob): Sei $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ endlich oder abzählbar, sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein Submartingal bezüglich $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Für jede *endliche Teilmenge* J von I mit $\beta := \max\{t : t \in J\}$ und $\alpha := \min\{t : t \in J\}$ gilt : N_{ab}^J ist eine $\mathcal{F}_\beta$-messbare Zufallsvariable $\Omega \to \mathbb{N}_0$ mit

$$E(N_{ab}^J) \;\le\; \frac{1}{b-a} \big(E(X_\beta) - E(X_\alpha) + E((X_\beta - a)^-) \big) .$$

b) N_{ab}^I ist eine $\overline{\mathbb{N}_0}$-wertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

c) Unter den Voraussetzungen

$$\sup_{t \in I} E(X_t) < \infty, \qquad \sup_{t \in I} E(X_t^-) < \infty \tag{11.24}$$

gibt es eine Konstante $K < \infty$ so dass

$$E(N_{ab}^I) \;\le\; \frac{1}{b-a} (K + |a|) \quad \text{für jede Wahl von } -\infty < a < b < +\infty .$$

d) Ist I unendlich, so gibt es unter der Voraussetzung (11.24) eine P-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ so dass

$$\omega \notin N \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{für jeden Häufungspunkt } \gamma \text{ von } I \\ \text{und jede \textit{monotone} Folge } t_n \to \gamma,\ (t_n)_n \subset I : \\ \lim_{n \to \infty} X_{t_n}(\omega) \text{ existiert in } \overline{\mathbb{R}} . \end{array} \right.$$

Bemerkung: Die Aussage d) ist der wichtigste Teil des Satzes. Diese ist anwendbar z.B. für $I = \mathbb{N}_0$ mit Häufungspunkt $\gamma = +\infty$, wird aber erst recht interessant für abzählbare Indexmengen der Art $\mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ oder $\mathbb{Q} \cap [0, N]$, $N \in \mathbb{N}$, die in $[0, \infty)$ oder in Intervallen $[0, N]$ dicht liegen.

Beweis: 1) Betrachte zuerst nur eine feste endliche Teilmenge $J \subset I$. Für diese sind $\beta := \max\{t : t \in J\}$ und $\alpha := \min\{t : t \in J\}$ in J. Bildet man ähnlich wie in 11.11 b) eine wachsende Folge beschränkter $\mathbb{F}$-Stoppzeiten durch $\tau_0 := \alpha$ und

$$\begin{aligned}
\tau_1 &:= \min\{t \in J : X_t < a\} \wedge \beta \ , \\
\tau_2 &:= \min\{t \in J : t > \tau_1, X_t > b\} \wedge \beta \ , \\
\ldots & \\
\tau_{2j-1} &:= \min\{t \in J : t > \tau_{2(j-1)}, X_t < a\} \wedge \beta \ , \\
\tau_{2j} &:= \min\{t \in J : t > \tau_{2j-1}, X_t > b\} \wedge \beta \ , \\
\ldots &
\end{aligned}$$

dann werden wegen der Endlichkeit von J alle aufsteigenden Überquerungen des Streifens $[a, b]$ im Pfad $\{X(t, \omega) : t \in J\}$ durch Paare (τ_{2j-1}, τ_{2j}) mit $\tau_{2j-1} < \tau_{2j}$ und $X_{\tau_{2j}} > b$ erfasst, und

$$N_{ab}^J = \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{\tau_{2j-1} < \tau_{2j}\ ,\ X_{\tau_{2j}} > b\}} \ .$$

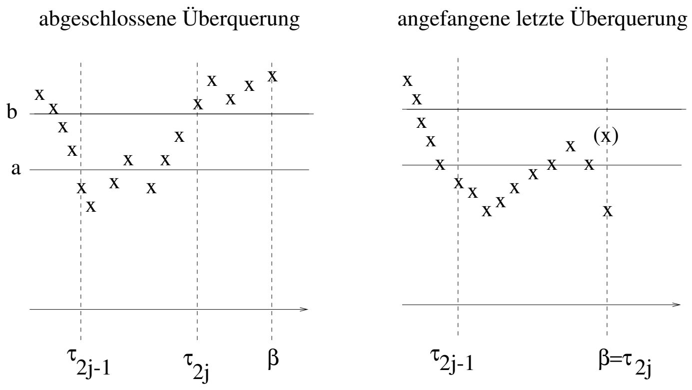
Insbesondere ist N_{ab}^J eine $\mathcal{F}_\beta$–messbare Zufallsvariable (dies sieht man mit 11.12+11.13: die durch β beschränkten Stopzeiten τ_{2j-1} bzw. τ_{2j} sind $\mathcal{F}_{\tau_{2j-1}}$– bzw. $\mathcal{F}_{\tau_{2j}}$–messbare Zufallsvariable, damit $\mathcal{F}_\beta$-messbar, also gilt $\{\tau_{2j-1} < \tau_{2j}\} \in \mathcal{F}_\beta$; zugleich ist $X_{\tau_{2j}}$ eine $\mathcal{F}_\beta$–messbare Zufallsvariable, also liegt jedes der Ereignisse $\{\tau_{2j-1} < \tau_{2j}\ ,\ X_{\tau_{2j}} > b\}$ in der σ-Algebra $\mathcal{F}_\beta$). Doob's Stopsatz 11.15 für beschränkte Stopzeiten im Submartingal $(X_t)_{t \in I}$ zeigt nun für beliebige $\ell \geq 1$

$$\begin{aligned}
E(X_\beta) - E(X_\alpha) &\geq E(X_{\tau_{2\ell}}) - E(X_{\tau_0}) = \sum_{j=1}^{\ell} E(X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2(j-1)}}) \\
&= \sum_{j=1}^{\ell} \left\{ E(X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}}) + \underbrace{E(X_{\tau_{2j-1}} - X_{\tau_{2(j-1)}})}_{\geq 0 \text{ nach } 11.15} \right\} \\
&\geq \sum_{j=1}^{\ell} E(X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}}) \ .
\end{aligned}$$

Nach Definition der Stopzeiten τ_{2j-1} bzw. τ_{2j} gilt aber

$$\begin{aligned}
X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}} &\geq b - a && \text{falls } \tau_{2j-1} < \tau_{2j}, X_{\tau_{2j}} > b \\
X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}} &\geq -(X_\beta - a)^- && \text{falls } \tau_{2j-1} < \tau_{2j}, X_{\tau_{2j}} \leq b \\
X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}} &= 0 && \text{falls } \tau_{2j-1} = \tau_{2j}
\end{aligned}$$

wobei die erste dieser drei Zeilen einer vollendeten Überquerung des Streifens $[a, b]$ entspricht, die zweite einer vor der Zeit β begonnenen, aber zur Zeit β unvollendeten Überquerung:



(für eine solche gilt $X_\beta = X_{\tau_{2j}}$ zusammen mit der Abschätzung

$$X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}} \;\geq\; 0 \cdot 1_{\{X_\beta \geq X_{\tau_{2j-1}}\}} - \left(X_\beta - X_{\tau_{2j-1}}\right)^- \, 1_{\{X_\beta < X_{\tau_{2j-1}}\}} \;\geq\; -(X_\beta - a)^-$$

der Negativteile). Die dritte der obengenannten Zeiten entspricht einem Indexpaar, für das beide Stopzeiten τ_{2j-1}, τ_{2j} bereits an $\beta = \max J$ trunkiert und damit 'trivial' sind. Zusammen ergibt sich aus der obenstehenden Ungleichungskette

$$E(X_\beta) - E(X_\alpha) \;\geq\; (b-a)\, E(\, N_{ab}^J \,) \;-\; E(\,(X_\beta - a)^-\,)$$

und damit die Aussage a) des Satzes.

2) Für eine abzählbare Indexmenge $I \subset \overline{I\!R}$ wählt man wieder eine aufsteigende Folge endlicher Teilmengen $J_n \subset I$, $J_n \uparrow I$, und schreibt $\alpha_n := \min\{t : t \in J_n\}$, $\beta_n := \max\{t : t \in J_n\}$ wie in 1). Dann erhält man N_{ab}^I als aufsteigenden Limes $\mathcal{F}_{\beta_n}$-messbarer Zufallsvariablen

$$N_{ab}^I \;=\; \lim_{n\to\infty} N_{ab}^{J_n} \;;$$

insbesondere ist damit N_{ab}^I eine $\mathcal{A}$-messbare $\overline{I\!N_0}$-wertige Zufallsvariable, und es gilt nach 1)

$$E(N_{ab}^I) \;=\; \lim_{n\to\infty} E(N_{ab}^{J_n}) \;=\; \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{b-a} \left(E(X_{\beta_n}) - E(X_{\alpha_n}) + E(\,(X_{\beta_n} - a)^-\,) \right) \right] .$$

Unter Voraussetzung (11.24) gibt es dafür obere Schranken, die nicht mehr von n abhängen:

$$E(X_{\beta_n}) \;\leq\; \sup_{t\in I} E(X_t) \;<\; \infty$$

$$-E(X_{\alpha_n}) \;=\; -E(X_{\alpha_n}^+ - X_{\alpha_n}^-) \;\leq\; E(X_{\alpha_n}^-) \;\leq\; \sup_{t\in I} E(X_t^-) \;<\; \infty$$

$$E((X_{\beta_n} - a)^-) \;\leq\; E(X_{\beta_n}^-) + |a| \;\leq\; \sup_{t\in I} E(X_t^-) + |a|$$

womit die Aussagen b)+c) des Satzes (mit $K := 2 \sup_{t\in I} E(X_t^-) + \sup_{t\in I} E(X^t)\,)$ bewiesen sind.

3) Sei nun I nicht endlich und sei $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von I. Betrachte aufsteigende Konvergenz $t \uparrow \gamma$, $t \in I$, und definiere

$$N^\gamma := \left\{ \omega \in \Omega : -\infty \leq \liminf_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega) < \limsup_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega) \leq +\infty \right\} \in \mathcal{A} .$$

Für jedes $\omega \in N^\gamma$ kann man ein geeignetes (auf ω zugeschnittenes) Paar rationaler Zahlen zwischen $\liminf_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega)$ und $\limsup_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega)$ einschieben: dies bedeutet

$$N^\gamma = \bigcup_{\substack{a<b \\ a,b \in \mathbb{Q}}} \left\{ \omega \in \Omega : \liminf_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega) < a < b < \limsup_{t \uparrow \gamma} X_t(\omega) \right\} .$$

Aus dieser Darstellung wird klar, dass es für jedes $\omega \in N^\gamma$ einen geeigneten Streifen $[a, b]$ gibt, den der ω-Pfad $t \to X_t(\omega)$ für $t \uparrow \gamma$, $t \in I$, unendlich oft aufsteigend überquert. Damit gilt

$$(\diamond) \qquad N^\gamma \subset \bigcup_{\substack{a<b \\ a,b \in \mathbb{Q}}} \left\{ \omega \in \Omega : N^I_{a,b}(\omega) = +\infty \right\} =: N \quad \in \mathcal{A} .$$

Die auf der rechten Seite definierte Menge $N \in \mathcal{A}$ ist unter der Voraussetzung (11.24) notwendig eine P-Nullmenge, denn jede der Variablen $N^I_{a,b}$, $a < b \in \mathbb{Q}$, liegt nach der schon bewiesenen Aussage b) des Satzes in $L^1(P)$ und ist damit insbesondere P-fast sicher endlich. Weiter hängt die Menge N aus $(\diamond)$ nicht mehr von dem eingangs betrachteten Häufungspunkt $\gamma \in \overline{I}$ ab, so dass dieselbe P-Nullmenge N als Obermenge schon *alle* zu beliebigen Häufungspunkten γ der Indexmenge I zu bildenden Ausnahmemengen N^γ enthält. Gezeigt ist:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{für } \omega \in \Omega \setminus N \text{ existiert } \lim\limits_{n \to \infty} X_{t_n}(\omega) \\ \text{für jeden Häufungspunkt } \gamma \text{ von } I \text{ und jede gegen } \gamma \text{ aufsteigende Folge } (t_n)_n \subset I \end{array} \right. .$$

Das Argument für absteigende Konvergenz $t \downarrow \gamma$, $t \in I$, geht analog, und führt zu derselben P-Nullmenge N aus $(\diamond)$. Damit ist auch Aussage d) des Satzes bewiesen. $\square$

D. Konvergenzsätze für Martingale, Sub- und Supermartingale

Doob's Abschätzungen für die Anzahl aufsteigender Überquerungen im Pfad $t \to X_t(\omega)$ sind der Kern aller Konvergenzs ätze für Martingale (oder Submartingale, Supermartingale).

11.25 Satz (Doob): Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ einen Prozess $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, sei X dabei entweder

$$\text{ein } (P, \mathbb{F})\text{-Submartingal mit } \sup_{n \in \mathbb{N}_0} E|X_n| < \infty$$

oder

$$\text{ein } (P, \mathbb{F})\text{-Supermartingal mit } \sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(X_n^-) \; < \; \infty \; .$$

Mit $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_n \mathcal{F}_n$ wie in (1.20") gibt es dann eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ so dass

$$X_n \; \longrightarrow \; X_\infty \quad P\text{-fast sicher für } n \to \infty \; , \quad E(|X_\infty|) \; \leq \; \liminf_{n \to \infty} E|X_n| \; < \; \infty \; .$$

Beweis: 1) Sei X ein Submartingal mit $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E|X_n| < \infty$. Stets – vgl. 2.2. g) – gilt

$$G \; := \; \{\omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \text{ existiert in } \overline{\mathbb{R}}\} \quad \in \mathcal{F}_\infty \; .$$

Mit Satz 11.23 d) – wegen $X_n \leq |X_n|$, $X_n^- \leq |X_n|$ ist dessen Voraussetzung (11.24) erfüllt – folgt

$$P(G) \; = \; 1$$

und damit insbesondere: $X_n = 1_G X_n$ P-fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Definiere

$$\widetilde{X}_\infty \; := \; \lim_{n \to \infty} 1_G X_n \; .$$

Dies ist eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare, $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Zufallsvariable; nach Fatou 2.8 für nichtnegative messbare numerische Funktionen greift die Voraussetzung des Satzes

$$E(|\widetilde{X}_\infty|) \; = \; E(\liminf_{n \to \infty} |X_n|) \; \leq \; \liminf_{n \to \infty} E|X_n| \; \leq \; \sup_{n \in \mathbb{N}_0} E|X_n| \; < \; \infty$$

und erzwingt $\widetilde{X}_\infty \in L^1(P)$. Abänderung von $\widetilde{X}_\infty$ auf einer P-Nullmenge in $\mathcal{F}_\infty$ liefert eine reellwertige Festlegung der Limesvariable

$$X_\infty \; := \; \widetilde{X}_\infty 1_{\{|\widetilde{X}_\infty| < \infty\}} \; .$$

2) Sei X ein Supermartingal mit $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(X_n^-) < \infty$. Dann ist $\widetilde{X} := -X$ ein Submartingal. Aus

$$|\widetilde{X}_n| \; = \; |X_n| \; = \; X_n^- + X_n^+ \; = \; 2X_n^- + X_n$$

und der Supermartingaleigenschaft $E(X_n) \leq E(X_0)$ folgt

$$E(|\widetilde{X}_n|) \; \leq \; 2E(X_n^-) + E(X_0) \; \leq \; < \; \sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(X_n^-) + E(X_0) \; < \; \infty$$

nach Voraussetzung. Damit erfüllt das Submartingal $\widetilde{X} := -X$ die Bedingung $\sup_n E(|\widetilde{X}_n|) < \infty$ aus Schritt 1). Damit ist die Behauptung für das Supermartingal X bewiesen. $\square$

Eine wichtige Folgerung ist:

11.26 Satz: Ein nichtnegatives Supermartingal $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert P-fast sicher gegen eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$.

Beweis: Dies ist 11.25 mit $X_n^- \equiv 0$ für alle n. □

11.27 Hauptsatz: Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein $(P, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0})$-Martingal (oder ein Submartingal, oder ein Supermartingal) mit der Eigenschaft

die Familie $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist gleichgradig integrierbar.

Dann gibt es eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ so dass gilt:

$$X_n \longrightarrow X_\infty \quad P\text{-fast sicher und in } L^1(P) \text{ für } n \to \infty . \tag{11.28}$$

Beweis: 1) Sei X ein Submartingal. Wegen gleichgradiger Integrierbarkeit der $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ (vgl. 2.25) gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $K < \infty$ so dass

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n| \geq K(\varepsilon)\}} |X_n| \, dP \; < \; \varepsilon \; ;$$

insbesondere gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(|X_n|) \; \leq \; K(\varepsilon) + \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \int_{\{|X_n| \geq K(\varepsilon)\}} |X_n| \, dP \quad < \; \infty \; .$$

Damit erfüllt das Submartingal X dann die Bedingung aus 11.25, und 11.25 liefert P-fast sichere Konvergenz der X_n gegen eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Limesvariable $X_\infty \in L^1(P)$. Gleichgradige Integrabilität liefert nach 2.28 (mit $p = 1$) zusätzlich die Konvergenz in $L^1(P)$.

2) Für ein gleichgradig integrierbares Martingal ist nach 1) alles bewiesen. Sei nun X ein gleichgradig integrierbares Supermartingal. Dann ist $\widetilde{X} := (-X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal, und 1) angewandt auf $\widetilde{X}$ liefert die Behauptung für X. □

Bemerkung: a) Wir werden in Satz 11.33 sehen, dass die gleichgradige Integrierbarkeit in 11.27 als Bedingung für (11.28) *nicht* abgeschwächt werden kann.
b) Eine einfache hinreichende Bedingung für gleichgradige Integrierbarkeit in 11.27 ist nach 2.27

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(|X_n|^p) \; < \; \infty \quad \text{für ein } p > 1 \; .$$

Häufig kann man dies etwa für $p = 2$ leicht nachprüfen. In 11.37 werden wir darauf zurückkommen.

11.29 Hilfssatz: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, P)$ ein Martingal (Submartingal, Supermartingal) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Gibt es eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ so dass (11.28) gilt, so kann $((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\,,\,(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ durch Hinzunahme von $(X_\infty, \mathcal{F}_\infty)$ aus (11.28)+(11.20") zu einem Martingal (Submartingal, Supermartingal)

$$\Big((X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}_0}\,,\,(\mathcal{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}_0}\Big)$$

fortgesetzt werden ($\overline{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n)$). Dies ist ein Abschluss wie in 11.20, aber mit der zusätzlichen Eigenschaft (11.28).

Beweis: Die L^1-Konvergenz in (11.28) liefert für jedes feste m

$$\lim_{n\ge m\,,\,n\to\infty} \int_F X_n\,dP \;=\; \int_F X_\infty\,dP \quad \text{für alle } F\in\mathcal{F}_m.$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal (Submartingal, Supermartingal), also ist die Folge $(\int_F X_n\,dP)_{n\ge m}$ konstant (bzw. aufsteigend, bzw. fallend), also gilt für jedes m und jedes $F\in\mathcal{F}_m$

$$E_P(1_F\,X_m) \quad \left\{\begin{array}{c} = \\ \le \\ \ge \end{array}\right\} \quad E_P(1_F\,X_\infty) \quad \text{falls } (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Submartingal} \\ \text{Supermartingal} \end{array}\right\}.$$

Damit ist ein Abschluss als Martingal (Submartingal, Supermartingal) gefunden. □

11.30 Konvention: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Stopzeit $T:\Omega\to\overline{\mathbb{N}}_0$ und ein Martingal (Submartingal, Supermartingal) $(X_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}_0}$ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}_0}$. *In diesem Zusammenhang* definiert man den Zustand von X zur Zeit T oft auch durch

$$(*) \qquad X_T \;:=\; \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}_0} X_n 1_{\{T=n\}}$$

mit Hilfe der hier zur Verfügung stehenden Variablen X_∞, anstelle der (die Konstante 0 als 'default value' benutzenden) allgemeinen Definition aus 11.13. Wir benutzen die auf 11.27, (11.28) und 11.29 zugeschnittene Konvention $(*)$ (anstelle der – in der allgemeinen Situation nicht verbesserbaren – Definition aus 11.13) *stets nur mit ausdrücklichem Hinweis.*

Auch mit Konvention $(*)$ ist X_T eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable: mit Benutzung des $\mathcal{F}_\infty$-messbaren X_∞ auf dem Ereignis $\{T=\infty\}$ ist X_T nach $(*)$ zuerst wieder $\mathcal{F}_\infty$-messbar; danach bleibt für Mengen $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ das Argument aus 11.13

$$\{X_T\in B\}\cap\{T=\ell\} \;\in\; \mathcal{F}_\ell\,, \quad \ell\in\mathbb{N}_0$$

unverändert gültig: also ist $\{X_T \in B\}$ in $\mathcal{F}_T$. $\square$

11.31 Satz: Sei $I \subset [0, \infty]$ eine Indexmenge. Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t \in I}$, adaptiert an eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ in $\mathcal{A}$.

a) Ist $X = (X_t)_{t \in I}$ ein Submartingal, ist $g : I\!R \to I\!R$ konvex und nichtfallend, und ist $g(X_t)$ in $L^1(P)$ für alle $t \in I$, so ist auch $(g(X_t))_{t \in I}$ ein Submartingal.

b) Ist $X = (X_t)_{t \in I}$ ein Martingal, so ist $(|X_t|)_{t \in I}$ ein nichtnegatives Submartingal.

Beweis: a) Sei X ein Submartingal. Zunächst ist eine konvexe Funktion $g : I\!R \to I\!R$ messbar, da $\{g \le a\}$ für jedes $a \in I\!R$ ein Intervall ist. Der Prozess $(g(X_t))_{t \in I}$ ist damit $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$-adaptiert, und nach Voraussetzung gilt $g(X_t) \in L^1(P)$ für alle $t \in I$. Für ein Submartingal X liefert die Jensen-Ungleichung 10.10 kombiniert mit der Monotonie von $g(\cdot)$

$$s < t \ \in I \quad \Longrightarrow \quad E(\, g(X_t)\, | \mathcal{F}_s) \ \ge \ g(\underbrace{E(X_t | \mathcal{F}_s)}_{\ge X_s}) \ \ge \ g(X_s)\, .$$

b) Sei X ein Martingal. Die Jensen-Ungleichung 10.10 für die konvexe Funktion $g(x) = |x|$ zeigt

$$E(\, |X_t|\, | \mathcal{F}_s) \ \ge \ |\, \underbrace{E(X_t | \mathcal{F}_s)}_{= X_s}\, | \ = \ |X_s|\, .$$

$\square$

11.32 Satz: Betrachte ein *nichtnegatives* Submartingal $X = (X_n)_{n \in \overline{I\!N_0}}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \overline{I\!N_0}}, P)$. Sei $\mathcal{T}$ die Klasse aller $(\mathcal{F}_n)_{n \in I\!N_0}$-Stopzeiten mit endlich vielen Werten (d.h.: für $T \in \mathcal{T}$ ist $\{T(\omega) : \omega \in \Omega\}$ eine *endliche* Teilmenge von $\overline{I\!N}_0$). Dann gilt (mit Konvention $(*)$ aus 11.30)

die Familie $\{X_T : T \in \mathcal{T}\}$ ist gleichgradig integrierbar.

Beweis: Wegen der Nichtnegativität von X ist zu zeigen (vgl. 2.25): zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $K = K(\varepsilon) < \infty$ so dass

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \int_{\{X_T \ge K\}} X_T \, dP \ < \ \varepsilon\, .$$

1) Bei Indexmenge $\overline{I\!N_0}$ gilt $X_n \in L^1(P)$ für alle $n \in \overline{I\!N_0}$. Ist $T \in \mathcal{T}$ und sind $0 \le t_1 < \ldots < t_\ell \le +\infty$ (abhängig von T) die endlich vielen für T möglichen Werte, so gilt $X_T \in L^1(P)$ wegen der trivialen

Abschätzung $|X_T| \le |X_{t_1}| + \ldots + |X_{t_\ell}|$. Für Ereignisse $F \in \mathcal{F}_T$ liefert eine Zerlegung nach den möglichen Werten von T

$$(\times) \qquad E(1_F(X_\infty - X_T)) \;=\; \sum_{i=1}^{\ell} E(1_{F\cap\{T=t_i\}}(X_\infty - X_{t_i})) \;\ge\; 0$$

da X Submartingal und da $F \cap \{T = t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i}$. Wegen $\{X_T \ge K\} \in \mathcal{F}_T$ gilt insbesondere

$$(+) \qquad \int_{\{X_T \ge K\}} X_T \, dP \;\le\; \int_{\{X_T \ge K\}} X_\infty \, dP$$

für jede Wahl von $K < \infty$.

2) Da $X_\infty \in L^1(P)$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass

$$(++) \qquad A \in \mathcal{A}, \quad P(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_A X_\infty \, dP \;<\; \varepsilon \;:$$

hierzu wählt man zuerst ein $N \in I\!N$ so dass

$$\int_{\{X_\infty > N\}} X_\infty \, dP \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \,,$$

setzt $\delta := \frac{1}{N} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$, dann gilt für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) < \delta$

$$\int_A X_\infty \, dP \;\le\; N \cdot P(A \cap \{X_\infty \le N\}) + \int_{\{X_\infty > N\}} X_\infty \, dP \;<\; \varepsilon \,.$$

3) Wählt man zu $\varepsilon > 0$ und $\delta = \delta(\varepsilon)$ aus 2) nun K gross genug, d.h. $K > \frac{1}{\delta} E(X_\infty)$, liefert $(\times)$

$$P(X_T \ge K) \;\le\; \frac{E(X_T)}{K} \;\le\; \frac{E(X_\infty)}{K} \;<\; \delta$$

gleichmässig über die Familie aller $T \in \mathcal{T}$; danach zeigen (+) und (++)

$$\int_{\{X_T \ge K\}} X_T \, dP \;\;\le\;\; \int_{\{X_T \ge K\}} X_\infty \, dP \;\;<\;\; \varepsilon$$

gleichmässig über die Familie aller $T \in \mathcal{T}$. Das ist die Behauptung. □

11.33 Hauptsatz über gleichgradig integrierbare Martingale: Sei $(X_n)_{n \in I\!N_0}$ ein Martingal auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in I\!N_0}, P)$. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

i) die Familie $\{X_n : n \in I\!N_0\}$ ist gleichgradig integrierbar;

ii) $(X_n)_n$ konvergiert P-fast sicher und in $L^1(P)$ gegen eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Variable X_∞;

iii) X kann zu einem Martingal $(X_n)_{n \in \overline{I\!N_0}}$ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \overline{I\!N_0}}$ fortgesetzt werden.

Unter jeder dieser Bedingungen gibt es (bis auf P-Nullmengen in $\mathcal{F}_\infty$) *genau einen Abschluss* für X als Martingal. Mit diesem gilt in der Fortsetzung aus iii)

$$X_n \;=\; E(X_\infty|\mathcal{F}_n) \quad \text{P-fast sicher, für jedes } n \in I\!N_0 \;.$$

Beweis: i)$\Longrightarrow$ii) ist eine Teilaussage von 11.27; ii)$\Longrightarrow$iii) ist 11.29. Wir zeigen iii)$\Longrightarrow$i): Ist $(X_n)_{n\in\overline{I\!N_0}}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\overline{I\!N_0}}$, so ist nach 11.31 b) $(|X_n|)_{n\in\overline{I\!N_0}}$ ein nichtnegatives Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\overline{I\!N_0}}$. Nach 11.32 ist dann –da die konstanten Zeiten $T\equiv n$ insbesondere Stopzeiten in $\mathcal{T}$ sind– zuerst $\{|X_n| : n \in I\!N_0\}$ und damit auch $\{X_n : n \in I\!N_0\}$ eine gleichgradig integrierbare Familie. □

Mit 11.33 stellt sich also das einfache Beispiel 1.7 (Martingale als sukzessive Prognosen an ein unendlich fernes Ziel) als Prototyp gleichgradig integrierbarer Martingale heraus.

11.34 Stopsatz in gleichgradig integrierbaren Martingalen: Betrachte ein Martingal $X = (X_n)_{n\in I\!N_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, I\!F = (\mathcal{F}_n)_{n\in I\!N_0}, P)$ mit der Eigenschaft

$$\text{die Familie } \{X_n : n \in I\!N_0\} \text{ ist gleichgradig integrierbar ;}$$

bilde mit X_∞ aus 11.33 den Abschluss von X als Martingal.

a) Dann gilt für *beliebige* $I\!F$-Stopzeiten $S \le T$ (mit Konvention $(*)$ aus 11.30 für X_S und X_T):

$$E(X_T|\mathcal{F}_S) \;=\; X_S \;.$$

b) Jede aufsteigende Folge $(T_j)_j$ von $I\!F$-Stopzeiten liefert ein zeittransformiertes Martingal

$$\widetilde{X} = (X_{T_j})_j \quad \text{bezüglich} \quad \widetilde{I\!F} \;=\; (\mathcal{F}_{T_j})_j \;.$$

Beweis: Wir arbeiten mit dem Abschluss $\Big((X_n)_{n\in\overline{I\!N_0}}\,,\,(\mathcal{F}_n)_{n\in\overline{I\!N_0}}\Big)$ nach 11.27-11.29 bzw. nach 11.33. Da b) aus a) folgt, reicht es, a) zu beweisen. Seien dazu $S \le T$ beliebige $I\!F$-Stopzeiten; zu zeigen ist

$$(\circ) \qquad E(1_F X_S) \;=\; E(1_F X_T) \quad , \quad F \in \mathcal{F}_S \;.$$

Dabei kann man sich auf Ereignisse $F \in \mathcal{F}_S$ mit $F \subset \{S < \infty\}$ beschränken: als $I\!F$-Stopzeit ist S eine $\mathcal{F}_S$–messbare Zufallsvariable, also $F \cap \{S < \infty\} \in \mathcal{F}_S$, und

$$X_S \;=\; X_\infty \;=\; X_T \quad \text{auf} \quad \{S = \infty\}$$

wegen $S \le T$ und Konvention $(*)$ in 11.30. Folglich gilt die Aussage $(\circ)$, wenn sie für $F \cap \{S < \infty\}$ anstelle von F bewiesen werden kann.

1) Wir betrachten also $F \in \mathcal{F}_S$ mit $F \subset \{S < \infty\}$ und approximieren aufsteigend durch

$$F_n \ := \ F \cap \{S \le n\} \ \uparrow \ F \ , \quad n \to \infty \ .$$

Wegen $F \in \mathcal{F}_S$ gilt wie in Beweisschritt 2) von 11.17

$$F_n \ \in \ \mathcal{F}_{S \wedge n} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 \ ,$$

denn für $\ell \in \mathbb{N}_0$ beliebig

$$F_n \cap \{S \wedge n \le \ell\} \ = \ (F \cap \{S \le n\}) \cap \{S \le \ell\} \ = \ F \cap \{S \le \ell \wedge n\} \ \in \ \mathcal{F}_{\ell \wedge n} \ \subset \ \mathcal{F}_\ell \ .$$

Wegen $F_n \in \mathcal{F}_{S \wedge n}$ aber liefert Doob's Stopsatz für beschränkte Stopzeiten 11.15

$$(\diamond) \qquad E(1_{F_n} X_{S \wedge n}) \ = \ E(1_{F_n} X_{T \wedge n})$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

2) Wir betrachten das Martingal $(X_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$. Für dieses ist zuerst $(|X_n|)_{n \in \overline{\mathbb{N}_0}}$ ein nichtnegatives Submartingal nach 11.31 b). Dann aber ist die Familie $\{|X|_{S \wedge n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ gleichgradig integrierbar nach 11.32, denn jedes $S \wedge n$ ist eine Stopzeit mit endlich vielen Werten. Insbesondere sind die Familien $\{X_{S \wedge n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ und erst recht $\{1_{F_n} X_{S \wedge n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ gleichgradig integrierbar. Nach 11.33 konvergiert $(X_n)_n$ P-fast sicher gegen X_∞. Für F und $(F_n)_n$ aus Schritt 1) konvergiert damit $(1_{F_n} X_n)_n$ P-fast sicher gegen $1_F X_\infty$. Wegen gleichgradiger Integrierbarkeit wird daraus

$$(+) \qquad 1_{F_n} X_{S \wedge n} \quad \longrightarrow \quad 1_F X_S \quad P\text{-fast sicher und in } L^1(P), \ n \to \infty.$$

Wiederholt man das Argument mit T statt S, erhält man für *dieselbe* Folge $(F_n)_n$

$$(++) \qquad 1_{F_n} X_{T \wedge n} \quad \longrightarrow \quad 1_F X_T \quad P\text{-fast sicher und in } L^1(P), \ n \to \infty.$$

In Kombination mit $(\diamond)$ liefern $(+)$ und $(++)$

$$E(1_F X_S) \ = \ E(1_F X_T)$$

für alle $F \in \mathcal{F}_S$ mit der Eigenschaft $F \subset \{S < \infty\}$. Nach den Anfangsbemerkungen reicht dies zum Nachweis der Behauptung $(\circ)$; dies schliesst den Beweis des Satzes ab. $\square$

E. L^p-Ungleichungen und L^p-Martingale

Unter welchen Bedingungen kann für Martingale wie in 11.33 die dortige Konvergenzaussage zu einer Konvergenz in L^p, $p > 1$, verschärft werden?

11.35 Satz: Betrachte den *Maximumsprozess* $X^* = (X_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu einem *nichtnegativen* Submartingal $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, P)$

$$X_n^* \;:=\; \max_{0\le k\le n} X_k \;, \quad n \in \mathbb{N}_0 \;.$$

Für beliebiges $p > 1$ und q definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt die Abschätzung

$$\|X_n\|_p \;\le\; \|X_n^*\|_p \;\le\; q \cdot \|X_n\|_p \;\le\; \infty$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, mit $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\Omega,\mathcal{A},P)}$.

Beweis: Das erste Ungleichheitszeichen gilt wegen Nichtnegativität von X. Für das zweite Ungleichheitszeichen reicht es, den Beweis für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ unter den Voraussetzungen $X_n \in L^p(P)$ (sonst wäre nichts zu zeigen) und $0 < \|X_n^*\|_p \le \infty$ (sonst wäre auch nichts zu zeigen) zu führen. Unter diesen zwei Voraussetzungen fixiere $n \ge 1$ und $p > 1$, und assoziiere $q = \frac{p}{p-1}$ zu $p > 1$.

1) Betrachte ein Paar nichtfallender stetiger Funktionen $F, G : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $F(0) = G(0) = 0$, aufgefasst als Verteilungsfunktionen σ-endlicher Masse auf $(0,\infty)$, welche durch

$$(*) \qquad G(dr) \;=\; \frac{1}{r}\, F(dr) \quad \text{auf } (0,\infty)$$

gekoppelt sind (ein Beispiel wird in Schritt 2) gegeben). Da das Submartingal X nach Voraussetzung nichtnegativ ist, gilt mit Fubini für jedes $N < \infty$ nach $(*)$

$$\begin{aligned} E(\,F(X_n^* \wedge N)\,) \;&=\; \int_\Omega P(d\omega) \int_0^{X_n^*(\omega)\wedge N} F(dr) \;=\; \int_\Omega P(d\omega) \int_0^N 1_{\{X_n^*(\omega) > r\}}\, F(dr) \\ &=\; \int_0^N F(dr)\, P(\{X_n^* > r\}) \;=\; \int_0^N G(dr)\, r\, P(\,X_n^* > r\,) \end{aligned}$$

und weiter unter Ausnutzung der Doob-Ungleichung 11.18 i)

$$\begin{aligned} &\le\; \int_0^N G(dr) \left[\int_{\{\,X_n^* > r\,\}} X_n \, dP \right] \\ &=\; \int_\Omega P(d\omega)\, X_n(\omega) \int_0^{X_n^*(\omega)\wedge N} G(dr) \\ &=\; E\,(\,X_n\, G(X_n^* \wedge N)\,) \quad < \quad \infty \,. \end{aligned}$$

Mit Hölder 2.14 erhalten wir für p und q wie oben

$$(**) \qquad E(F(\,X_n^* \wedge N\,)\,) \;\leq\; E\,(\,X_n\,G(X_n^* \wedge N)\,) \;\leq\; \|X_n\|_p \cdot \|G(X_n^* \wedge N)\|_q \;.$$

2) Nach Wahl von p und q gilt $\frac{1}{q} = \frac{1}{p}(p{-}1)$ und $(p{-}1)q = p$. Also gilt $(*)$ insbesondere für

$$F(y) \;:=\; y^p \;, \quad G(y) \;:=\; q\,y^{p-1} \;, \quad 0 < y < \infty \;,$$

und man schreibt mit $Z := X_n^* \wedge N$

$$\|G(Z)\|_q \;=\; q\,\left(\int [Z^{p-1}]^q dP\right)^{1/q} \;=\; q\,\left(\int Z^p dP\right)^{\frac{1}{p}(p-1)} \;=\; q\,\|Z\|_p^{p-1} \;.$$

Dann aber nimmt $(**)$ die folgende Form an:

$$(\|X_n^* \wedge N\|_p)^p \;=\; E\,(F(X_n^* \wedge N)) \;\leq\; \|X_n\|_p \cdot \|G(X_n^* \wedge N)\|_q \;=\; \|X_n\|_p \cdot q \cdot (\|X_n^* \wedge N\|_p)^{p-1} \;.$$

Nach Voraussetzung zu Beginn des Beweises gilt $\|X_n\|_p < \infty$ und $0 < \|X_n^*\|_p \leq \infty$. Wegen Beschränktheit aller $X_n^* \wedge N$ gilt daher $0 < \|X_n^* \wedge N\|_p < \infty$ für hinreichend grosses N. Dann aber erlaubt die letzte Ungleichung Division durch $(\|X_n^* \wedge N\|_p)^{p-1}$ und zeigt

$$\|X_n^* \wedge N\|_p \;\leq\; q \cdot \|X_n\|_p \;.$$

Hieraus folgt für $N \to \infty$ die Aussage des Satzes. $\square$

11.36 Folgerung: Sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein *nichtnegatives* Submartingal und X^* der Maximumsprozess zu X wie in 11.35. Sei $p > 1$. Dann ist die Bedingung

$$(*) \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(X_n^p) \;<\; \infty$$

hinreichend für

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n \;\in\; L^p(P) \;,$$

und mit $q := \frac{p}{p-1}$ gilt

$$\|\sup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n\,\|_p \;\;\leq\;\; q \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|X_n\|_p \;.$$

Beweis: Unter $(*)$ ist $(X_n^p)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Submartingal: wende dazu 11.31 a) an auf das nichtnegative Submartingal X und die konvexe und nichtfallende Funktion $g(y) := (y \vee 0)^p$. Folglich ist $n \to E(\,X_n^p\,)$ nichtfallend auf $\mathbb{N}_0$. Mit diesem Zusatz liefert 11.35 für das nichtnegative Submartingal X

$$(+) \qquad \sup_{0 \leq k \leq n} \|X_k\|_p \;=\; \|X_n\|_p \;\leq\; \|X_n^*\|_p \;\leq\; q \cdot \|X_n\|_p \;=\; q \cdot \sup_{0 \leq k \leq n} \|X_n\|_p$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n \to \infty$ liefern Nichtnegativität von X und monotone Konvergenz

$$X_n^* \;\uparrow\; Z \quad \text{und} \quad E(\,(X_n^*)^p\,) \;\uparrow\; E(\,Z^p\,) \;\le\; \infty$$

mit einer $[0,\infty]$-wertigen Zufallsvariable $Z := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n^*$. Für diese erzwingen (+) und (∗) aber

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|X_n\|_p \;\le\; \|\,Z\,\|_p \;\le\; q \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|X_n\|_p \;<\; \infty\,.$$

Insbesondere ist in einem nichtnegativen Submartingal die Voraussetzung (∗) bereits hinreichend ist für die (i.a. wesentlich stärkere) Aussage $Z = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} X_n^* \in L^p(P)$. □

Mit Hilfe von 11.36 können wir den Konvergenzsatz für gleichgradig integrierbare Martingale (11.27, 11.33) noch einmal verschärfen.

11.36' Definition: Sei $p > 1$. Ein Martingal $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$ mit

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} E(\,|X_n|^p\,) \;<\; \infty$$

heisst L^p-*Martingal* .

11.37 Hauptsatz über L^p-Martingale: Sei $p > 1$. Auf $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, P)$ betrachte ein L^p-Martingal $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Für dieses gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} |X_n| \;\in\; L^p(P)$$

und

$$\|\sup_{n \in \mathbb{N}_0} |X_n|\,\|_p \;\le\; q \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \|X_n\|_p \;<\; \infty$$

mit $q := \frac{p}{p-1}$. Die Familie $\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist gleichgradig integrierbar, und es gilt

$$X_n \;\longrightarrow\; X_\infty \quad P\text{-fast sicher und in } L^p(P) \text{ für } n \to \infty.$$

Beweis: Da X Martingal, ist $(|X_n|)_n$ ein nichtnegatives Submartingal nach 11.31 b). Für $p > 1$ wurden die ersten beiden Aussagen in 11.36 bewiesen. Gilt $Z \in L^p(P)$ für $Z := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |X_n|$, so gibt es wie im Beweis von 11.36 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass gilt

$$A \in \mathcal{A}\,,\; P(A) < \delta \quad\Longrightarrow\quad \int_A Z^p\,dP \;\le\; \varepsilon\,.$$

Nach Definition von Z impliziert dies

$$A \in \mathcal{A}\ ,\ P(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n \in I\!N_0} \int_A |X_n|^p \, dP \ \leq \ \int_A Z^p \, dP \ \leq \ \varepsilon$$

und damit gleichgradige Integrierbarkeit der Familie $\{|X_n|^p : n \in I\!N_0\}$, vgl. 2.25'.

Wegen $p > 1$ kann man nun für $n \to \infty$ den Hauptsatz 11.33 (Konvergenz $X_n \longrightarrow X_\infty$ P-fast sicher und in $L^1(P)$) mit dem Satz von der dominierten Konvergenz ($p > 1$) kombinieren und erhält so die letzte der vier Aussagen des Satzes. □

Wir schliessen das Kapitel mit einem Beispiel.

11.38 Beispiel: (Martingalstruktur in Verzweigungsprozessen, Fortsetzung von Beispiel 11.8) Seien $(X_n)_{n \in I\!N_0}$ wie in 11.8 der Verzweigungsprozess

$$X_0 \equiv 1\ ; \quad X_{n+1} = \sum_{j=1}^{X_n} \xi_{n+1,j}\ , \quad n = 0, 1, \ldots\ ,$$

mit iid Kinderzahlen $(\xi_{n,j})_{n,j}$, $I\!N_0$-wertig und in $L^1(P)$, definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $I\!F = (\mathcal{F}_n)_{n \in I\!N_0}$ ist die von X erzeugte Filtration: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_j,\, 0 \leq j \leq n)$. Die mittlere Kinderzahl pro Individuum ist $E(\xi_{1,1}) = m$. Nach 11.8 ist $M = (M_n)_{n \in I\!N_0}$

$$M_n \ := \ \frac{X_n}{m^n}\ , \quad n \in I\!N_0$$

ein $(P, I\!F)$-Martingal mit $M_0 \equiv 1$. M hat die folgenden Eigenschaften:

i) Wegen $M_n \geq 0$ für alle n ist M insbesondere ein nichtnegatives Supermartingal, konvergiert also nach 11.25+11.26 P-fast sicher gegen eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Limesvariable $M_\infty \geq 0$; dabei gilt $M_\infty \in L^1(P)$ und $E(M_\infty) \leq 1$.

ii) Verschärft man die an die Kinderzahlen $\xi_{n,j}$ gemachten Voraussetzungen zu $\xi_{1,1} \in L^2(P)$, $\sigma^2 := \mathrm{Var}(\xi_{1,1})$, so gilt (siehe Jagers 1975, S. 21-23)

$$\begin{cases} m = 1: \ \ \mathrm{Var}(X_n) \ = \ \sigma^2 \cdot n, & n = 1, 2, \ldots \\ m \neq 1: \ \ \mathrm{Var}(X_n) \ = \ \sigma^2 \cdot m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

und damit

$$E(M_n^2) \ = \ \frac{1}{m^{2n}} \left(\mathrm{Var}(X_n) + (E(X_n))^2 \right)\ .$$

iii) Betrachte den 'superkritischen' Fall $m > 1$, unter der Bedingung $\xi_{1,1} \in L^2(P)$. Hier nach ii)

$$\sup_{n \in I\!N_0} E(M_n^2) \ < \ \infty\ ,$$

also ist M ein L^2-Martingal, und 11.37 zeigt

$$M_n \longrightarrow M_\infty \quad P\text{-fast sicher und in } L^2(P) \text{ für } n \to \infty.$$

Die L^2-Konvergenz impliziert

$$E(M_\infty) \;=\; 1\,, \quad E(M_\infty^2) \;=\; \lim_n E(M_n^2) \;=\; \frac{\sigma^2}{m^2 - m}\,.$$

Als L^2-Martingal ist $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ insbesondere ein gleichgradig integrables Martingal, und $(M_\infty, \mathcal{F}_\infty)$ liefert für $(M, \mathbb{F})$ einen *Abschluss als Martingal.*

iv) Man mache sich klar, dass damit im 'superkritischen' Fall $m > 1$ das Wachstumsverhalten der Pfade des Verzweigungsprozesses beschrieben wird

$$\text{für } P\text{-fast alle } \omega \in \{M_\infty > 0\} \text{ gilt: } \; X_n(\omega) \;\sim\; m^n \cdot M_\infty(\omega) \;\text{ für } n \to \infty\;;$$

dies ist exponentielles Wachstum $n \to m^n$ mit einer $\mathcal{F}_\infty$-messbaren Zufallsvariable X_∞ als Proportionalitätsfaktor. Ein Zusatzargument mit wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen (Athreya und Ney 1972, S. 7–10) zeigt, dass Aussterben die einzige Alternative zu exponentiellem Wachstum ist:

$$\{M_\infty = 0\} \;=\; \{\, X_n = 0 \text{ für schliesslich alle } n\,\} \quad P\text{-fast sicher}\,.$$

v) Für $m \leq 1$ weiss man (siehe Jagers 1975, Athreya und Ney 1972)

$$P(\, X_n = 0 \text{ für schliesslich alle } n\,) \;=\; 1\,;$$

also gilt hier $M_\infty \equiv 0$. Ein Abschluss von $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch Hinzunahme der Limesvariable M_∞ ist also kein Abschluss als Martingal, sondern nur ein *Abschluss als nichtnegatives Supermartingal.* Insbesondere kann nach Satz 11.33 das Martingal $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ im Fall $m \leq 1$ kein gleichgradig integrables Martingal sein. □