Reinhard Höpfner

Vorlesung Stochastik II

Kapitel XII:

Konsistenzsatz von Kolmogorov und

Konstruktion stochastischer Prozesse im Sinne von endlichdimensionalen Randverteilungen

Wintersemester 2019/20

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

January 13, 2020

Übersicht zu Kapitel XII :

A. Produkträume und Konsistenzsatz

Produkträume und Projektionen 12.1

kanonischer Prozess 12.1'

endlichdimensionale Randverteilungen 12.2 – 12.3

projektive Systeme 12.4 – 12.5

Konsistenzsatz von Kolmogorov 12.6

B. Anwendungen des Konsistenzsatzes

Produktmasse 12.7

Markovketten 12.7'–12.8

Halbgruppen von Übergangswahrscheinlichkeiten 12.9

Markovprozesse in stetiger Zeit 12.9'–(12.11)

Shifts und Markoveigenschaft 12.12–(12.13)

Faltungshalbgruppen 12.14

Prozesse mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen 12.14'–12.14"

Brownsche Bewegung 12.15

Poisson-Prozess 12.16

*C. Mehr über Lévy-Prozesse

Lévy-Chintchine Formel und Poissonmischungen (12.17)–12.18

symmetrisch stabile Prozesse (endlichdimensionale Randverteilungen) 12.19

Bemerkungen zum allgemeinen eindimensionalen Lévy-Prozess 12.20

A. Produkträume und Konsistenzsatz

Kapitel 5.A setzt bis auf den Begriff eines polnischen Raumes nur den Stoff voraus, der *bis 4.12 einschliesslich* bereitgestellt wurde, und beweist den Konsistenzsatz auf dieser Grundlage. Dieses Teilkapitel könnte also direkt im Anschluss an 4.12 gelesen werden.

12.1 Voraussetzungen und Bezeichnungen: In diesem Kapitel benutzen wir durchgehend die folgenden Notationen:

a) $(E,\mathcal{E})$ ist ein messbarer Raum, $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge; wir schreiben $\mathcal{H}(I)$ für die Familie aller endlichen Teilmengen von I. Wir betrachten den Produktraum $(E^I, \mathcal{E}^I)$

$$E^I \;:=\; \mathop{\times}_{t\in I} E \;=\; \{\, \alpha \mid \alpha \text{ ist Abbildung } I \to E \,\}\;, \quad \mathcal{E}^I \;:=\; \bigotimes_{t\in I} \mathcal{E}$$

wobei $\bigotimes_{t\in I} \mathcal{E}$ die vom System $\mathcal{S}$ aller *Säulen mit Rechteckbasis*

$$\{\, \alpha \in E^I \;:\; \alpha(t) \in A_t \;\text{ für }\; t \in J \,\}\;, \quad J \in \mathcal{H}(I)\;,\; A_t \in \mathcal{E}\;,\; t \in J$$

im Produktraum E^I erzeugte σ-Algebra ist (vgl. 4.11' und 4.12).

b) Für jedes $t \in I$ bezeichne π_t die Koordinatenprojektion

$$\pi_t \;:\quad E^I \ni \alpha \;\longrightarrow\; \alpha(t) \;\in E\;.$$

Nach Konstruktion ist $\pi_t : (E^I, \mathcal{E}^I) \to (E,\mathcal{E})$ messbar und es gilt

$$\mathcal{E}^I \;=\; \sigma(\pi_t : t \in I)\;.$$

c) Assoziiere zu $J \in \mathcal{H}(I)$ wie in Kapitel 4.A betrachtet $|J|$-fache Produkträume

$$(E^J, \mathcal{E}^J) \quad , \quad E^J = \mathop{\times}_{t\in J} E \quad , \quad \mathcal{E}^J = \bigotimes_{t\in J} \mathcal{E}$$

und Projektionen

$$\pi_J \;:\quad E^I \ni \alpha \;\longrightarrow\; (\alpha(t))_{t\in J} \;\in E^J\;.$$

Da $\mathcal{E}^J$ als endlicher Produktraum vom System der Rechtecke

$$\mathop{\times}_{t\in J} A_t\;, \quad A_t \in \mathcal{E} \;\text{ für jedes }\; t \in J$$

erzeugt wird, da Urbilder von Rechtecken unter π_J

$$(\pi_J)^{-1}(\bigtimes_{t\in J} A_t) \;=\; \{\,\pi_J \in \bigtimes_{t\in J} A_t\,\} \;=\; \{\,\alpha \in E^I \;:\; \alpha(t)\in A_t \;\text{ für }\; t\in J\,\}$$

Säulen mit Rechteckbasis in E^I sind, ist $\pi_J : (E^I, \mathcal{E}^I) \to (E^J, \mathcal{E}^J)$ eine messbare Abbildung.

d) Zu je zwei endlichen Teilmengen $K \subset J$ von I definieren wir eine Projektion

$$\pi^J_K \;:\quad E^J \ni (\alpha(t))_{t\in J} \quad\longrightarrow\quad (\alpha(t))_{t\in K} \;\in E^K$$

'von J nach K': dann ist $\pi^J_K : (E^J, \mathcal{E}^J) \to (E^K, \mathcal{E}^K)$ messbar, und es gilt

$$\pi_K(\alpha) \;=\; \pi^J_K(\,\pi_J(\alpha)\,)\,, \quad \alpha \in E^I\,.$$

12.1' Bemerkungen: Als Beispiel betrachte man $(E, \mathcal{E}) := (I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$, $I := [0,\infty)$, und interpretiere die Indexmenge I als Zeit.

a) Die Elemente $\alpha \in E^I$ des Produktraumes liefern als Abbildungen $\alpha : I \to I\!R^d$ *alle möglichen Pfade* $I\!R^d$-wertiger stochastischer Prozesse.

b) Mit dem Prozess der Koordinatenprojektionen $\pi := (\pi_t)_{t\ge 0}$ aus 12.1 b) hat man stets einen stochastischen Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}) := (E^I, \mathcal{E}^I)$, vgl. 11.2'; π heisst *kanonischer Prozess* auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$.

c) Unter jedem Wahrscheinlichkeitsmass Q, welches auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ betrachtet werden kann, erhält der kanonische Prozess π gewisse *Eigenschaften*; die 'elementarste' ist die Verteilung unter Q

$$\mathcal{L}\left((\pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_l}) \mid Q\right)\;, \quad 0 \le t_1 < \ldots < t_l < \infty$$

beliebiger Tupel $(\pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_l})$ von Koordinatenprojektionen. Für $J := \{t_1, \ldots, t_l\}$ ist dies das Bild $\mathcal{L}(\pi_J|Q)$ von Q unter der in 12.1 c) definierten Projektion $\pi_J : E^I \to E^J$.

12.2 Definition: Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmass auf dem Produktraum $(E^I, \mathcal{E}^I)$. Setze

$$Q_J \;:=\; \mathcal{L}(\pi_J|Q) \;=\; Q^{\pi_J} \quad \text{Wahrscheinlichkeitsmass auf } (E^J, \mathcal{E}^J)$$

für alle $J \in \mathcal{H}(I)$. Dann heisst die Kollektion von Wahrscheinlichkeitsmassen

$$\{\,Q_J : J \in \mathcal{H}(I)\,\}$$

System der *endlich-dimensionalen Randverteilungen (finite dimensional distributions)* von Q.

12.3 Hilfssatz: Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmass auf dem Produktraum $(E^I, \mathcal{E}^I)$. Das System der endlich-dimensionalen Randverteilungen von Q hat die Eigenschaft

$$K \subset J \in \mathcal{H}(I) \quad \Longrightarrow \quad Q_K = \mathcal{L}(\pi^J_K \mid Q_J) .$$

Beweis: Dies folgt sofort aus $\pi_K = \pi^J_K \circ \pi_J$ in 12.1 d). □

Eine wichtigere Fragestellung ist aber die folgende: man möchte auf $(\Omega, \mathcal{A}) = (E^I, \mathcal{E}^I)$ Wahrscheinlichkeitsmasse Q so *konstruieren*, dass Tupel $(\pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_l})$ unter Q *vorgeschriebene* Verteilungen annehmen. Man kann z.B. wünschen, in Dimension $d = 1$ für beliebige $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_t < \infty$ als Verteilung von $(\pi_{t_1}, \ldots, \pi_{t_l})$ unter Q eine Normalverteilung $\mathcal{N}(0, (t_i \wedge t_j)_{i,j=1,\ldots,l})$ zu erhalten, $l \geq 1$, was (nach einer einfachen linearen Transformation gemäss 7.5, siehe auch 12.17 unten) der Forderung nach *unabhängigen und normalverteilten Zuwächsen* im kanonischen Prozess π unter Q entspricht:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{unter } Q \text{ seien für } l \geq 1 \text{ und } 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l < \infty \text{ beliebig} \\ \text{die Zuwächse } \pi_{t_i} - \pi_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}) \text{ unabhängig,} \\ \text{und es gelte } \pi_0 = 0 \;\; Q\text{-fast sicher .} \end{array} \right.$$

Diese Vorgabe wird in 12.17 und 13.9 zur Definition der Brownschen Bewegung führen. Bisher ist jedoch noch nicht gesichert, ob (und wenn ja: warum) ein Wahrscheinlichkeitsmass Q mit der gewünschten Eigenschaft auf $(\Omega, \mathcal{A}) = (E^I, \mathcal{E}^I)$ existiert. Der Konsistenzsatz von Kolmogorov (12.6 unten) liefert das Werkzeug, mit dem diese Frage beantwortet werden kann.

12.4 Definition: Sei mit den Bezeichnungen aus 12.1 für jedes $J \in \mathcal{H}(I)$ ein Wahrscheinlichkeitsmass P_J auf $(E^J, \mathcal{E}^J)$ vorgegeben. Die Familie $\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ heisst *projektives System* falls die folgende *Konsistenzbedingung* gilt:

$$K \subset J \in \mathcal{H}(I) \quad \Longrightarrow \quad P_K = \mathcal{L}(\pi^J_K \mid P_J) .$$

12.5 Bemerkung: a) Für jedes auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ vorgegebene Wahrscheinlichkeitsmass Q ist nach 12.3 das System der endlichdimensionalen Randverteilungen von Q ein projektives System.

b) Wir betonen, dass $\{Q_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ aus 12.2+12.3 und $\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ aus 12.4 Systeme von Wahrscheinlichkeitsmassen sind, die auf *verschiedenen* Räumen $(E^J, \mathcal{E}^J) = (\bigtimes_{t \in J} E, \bigotimes_{t \in J} \mathcal{E})$ definiert sind, $J \in \mathcal{H}(I)$. Insbesondere darf man für Mengen $J_1 \neq J_2$ gleicher Mächtigkeit die Räume $(E^{J_1}, \mathcal{E}^{J_1})$ und $(E^{J_2}, \mathcal{E}^{J_2})$ nicht identifizieren: offenkundig sind im Fall

$$l \geq 1 \,, \quad 0 < \underbrace{t_1 < \ldots < t_l}_{=:J_1} \;<\; \underbrace{s_1 < \ldots < s_l}_{=:J_2} < \infty \,, \quad A_1, \ldots, A_l \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

die zwei Forderungen

$$\text{es gelte } \pi_{t_i} \in A_i \,,\; 1 \leq i \leq l \,,\; \text{mit Wahrscheinlichkeit } \mathcal{N}(0, (t_i \wedge t_j)_{i,j=1,\ldots,l})(\mathop{\times}_{i=1}^{l} A_i)$$

$$\text{es gelte } \pi_{s_i} \in A_i \,,\; 1 \leq i \leq l \,,\; \text{mit Wahrscheinlichkeit } \mathcal{N}(0, (s_i \wedge s_j)_{i,j=1,\ldots,l})(\mathop{\times}_{i=1}^{l} A_i)$$

essentiell verschieden. □

Die Fragestellung lautet also: wann kann ein *vorgegebenes* projektives System

$$\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$$

aufgefasst werden als System endlich-dimensionaler Randverteilungen

$$\{\, \mathcal{L}(\pi_J | P) : J \in \mathcal{H}(I) \,\}$$

eines auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ existierenden Wahrscheinlichkeitsmasses P ?

12.6 Konsistenzsatz von Kolmogorov: Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in 12.1: ist $(E, \mathcal{E})$ *polnisch*, so gibt es zu jedem vorgegebenen projektiven System

$$\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\} \,, \quad P_J \text{ Wahrscheinlichkeitsmass auf } (E^J, \mathcal{E}^J)$$

genau ein Wahrscheinlichkeitsmass P auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ so dass

$$P_J \;=\; \mathcal{L}(\pi_J | P) \quad \text{für jedes } J \in \mathcal{H}(I) \,.$$

Beweis: 1) Wir zeigen: das System $\mathcal{Z}$ aller *Zylindermengen* in $\mathcal{E}^I$

$$\{\pi_J \in A_J\} = (\pi_J)^{-1}(A_J) \,, \quad A_J \in \mathcal{E}^J \,, \quad J \in \mathcal{H}(I)$$

ist eine Algebra in $\mathcal{E}^I$, welche $\mathcal{E}^I$ erzeugt (beachte: die in 12.1 eingeführten Säulen mit Rechteckbasis sind spezielle Zylindermengen).

Bew.: Klar gehört $E^I = \{\pi_J \in E^J\}$ zu $\mathcal{Z}$; mit $\{\pi_J \in A_J\}$ ist das Komplement $\{\pi_J \in (E^J \setminus A_J)\}$ in $\mathcal{Z}$; auch sind endliche Vereinigungen von Zylindermengen wieder Zylindermengen:

Betrachte $\{\pi_{J_1} \in A_{J_1}\}$, $\{\pi_{J_2} \in A_{J_2}\}$, setze $J := J_1 \cup J_2$ und $A_J^{(i)} := (\pi^J_{J_i})^{-1}(A_{J_i})$, $i = 1, 2$. Dann gilt $J \in \mathcal{H}(I)$ und $A_J^{(i)} \in \mathcal{E}^J$, und $\{\pi_{J_i} \in A_{J_i}\} = \{\pi_J \in A_J^{(i)}\}$ wegen $\pi_{J_i} = \pi^J_{J_i} \circ \pi_J$. Also gilt

$$\{\pi_{J_1} \in A_{J_1}\} \cup \{\pi_{J_2} \in A_{J_2}\} \;=\; \{\pi_J \in A_J^{(1)} \cup A_J^{(2)}\} \;\in \mathcal{Z} \; .$$

2) Wir zeigen: wegen der vorausgesetzten Projektivität von $\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ wird durch

$$(*) \qquad \widetilde{P}(Z) \;:=\; P_J(A_J) \quad \text{falls } Z = \{\pi_J \in A_J\} \; , \; A_J \in \mathcal{E}^J \; , \; J \in \mathcal{H}(I)$$

ein Inhalt $\widetilde{P}$ auf $\mathcal{Z}$ definiert.

Bew.: i) Zuächst ist $\widetilde{P}$ als Mengenfunktion auf $\mathcal{Z}$ wohldefiniert: Betrachte verschiedene Darstellungen derselben Zylindermenge $Z \in \mathcal{Z}$

$$Z \;=\; \{\pi_{K_1} \in A_{K_1}\} \;=\; \{\pi_{K_2} \in A_{K_2}\} \; , \quad K_1, K_2 \in \mathcal{H}(I) \; , \; A_{K_i} \in \mathcal{E}^{K_i} \; .$$

Mit $J := K_1 \cup K_2$ und $A_J^{(i)} := (\pi^J_{K_i})^{-1}(A_{K_i})$ wie in 1) muss dann gelten $A_J^{(1)} = A_J^{(2)}$.

Da $\{P_{J'} : J' \in \mathcal{H}(I)\}$ projektiv, gilt $P_{K_i} = \mathcal{L}(\pi^J_{K_i} | P_J)$; zusammen folgt

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(\{\pi_{K_1} \in A_{K_1}\}) \;&=\; P_{K_1}(A_{K_1}) \;=\; \big(\mathcal{L}(\pi^J_{K_1} | P_J)\big)\,(A_{K_1}) \\
&=\; P_J\left(\, (\pi^J_{K_1})^{-1} A_{K_1} \, \right) \;=\; P_J(A_J^{(1)}) \\
&=\; P_J(A_J^{(2)}) \;=\; \ldots \;=\; \widetilde{P}(\{\pi_{K_2} \in A_{K_2}\}) \; .
\end{aligned}$$

Also ist $P(Z)$ in $(*)$ unabhängig von der Darstellung der Zylindermenge $Z \in \mathcal{Z}$ festgelegt.

ii) $\widetilde{P}$ ist endlich additiv auf $\mathcal{Z}$: Betrachte disjunkte Zylindermengen $Z_i = \{\pi_{J_i} \in A_{J_i}\}$, $i = 1, \ldots, \ell$, setze $J := J_1 \cup \ldots \cup J_\ell$ und $A_J^{(i)} := (\pi^J_{J_i})^{-1}(A_{J_i})$. Da P_J ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(E^J, \mathcal{E}^J)$ ist, erhält man

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(\dot{\bigcup_{i=1}^{\ell}} Z_i) \;&=\; \widetilde{P}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\ell}} \{\pi_{J_i} \in A_{J_i}\} \right) \;=\; \widetilde{P}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\ell}} \{\pi_J \in A_J^{(i)}\} \right) \;=\; \widetilde{P}\left(\{\pi_J \in \dot{\bigcup_{i=1}^{\ell}} A_J^{(i)}\} \right) \\
&=\; P_J\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\ell}} A_J^{(i)} \right) \;=\; P_J(A_J^{(1)}) + \ldots + P_J(A_J^{(\ell)}) \\
&=\; P_{J_1}(A_{J_1}) + \ldots + P_{J_\ell}(A_{J_\ell}) \quad = \; \widetilde{P}(Z_1) + \ldots \widetilde{P}(Z_\ell) \; .
\end{aligned}$$

3) Wir zeigen: der durch $(*)$ definierte Inhalt $\widetilde{P}$ auf $\mathcal{Z}$ ist σ-stetig in $\emptyset$.

Bew: Betrachte absteigende Folgen $(Z_n)_n$ in $\mathcal{Z}$; zu zeigen ist:

$$(**) \qquad \lim_{n \to \infty} \widetilde{P}(Z_n) > \varepsilon \;\text{ für ein } \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n \geq 1} Z_n \neq \emptyset \; .$$

Schreibe $Z_n = \{\pi_{J_n} \in A_{J_n}\}$, $A_{J_n} \in \mathcal{E}^{J_n}$, $J_n \in \mathcal{H}(I)$; wie in Schritt 2) darf man die Folge $(J_n)_n$ aufsteigend wählen: $J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset J_n \subset J_{n+1} \subset \ldots$ in $\mathcal{H}(I)$.

i) Mit $(E, \mathcal{E})$ sind auch alle $|J_n|$-fachen Produkträume $(E^{J_n}, \mathcal{E}^{J_n})$ polnisch (vgl. 10.25 b), 4.14 oder Billingsley (1968) S. 225). Kompakte Approximierbarkeit von Wahrscheinlichkeitsmassen P_{J_n} auf polnischen Räumen $(E^{J_n}, \mathcal{E}^{J_n})$ nach 10.26 c) oder 6.1' liefert für ε aus $(**)$

$$\begin{aligned}&\text{für jedes } n \geq 1 \text{ gibt es ein Kompaktum } K_{J_n} \text{ in } E^{J_n} \text{ mit}\\ &K_{J_n} \subset A_{J_n}\ , \quad P_{J_n}(A_{J_n} \backslash K_{J_n}) \ \leq\ \varepsilon \cdot 2^{-(n+1)}\end{aligned}$$

(beachte: die Kompakta K_{J_n}, $n \geq 1$, leben in verschiedenen Räumen). Betrachte nun eine absteigende Folge von Zylindermengen $(Y_n)_n$ definiert durch

$$Y_n \ := \ \bigcap_{i=1}^{n} \{\pi_{J_i} \in K_{J_i}\} \quad \subset \quad \{\pi_{J_n} \in A_{J_n}\} \ = \ Z_n\ , \quad n \geq 1\ .$$

Da $(Z_n)_n$ absteigend, gilt nach Wahl der K_{J_i}

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(Z_n \backslash Y_n) \ &= \ \widetilde{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(Z_n \backslash \{\pi_{J_i} \in K_{J_i}\})\right) \ \leq \ \widetilde{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(\ Z_i \backslash \{\pi_{J_i} \in K_{J_i}\}\ )\right)\\ &= \ \widetilde{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(\ \{\pi_{J_i} \in A_{J_i} \backslash K_{J_i}\}\ )\right) \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \cdot 2^{-(i+1)} \ = \ \frac{1}{2}\,\varepsilon\end{aligned}$$

und damit

$$(+) \qquad \widetilde{P}(Y_n) \ = \ \underbrace{\widetilde{P}(Z_n)}_{>\varepsilon} - \widetilde{P}(Z_n \backslash Y_n) \ > \ \frac{1}{2}\,\varepsilon \ > \ 0 \quad \text{für alle } n.$$

Wir wollen nun zeigen

$$\bigcap_{n \geq 1} Y_n \ \neq \ \emptyset\ ,$$

dann folgt die zu beweisende Behauptung aus $Y_n \subset Z_n$.

ii) Wegen (+) enthält jedes Y_n mindestens einen Punkt $\alpha_n \in E^I$. Betrachte die Folge $(\alpha_n)_n$. Da $(Y_n)_n$ fallend, gilt

$$\text{für jedes feste } m: \quad (\alpha_n)_{n \geq m} \ \subset \ Y_m\ .$$

Nach Definition von $Y_m = \bigcap_{i=1}^{m} \{\pi_{J_i} \in K_{J_i}\}$ bedeutet das

$$\text{für alle } n, i \text{ mit } n \geq i: \quad \pi_{J_i}(\alpha_n) \ \in \ K_{J_i}\ .$$

Für jedes feste i ist also $(\pi_{J_i}(\alpha_n))_{n \geq i}$ eine Folge im Kompaktum K_{J_i} in E^{J_i}. Sukzessiv in i vorgehend, wählt man sich zunächst eine Teilfolge $\left(n_k^{(1)}\right)_k$ von $\mathbb{N}$ so dass

$$\pi_{J_1}(\alpha_{\left(n_k^{(1)}\right)}) \quad \longrightarrow: \quad \beta_1 \ \in \ K_{J_1} \quad (\text{Konvergenz in } E^{J_1} \text{ für } k \to \infty)\ ,$$

dann eine Teilfolge $\left(n_k^{(2)}\right)_k$ von $\left(n_k^{(1)}\right)_k$ so dass

$$\pi_{J_2}(\alpha_{\left(n_k^{(2)}\right)}) \quad \longrightarrow : \quad \beta_2 \in K_{J_2} \quad \text{(Konvergenz in } E^{J_2} \text{ für } k \to \infty) ,$$

dann eine Teilfolge $\left(n_k^{(3)}\right)_k$ von $\left(n_k^{(2)}\right)_k$ so dass

$$\pi_{J_3}(\alpha_{\left(n_k^{(3)}\right)}) \quad \longrightarrow : \quad \beta_3 \in K_{J_3} \quad \text{(Konvergenz in } E^{J_3} \text{ für } k \to \infty) ,$$

u.s.w.; schliesslich betrachtet man die Diagonalfolge

$$(\gamma_m)_m \ : \quad \gamma_m := \alpha_{\left(n_m^{(m)}\right)} \in E^I .$$

Die Diagonalfolge leistet für jedes feste i

$$(++) \qquad (\gamma_m(t))_{t \in J_i} = \pi_{J_i}(\gamma_m) \quad \longrightarrow \quad \beta_i \in K_{J_i} \quad \text{(Konvergenz in } E^{J_i} \text{ für } m \to \infty) .$$

Konvergenz im Produktraum E^{J_i} ist komponentenweise Konvergenz, also zeigt (++)

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_m(t) \quad \text{existiert in } E \ \text{ für jedes } t \in \bigcup_{i\geq 1} J_i .$$

Mit beliebigem $x_0 \in E$ als 'default value' ist dann

$$\gamma := (\gamma(t))_{t\in I} \quad \text{definiert durch} \quad \gamma(t) := \begin{cases} \lim\limits_m \gamma_m(t), & t \in \bigcup\limits_{i\geq 1} J_i \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Element von E^I. Für jedes i gilt wegen (++)

$$\pi_{J_i}(\gamma) = \beta_i \in K_{J_i} ,$$

also ist ein Punkt $\gamma \in E^I$ mit der Eigenschaft

$$\gamma \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \{\pi_{J_i} \in K_{J_i}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$$

gefunden. Insbesondere ist $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ nichtleer. Wegen $Y_n \subset Z_n$ ist damit erst recht $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$ nichtleer, und (∗∗) ist bewiesen. Somit ist der in (∗) definierte Inhalt $\widetilde{P}$ auf $\mathcal{Z}$ σ-stetig in $\emptyset$.

4) Für beliebiges $J \in \mathcal{H}(I)$ gilt $E^I = \{\pi_J \in E^J\} \in \mathcal{Z}$ und $\widetilde{P}(E^I) = P_J(E^J) = 1$; insbesondere ist $\widetilde{P}$ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{Z}$. Wegen 3) und Fortsetzungssatz 1.18+1.31 kann der Inhalt $\widetilde{P}$ auf $\mathcal{Z}$ eindeutig zu einem Wahrscheinlichkeitsmass P auf $\sigma(\mathcal{Z}) = \mathcal{E}^I$ fortgesetzt werden.

Es bleibt zu verifizieren, dass diese Fortsetzung P so ist, dass die endlichdimensionalen Randverteilungen von P das vorgegebene System $\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ reproduzieren. Betrachte dazu ein festes $J \in \mathcal{H}(I)$ und Zylindermengen $Z := \{\pi_J \in A_J\}$ mit beliebigen $A_J \in \mathcal{E}^J$. Dann gilt

$$P(Z) = P(\{\pi_J \in A_J\}) = \mathcal{L}(\pi_J | P)(A_J)$$

zusammen –da P den in $(*)$ definierten Inhalt $\widetilde{P}$ fortsetzt– mit

$$P(Z) \;=\; \widetilde{P}(Z) \;=\; \widetilde{P}(\{\pi_J \in A_J\}) \;=\; P_J(A_J)\,.$$

Gezeigt ist

$$\mathcal{L}(\pi_J|P) \;=\; P_J \quad \text{als Wahrscheinlichkeitsmass auf } (E^J, \mathcal{E}^J)$$

für beliebiges $J \in \mathcal{H}(I)$, was den Beweis von Satz 12.6 abgeschliesst. □

Der Konsistenzsatz von Kolmogorov 12.6 ist das Werkzeug, welches die Konstruktion stochastischer Prozesse mit Werten in polnischen Räumen ermöglicht. Konstruktion bedeutet hier zunächst nur, ein Wahrscheinlichkeitsmass Q auf dem Raum aller möglichen Pfade anzugeben, welches ein gewünschtes System endlichdimensionaler Randverteilungen induziert.

B. Anwendungen des Konsistenzsatzes

Die Existenz beliebiger Produktmasse war in 4.13 als 'Satz ohne Beweis' (mit Verweis auf Bauer 1978, 1991) formuliert worden. Als erste Anwendung des Konsistenzsatzes geben wir – wie in Kapitel IV angekündigt – den Existenzbeweis für Produktmasse auf polnischen Räumen. In diesen Beweis gehen ausser den Eigenschaften polnischer Räume (10.24–10.26) und dem Konsistenzsatz 12.6 nur solche Hilfsmittel ein, die *vor der Formulierung von Satz 4.13* bereitgestellt wurden.

12.7 Satz (Produktmasse): Sei I eine beliebige Indexmenge, sei $(E,\mathcal{E})$ polnisch, sei für jedes $t \in I$ ein Wahrscheinlichkeitsmass μ_t auf $(E,\mathcal{E})$ vorgegeben. Dann gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmass P auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ mit der Eigenschaft

$$P(\mathop{\times}_{t\in I} A_t) \;=\; \prod_{t\in I} \mu_t(A_t) \quad \text{falls } A_t \in \mathcal{E} \text{ für jedes } t \in I,\; A_t \neq E \text{ höchstens endlich oft}\,.$$

Dieses P heisst Produktwahrscheinlichkeit $\bigotimes_{t\in I} \mu_t$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$.

Beweis: 1) Für jedes $J \in \mathcal{H}(I)$ gibt es nach 4.3 das Produktmass auf dem endlichen Produktraum

$$P_J \;:=\; \bigotimes_{t\in J} \mu_t \quad \text{auf } (E^J, \mathcal{E}^J) = (\mathop{\times}_{t\in J} E,\; \bigotimes_{t\in J} \mathcal{E})$$

welches eindeutig festgelegt ist durch seine Werte auf den Rechtecken in $\mathcal{E}^J$:

$$P_J(\mathop{\times}_{t\in J} A_t) \;=\; \prod_{t\in J} \mu_t(A_t)\,, \quad A_t \in \mathcal{E}\,,\; t \in J\,.$$

Wir zeigen, dass die hierdurch bestimmte Familie

$$\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$$

ein projektives System im Sinne von 12.4 bildet. Betrachte $K \subset J \in \mathcal{H}(I)$, dann

$$(\pi^J_K)^{-1}(\bigtimes_{t\in K} A_t) \; = \; \bigtimes_{t\in J} \widetilde{A}_t \quad \text{mit } \widetilde{A}_t := A_t \text{ falls } t \in K,\; \widetilde{A}_t := E \text{ falls } t \in J \setminus K \; .$$

Für die Ereignisse in der letzten Zeile stimmen die Wahrscheinlichkeiten $P_J(\bigtimes_{t\in J} \widetilde{A}_t)$ und $P_K(\bigtimes_{t\in K} A_t)$ überein, denn $\mu_t(E) = 1$ für alle $t \in I$. Die σ-Algebra $\mathcal{E}^K$ wird von den Rechtecken erzeugt, also gilt

$$P_K \; = \; \mathcal{L}(\pi^J_K | P_J) \quad \text{als Wahrscheinlichkeitsmass auf } (E^K, \mathcal{E}^K)$$

für alle $K \subset J$ in $\mathcal{H}(I)$.

2) Da $(E, \mathcal{E})$ polnisch, existiert nach Konsistenzsatz 12.6 genau ein Wahrscheinlichkeitsmass P auf dem Produktraum $(E^I, \mathcal{E}^I)$, aus dem man für beliebiges $J \in \mathcal{H}(I)$ das vorgegebene P_J als Bildmass $\mathcal{L}(\pi_J | P)$ unter der Projektionsabbildung π_J zurückerhält: $P_J = \mathcal{L}(\pi_J | P)$ für $J \in \mathcal{H}(I)$. Für dieses gilt

$$P(\bigtimes_{t\in I} A_t) \; = \; \prod_{t\in I} \mu_t(A_t) \quad \text{falls } A_t \in \mathcal{E} \text{ für } t \in J,\; A_t = E \text{ für } t \in I \setminus J,\, J \in \mathcal{H}(I)$$

für Säulen mit Rechteckbasis in $(E^I, \mathcal{E}^I)$, wie behauptet. $\square$

Als nächstes konstruieren wir als Folgerung aus dem Konsistenzsatz Markovketten (definiert in 11.2) und Markovprozesse in stetiger Zeit.

12.7' Hilfssatz: Betrachte messbare Räume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, sowie ein Wahrscheinlichkeitsmass $\widetilde{P}$ auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und eine Übergangswahrscheinlichkeit $K(\cdot, \cdot)$ von $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

a) Bezeichnet A_{ω_1} den ω_1-Schnitt durch eine Menge $A \in \bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$, so gilt

$$f_A \; : \; \omega_1 \; \longrightarrow \; K(\omega_1, A_{\omega_1}) \quad \text{ist } \mathcal{A}_1\text{–messbar} \; .$$

b) Für $A \in \bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$ liefert

$$P(A) \; := \; \int_{\Omega_1} \widetilde{P}(d\omega_1) \int_{\Omega_2} K(\omega_1, d\omega_2) \; 1_A(\omega_1, \omega_2) \; = \; \int_{\Omega_1} \widetilde{P}(d\omega_1) \, f_A(\omega_1)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\left(\bigtimes_{i=1}^{2} \Omega_i \, , \, \bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i \right)$.

Beweis: a) Die Behauptung gilt zunächst für Rechtecke in $\bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$; dann setzt man

$$\mathcal{H} \; := \; \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : \; \omega_1 \; \to \; K(\omega_1, A_{\omega_1}) \quad \text{ist } \mathcal{A}_1\text{–messbar}\}$$

und weist analog zum Beweis von 4.6 nach, dass $\mathcal{H}$ Dynkin ist. Es folgt $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$.
b) Wegen Linearität des Integrals ist P wie in b) definiert zunächst endlich additiv, also ein Inhalt auf $\bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$. Wir zeigen σ-Stetigkeit in $\emptyset$. Betrachte absteigende Folgen $(A_m)_m$ in $\bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$. Aus $A_m \downarrow \emptyset$ folgt $(A_m)_{\omega_1} \downarrow \emptyset$ für jedes feste $\omega_1 \in \Omega_1$, und dies erzwingt $f_{A_m}(\omega_1) \downarrow 0$ nach Definition von f_{A_m} in a). Dominierte Konvergenz auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ (alle Funktionen f_{A_m} sind beschränkt durch 1) liefert $P(A_m) \downarrow 0$. Damit ist P ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\bigotimes_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i$. □

12.8 Satz (Markovketten): Zu jeder Übergangswahrscheinlichkeit $Q(\cdot,\cdot)$ auf einem polnischen Raum $(E, \mathcal{E})$ existiert eine Markovkette. Genauer: bezeichnet $(\pi_t)_{t \in I}$ den kanonischen Prozess auf $(E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{E}^{\mathbb{N}_0})$ und ν ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmass auf $(E, \mathcal{E})$, dann existiert zu Q und ν genau ein Wahrscheinlichkeitsmass $P = P_{Q,\nu}$ auf $(E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{E}^{\mathbb{N}_0})$ mit der Eigenschaft

$$P\,(\,\pi_i \in A_i\,,\, 0 \le i \le n\,) \;=\; \int \nu(dx_0)\, 1_{A_0}(x_0) \int Q(x_0, dx_1)\, 1_{A_1}(x_1) \ldots \int Q(x_{n-1}, dx_n)\, 1_{A_n}(x_n)$$

für alle $A_i \in \mathcal{E}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Schreibe $I := \mathbb{N}_0$. 1) Eindeutigkeit: jedes Wahrscheinlichkeitsmass auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ ist nach 1.13 durch seine Werte auf den Säulen mit Rechteckbasis eindeutig festgelegt.
2) Existenz: i) Wir betrachten in einem ersten Schritt endliche Teilmengen der Form $J_n := \{0, \ldots, n\}$ von I; dann wird für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$(\times) \qquad P_n(A) \;:=\; \int_E \nu(dx_0) \int_E Q(x_0, dx_1) \ldots \int_E Q(x_{n-1}, dx_n)\; 1_A(x_0, \ldots, x_n) \quad , \quad A \in \mathcal{E}^{J_n}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmass P_n auf $(E^{J_n}, \mathcal{E}^{J_n})$ definiert. Dies folgt aus 12.7' per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ (für $n = 0$ ist $P_0 = \nu$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(E, \mathcal{E})$; ist für ein $n \ge 0$ schon P_n als Wahrscheinlichkeitsmass auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) = (E^{J_n}, \mathcal{E}^{J_n})$ nachgewiesen, so setzt man $(\Omega_2, \mathcal{A}_2) = (E, \mathcal{E})$, wendet 12.7' an, und sieht, dass P_{n+1} ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(E^{J_{n+1}}, \mathcal{E}^{J_{n+1}})$ ist).
ii) Liftet man für $n_1 < n_2$ Mengen $A \in \mathcal{E}^{J_{n_1}}$ nach $\mathcal{E}^{J_{n_2}}$ gemäss

$$\left(\pi^{J_{n_2}}_{J_{n_1}}\right)^{-1}(A) \;=\; A \times \mathop{\times}_{i=n_1+1}^{n_2} E \;=:\; \widetilde{A}\,,$$

so gilt offensichtlich $P_{n_2}(\widetilde{A}) = P_{n_1}(A)$ und damit $\mathcal{L}(\pi^{J_{n_2}}_{J_{n_1}} | P_{n_2}) \;=\; P_{n_1}$. Dies ist die Konsistenzbedingung des Satzes von Kolmogorov entlang der Teilfamilie $\{P_n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Beliebige endliche Teilmengen $K \subset \mathbb{N}_0$ behandelt man, indem man zu einer Obermenge der Form $J = \{0, 1, \ldots, \max(K)\}$ übergeht und an die Stelle der 'fehlenden' Faktoren den vollen Raum E einsetzt (zuerst wieder Rechtecke betrachten, ...); so weist man die Konsistenzbedingung des Satzes von Kolmogorov für die Gesamtheit der $\{P_K : K \in \mathcal{H}(I)\}$ nach.

iii) Da $(E,\mathcal{E})$ nach Voraussetzung polnisch ist, liefert 12.6 die Existenz genau eines Wahrscheinlichkeitsmasses P auf dem Produktraum $(E^I, \mathcal{E}^I)$ mit der Eigenschaft

$$P_J \;=\; \mathcal{L}(\pi_J|P) \quad \text{für jedes } J \in \mathcal{H}(I)\ ,$$

und dieses hat nach Konstruktion die gewünschte Eigenschaft

$$\int \nu(dx_0)\, 1_{A_0}(x_0) \int Q(x_0, dx_1)\, 1_{A_1}(x_1) \ldots \int Q(x_{n-1}, dx_n)\, 1_{A_n}(x_n) \;=\; P\,(\pi_i \in A_i, 0 \le i \le n)$$

für alle $A_i \in \mathcal{E}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

3) Setze $\mathcal{F}_n = \sigma(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ und betrachte die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Wir zeigen: unter dem eben konstruierten Wahrscheinlichkeitsmass P ist der kanonische Prozess $\pi = (\pi_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ auf $(E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{E}^{\mathbb{N}_0})$ Markov bezüglich $\mathbb{F}$ mit Ein-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit $Q(\cdot,\cdot)$ und Startverteilung $\nu = \mathcal{L}(\pi_0|P)$ wie in 11.2. Die zweite Behauptung gilt nach Konstruktion; die erste ist gleichwertig mit

$$(+) \qquad P\,(\,\pi_{n+1} \in F \mid \mathcal{F}_n\,) \;=\; Q(\pi_n, F)\ , \quad F \in \mathcal{E}\ ,\ n \in \mathbb{N}_0\ .$$

Die Ereignisse in $\mathcal{F}_n$ sind von Form $\{(\pi_0, \ldots, \pi_n) \in A\}$, $A \in \mathcal{E}^{J_n}$, wobei nach $(\times)$

$$\begin{aligned}
&E_P\left(1_{\{(\pi_0,\ldots,\pi_n)\in A\}}\, 1_F(\pi_{n+1})\right) \;=\; \int P_{n+1}(\,d(x_0,\ldots,x_n,x_{n+1})\,)\, 1_A(x_0,\ldots,x_n)\, 1_F(x_{n+1})\\
&= \int P_n(\,d(x_0,\ldots,x_n)\,)\, Q(x_n, dx_{n+1})\, 1_A(x_0,\ldots,x_n)\, 1_F(x_{n+1})\\
&= \int P_n(\,d(x_0,\ldots,x_n)\,)\, 1_A(x_0,\ldots,x_n)\, Q(x_n, F)\\
&= E_P\left(1_{\{(\pi_0,\ldots,\pi_n)\in A\}}\, Q(\pi_n, F)\right)
\end{aligned}$$

gilt; also ist $(+)$ nachgewiesen. □

Bemerkung: Es existiert ein anderer Beweis, der ohne die Voraussetzung eines polnischen Zustandsraumes auskommt (Satz von Ionescu-Tulcea, siehe Gänssler-Stute 1977, p.49). Auf Separabilität des Zustandsraumes verzichten zu wollen macht für eine 'schöne' Theorie der Markovketten jedoch aus anderen Gründen, deutlich erklärt im Buch von Nummelin (1985), wenig Sinn.

Als nächstes betrachten wir Markovprozesse in stetiger Zeit.

12.9 Definition: Sei $(E,\mathcal{E})$ ein messbarer Raum. Eine Familie $(K_t(\cdot,\cdot))_{t\ge 0}$ von Übergangswahrscheinlichkeiten auf $(E,\mathcal{E})$ mit der Eigenschaft

$$K_{t+s}(x, dy) \;=\; \int_E K_t(x, dz) K_s(z, dy) \quad \text{für alle } 0 \le s, t < \infty$$

(wobei alle $K_0(x,\cdot) = \epsilon_x(\cdot)$ Diracmasse sind, $x \in E$) heisst *Halbgruppe von Übergangswahrscheinlichkeiten* oder *Markov-Halbgruppe auf* $(E, \mathcal{E})$.

12.9' Definition: Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein $I\!\!F$-adaptierter Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$; dabei sei $I\!\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ irgendeine Filtration in $\mathcal{A}$ und $(E, \mathcal{E})$ ein beliebiger messbarer Raum. X heisst *Markov bezüglich* $I\!\!F$ *mit Halbgruppe* $(K_t(\cdot,\cdot))_{t\geq 0}$ *und Startverteilung* ν falls gilt: $\mathcal{L}(X_0 \mid P) = \nu$, und

$$(*) \qquad \omega \to K_{t-s}(X_s(\omega), F) \text{ ist Festlegung von } P(\, X_t \in F \mid \mathcal{F}_s\,) \quad , \quad F \in \mathcal{E} \;,\; 0 \leq s < t < \infty \;.$$

Man nennt X kurz *Markov*, wenn man als Filtration die Geschichte von X betrachtet (wie in 11.3': $\mathcal{F}_t = \sigma(X_r : 0 \leq r \leq t)$ für alle $0 \leq t < \infty$).

Die wichtige Interpretation der Markoveigenschaft $(*)$ lautet: Gegeben eine *Vergangenheit* $\mathcal{F}_s$ bis zu einer Zeit s, so liefert das Wahrscheinlichkeitsmass $K_{t-s}(X_s,\cdot)$, welches *nur vom zuletzt erreichten Zustand* X_s des Prozesses abhängt, die beste Prognose für den Zustand des Prozesses X zu einer *zukünftigen* Zeit $t > s$.

12.9" Satz (Markovprozesse in stetiger Zeit): Zu jeder Halbgruppe von Übergangswahrscheinlichkeiten auf einem polnischen Raum $(E, \mathcal{E})$ gibt es einen Markovprozess.

Beweis: Schreibe $I := [0, \infty)$, fixiere ein Wahrscheinlichkeitsmass ν auf $(E, \mathcal{E})$ als Startverteilung, sei $(K_t)_{t\geq 0}$ eine Markov-Halbgruppe auf $(E, \mathcal{E})$.

a) Für $J \in \mathcal{H}(I)$ mit Dargestellung $J = \{t_0, \ldots, t_\ell\}$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty$, wird durch

$$P_J(A) \;:=\; \int_E \nu(dx_0) \int_E K_{t_1-t_0}(x_0, dx_1) \ldots \int_E K_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{\ell-1}, dx_\ell)\, 1_A(x_0, x_1, \ldots, x_\ell) \;, \quad A \in \mathcal{E}^J$$

ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(E^J, \mathcal{E}^J)$ definiert. Das beweist man in Analogie zum zeitdiskreten Fall in 12.8. Falls $0 \notin J \in \mathcal{H}(I)$, betrachtet man $\widetilde{J} := \{0\} \cup J$ und $P_J(A_J) := P_{\widetilde{J}}(E \times A_J)$, $A_J \in \mathcal{E}^J$.

b) Wir zeigen: $\{P_J : J \in \mathcal{H}(I)\}$ ist eine projektive Familie. Betrachte etwa

$$J := \{t_1, \ldots, t_l\} \;, \quad t_1 < \ldots < t_{r-1} < t_r < t_{r+1} < \ldots < t_\ell \;, \quad K := J \setminus \{t_r\} \;.$$

Sei $A_K := \mathop{\times}\limits_{t\in K} A_t$ (mit $A_t \in \mathcal{E}$ für $t \in K$) ein Rechteck in $\mathcal{E}^K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P_K(\mathop{\times}_{t\in K} A_t) \;=\;& \int_E \nu(dx_0) 1_{A_{t_0}}(x_0) \int_E K_{t_1-t_0}(x_0, dx_1)\, 1_{A_{t_1}}(x_1) \ldots \\ & \ldots \int_E K_{t_{r+1}-t_{r-1}}(x_{r-1}, dx_{r+1})\, 1_{A_{t_{r+1}}}(x_{r+1}) \ldots \\ & \ldots \int_E K_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{\ell-1}, dx_\ell)\, 1_{A_{t_\ell}}(x_\ell) \;. \end{aligned}$$

Mit der Halbgruppeneigenschaft von $(K_t)_{t\geq 0}$ kann man das mittlere Integral durch

$$\ldots \int_E K_{t_r - t_{r-1}}(x_{r-1}, dx_r)\, 1_E(x_r) \int_E K_{t_{r+1}-t_r}(x_r, dx_{r+1})\, 1_{A_{t_{r+1}}}(x_{r+1}) \ldots$$

ersetzen und erhält dadurch

$$P_K(A_K) \;=\; P_J\left(\mathop{\times}_{i=1}^{r-1} A_{t_i} \times E \times \mathop{\times}_{i=r+1}^{\ell} A_{t_i} \right) \;=\; P_J\left((\pi^J_K)^{-1}(A_K) \right) \;.$$

Mit analogen Argumenten (sukzessives Herausnehmen einzelner Zeitpunkte) behandelt man alle Fälle $K \subset J \in \mathcal{H}(I)$. Da das System der Rechtecke einen durchschnittsstabilen Erzeuger von $\mathcal{E}^K$ bildet, ist $\mathcal{L}(\pi^J_K | P_J) = P_K$ gezeigt.

c) Da $(E, \mathcal{E})$ polnisch, liefert der Konsistenzsatz 12.6 ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmass $P = P_{Q,\nu}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ so dass

$$P_J \;=\; \mathcal{L}(\pi_J | P) \quad \forall\, J \in \mathcal{H}(I)\;.$$

Startverteilungen $\nu := \epsilon_x$, $x \in E$, induzieren also eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmassen $(P_x)_{x\in E}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ so dass gilt: der kanonische Prozess $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ hat unter P_x die Eigenschaft

$$\text{(12.10)} \qquad \begin{cases} P_x(\, \pi_0 \in A_0,\ \pi_{t_i} \in A_{t_i} \text{ für } 1 \leq i \leq \ell\,) \\ = \; 1_{A_0}(x) \int_E \ldots \int_E K_{t_1 - t_0}(x, dx_1) 1_{A_{t_1}}(x_1) \ldots K_{t_\ell - t_{\ell-1}}(x_{\ell-1}, dx_\ell) 1_{A_{t_\ell}}(x_\ell) \\ \text{für } 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty\;,\ A_{t_i} \in \mathcal{E}\;,\ \ell \geq 1\;. \end{cases}$$

Schreibe E_x für den Erwartungswert bezüglich P_x auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$, $x \in E$; unter P_x gilt in (12.10)

$$\pi_0 = x \quad P_x\text{-fast sicher}\;.$$

d) Definiere $I\!\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ als die vom kanonischen Prozess π auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ erzeugte Filtration: $\mathcal{F}_t := \sigma(\pi_s : 0 \leq s \leq t)$, $t \geq 0$. Die *Markoveigenschaft* von π bezüglich $I\!\!F$ ist nachzuweisen. Unter jedem der Wahrscheinlichkeitsmasse P_x, $x \in E$, zeigt man

$$\text{(12.11)} \qquad P_x(\pi_t \in A | \mathcal{F}_s) \;=\; K_{t-s}(\pi_s, A) \quad \text{für alle } \; s < t\;,\ A \in \mathcal{E}\;,$$

mit dem folgenden Argument (wieder in Analogie zum zeitdiskreten Fall 12.8). Man fixiert $s < t$, wählt $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_\ell = s$ und Mengen $A_{s_0}, A_{s_1}, \ldots, A_{s_\ell}, A_t$ in $\mathcal{E}$, und verifiziert

$$E_x\left(1_{\{\pi_{s_0}\in A_{s_0}, \ldots, \pi_{s_\ell} \in A_{s_\ell}\}}\, 1_{A_t}(\pi_t) \right) \;=\; E_x\left(1_{\{\pi_{s_0}\in A_{s_0}, \ldots, \pi_{s_\ell} \in A_{s_\ell}\}}\, K_{t-s}(\pi_s, A_t) \right)$$

mit einem Vorgehen wie in 12.8. Damit hat man einen durchschnittsstabilen Erzeuger der σ-Algebra $\mathcal{F}_s = \sigma(\pi_r : 0 \leq r \leq s)$ betrachtet; ein Dynkinschluss zeigt

$$E_{P_x}\left(\, 1_F\, 1_{A_t}(\pi_t)\,\right) \;=\; E_{P_x}\left(\, 1_F\, K_{t-s}(\pi_s, A_t)\,\right) \quad \text{für jedes } F \in \mathcal{F}_s\;.$$

Das ist (12.11). Für beliebige Startverteilungen ν auf $(E, \mathcal{E})$ erhält man mit denselben Argumenten unter P_ν die Aussagen

$$\begin{cases} i) \quad P_\nu(\pi_t \in A | \mathcal{F}_s) \;=\; K_{t-s}(\pi_s, A) \quad \text{für alle } \; s < t \,,\; A \in \mathcal{E} \\[2ex] ii) \quad \mathcal{L}(\pi_0 | P_\nu) \;=\; \nu \end{cases}$$

und damit die Behauptung des Satzes. □

Es ist wichtig zu betonen, dass wir bis jetzt einen Markovprozess im Sinne eines Wahrscheinlichkeitsmasses P konstruiert haben, das auf dem Raum aller möglichen Pfade $(E^{[0,\infty)}, \mathcal{E}^{[0,\infty)})$ spielt, um eine Realisierung $t \to \alpha(t)$ gemäss $P(d\alpha)$ auszuwürfeln. In diesem Stadium kann es noch keinerlei 'Pfadeigenschaften' geben: Aussagen der Art 'Auswürfeln gemäss $P(d\alpha)$ liefert P-fast sicher eine stetige (oder: linksstetige, rechtsstetige, rechtstetige mit linken Limiten, ...) Abbildung $t \to \alpha(t)$' (unter Voraussetzungen an gewisse Klassen von Prozessen) bleiben mit dem Ansatz des Konsistenzsatzes ausser Reichweite. Dies wird – in Kapitel XIII – ein zweiter wesentlicher Schritt in der Konstruktion stochastischer Prozesse sein.

12.12 Übungsaufgabe zur Markoveigenschaft: Sei $(E, \mathcal{E})$ polnisch, $I = [0, \infty)$, sei $(K_t)_{t \ge 0}$ eine Markov-Halbgruppe auf $(E, \mathcal{E})$. Betrachte wie in 12.9" den Markov-Prozess $(\pi_t)_{t \ge 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I, (P_x)_{x \in E})$ bezüglich seiner eigenen Geschichte $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$. Die folgenden Aussagen beweist man mit ähnlichen Argumenten (Dynkin-Schlüsse, Aufbau messbarer Funktionen, ...) wie oben: Details als Übungsaufgabe!

a) Für jedes feste $A \in \mathcal{E}^I = \sigma(\pi_t : t \ge 0)$ ist $x \to P_x(A)$ eine $\mathcal{E}$-messbare Funktion.

b) Auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ gibt es eine Familie von *Shiftoperatoren* $(\Theta_s)_{s \ge 0}$ definiert durch

$$E^I \ni \alpha = (\alpha_t)_{t \ge 0} \quad \to \quad \Theta_s \alpha := (\alpha_{s+t})_{t \ge 0} \in E^I \,.$$

Ein Shift Θ_s wirft also das Anfangsstück $(\alpha_r)_{0 \le r < s}$ eines Pfades $\alpha \in E^I$ weg und stellt für den verbleibenden Rest $(\alpha_r)_{s \le r < \infty}$ die Uhr um s zurück: $\Theta_s \alpha$ ist die Abbildung $I \ni t \to \alpha_{s+t} \in E$. Schreibt man $\mathcal{Z}^s$ für die Sub-σ-Algebra der *Zukunft ab* s im kanonischen Prozess π auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$

$$\mathcal{Z}^s \;:=\; \sigma(\,\pi_r : r \ge s\,) \,, \quad s \ge 0 \,,$$

so ist für jedes $s \ge 0$ der Shift Θ_s eine $\mathcal{Z}^s$–$\mathcal{E}^I$–messbare Abbildung (für Zylindermengen mit Rechteckbasis $\times_{t \in I} A_t$, $A_t \ne E$ für höchstens endlich viele t, gilt

$$\{\, \Theta_s \in \times_{t \in I} A_t \,\} \;=\; \{\, \alpha \in E^I : \alpha_{t+s} \in A_t \text{ für alle } t \ge 0 \,\} \;\in\; \mathcal{Z}_s \,,$$

und diese Mengen erzeugen $\mathcal{E}^I$). Für jedes $F \in \mathcal{Z}^s$ gibt es ein $A \in \mathcal{E}^I$ so dass

$$1_F \;=\; 1_A \circ \Theta_s \quad \text{auf } E^I \;;$$

damit gibt es für jede beschränkte $\mathcal{Z}^s$-messbare Funktion $Y : E^I \to I\!R$ eine beschränkte $\mathcal{E}^I$-messbare Funktion $G : E^I \to I\!R$ so dass

$$Y \;=\; G \circ \Theta_s \;.$$

c) Aufgrund von a) und b) kann die Markov-Eigenschaft in der kompakten Form

(12.13) $$E_x\left(G \circ \Theta_s \mid \mathcal{F}_s\right) \;=\; E_{(\pi_s)}\left(G\right) \quad \text{für alle } s \geq 0, \text{ alle } G \text{ beschränkt und } \mathcal{E}^I\text{-messbar}$$

geschrieben werden. Beachte dabei: auf der rechten Seite ist $E_{(\pi_s)}(G)$ eine suggestive Schreibweise für $h \circ \pi_s$, wobei h die nach a) messbare Funktion $x \to h(x) := E_x(G)$ bezeichnet.

Die Interpretation von (12.13) ist noch schöner als die von (12.11): Gegeben die Vergangenheit $\mathcal{F}_s$ im Prozess π bis zur Zeit s, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit einer (ganz allgemein gefassten) Grösse $Y = G \circ \Theta_s$ in der Zukunft $\mathcal{Z}^s$ ab s durch 'Einsetzen des gegenwärtigen Zustandes π_s als Startwert' in die Funktion $x \to h(x) = E_x(G)$. □

Als nächste Folgerung aus dem Konsistenzsatz konstruieren wir Prozesse mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen.

12.14 Definition: Eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmassen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ mit

$$\mu_{t_1+t_2} = \mu_{t_1} * \mu_{t_2} \quad \text{für alle } t_1, t_2 \text{ in } [0,\infty)$$

und $\mu_0 = \epsilon_0$ nennen wir *Faltungshalbgruppe.*

Offensichtliche Beispiele für Faltungshalbgruppen sind Normalverteilungsfamilien

$$\mu_t \;:=\; \mathcal{N}\left(\,0\,,\,t\cdot\Sigma\,\right) \quad,\quad t \geq 0$$

($0 \in I\!R^d$ und $\Sigma \in I\!R^{d\times d}$ symmetrisch und nichtnegativ definit) wegen der Faltungseigenschaft 4.25, oder 'Poissonmischungen': ausgehend von einer Schar $\zeta_{t,\ell} \sim \mathcal{P}(\,t\cdot\lambda_\ell\,)$, $t \geq 0$, $1 \leq \ell \leq L$ von unabhängigen Zufallsvariablen (stets existiert eine solche, vgl. 12.7) betrachte man

$$\mu_t \;:=\; \mathcal{L}\left(\sum_{\ell=1}^{L} c_\ell\, \zeta_{t,\ell}\right) \quad,\quad t \geq 0$$

wobei Parameter $\lambda_\ell \in (0,\infty)$ und Gewichtsfaktoren $c_\ell \in I\!R$ nicht von $t \geq 0$ abhängen. Auch dies folgt aus der Faltungseigenschaft 4.25; genauso kann im zweiten Beispiel anstelle der $\zeta_{t,\ell}$ mit zentrierten Poissonvariablen $\widetilde{\zeta}_{t,\ell} := \zeta_{t,\ell} - t\lambda_\ell$ arbeiten.

12.14' Definition: Ein $I\!R^d$-wertiger stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heisst *Prozess mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen (PIIS)* oder *Lévy-Prozess*, falls es eine Kollektion von Wahrscheinlichkeitsmassen μ_r, $r \geq 0$, auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ gibt so dass gilt

$$0 \leq s < t < \infty \ : \quad \text{Zuwächse } X_t - X_s \text{ sind unabhängig von } \mathcal{F}_s \text{ und verteilt nach } \mu_{t-s}$$

und $X_0 = 0$ P-fast sicher; dabei steht

$$I\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \quad , \quad \mathcal{F}_t = \sigma\{X_r : 0 \leq r \leq t\} \ , \ t \geq 0$$

für die Geschichte des Prozesses X.

Es ist leicht zu sehen, dass $(\mu_r)_{r\geq 0}$ in 12.14' notwendig eine Faltungshalbgruppe sein muss.

12.14" Satz (PIIS): Zu jeder Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ gibt es einen Prozess mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen (d.h.: Zuwächse über Zeitintervalle der Länge $h > 0$ sind nach μ_h verteilt). Dieser ist insbesondere Markov mit Halbgruppe

$$(K_t(\cdot,\cdot))_{t\geq 0} \ , \quad K_t(x,F) := \mu_t(F - x) \ , \quad t \geq 0 \ , \ x \in I\!R^d \ , \ F \in \mathcal{B}(I\!R^d)$$

wobei $F - x = \{v - x : v \in F\}$ die um x verschobene Menge F bezeichnet.

Beweis: Schreibe $(E, \mathcal{E}) = (I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ und $I = [0,\infty)$, sei $(\mu_t)_{t\geq 0}$ wie in 12.14 eine Faltungshalbgruppe auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$. Zunächst einige Vorüberlegungen. Für zu betrachtende Tripel t, t_1, t_2 in $(0,\infty)$ gibt es stets

$$\text{unabhängige Zufallsvariable} \quad \xi_t \ \sim \ \mu_t \ , \ \xi_{t_1} \ \sim \ \mu_{t_1} \ , \ \xi_{t_2} \ \sim \ \mu_{t_2}$$

auf irgendeinem Hilfsraum $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{P})$; die Unabhängigkeit impliziert

$$\mathcal{L}\left(\xi_{t_1} + \xi_{t_2} \mid \overline{P} \right) \ = \ \mu_{t_1} * \mu_{t_2} \ ,$$

und $K_t(\cdot,\cdot)$ schreibt sich mit diesen Hilfsgrössen als

$$(\times) \qquad K_t(x,F) \ = \ \mu_t(F - x) \ = \ \overline{P}(\xi_t \in F - x) \ = \ \overline{P}(x + \xi_t \in F) \ .$$

Für festes t ist die Abbildung $(x,y) \to 1_F(x+y)$ messbar; Ausintegrieren der zweiten Variable

$$x \longrightarrow \mu_t(F-x) \;=\; \int 1_F(x+y)\,\mu_t(dy)$$

liefert wieder eine messbare Abbildung. Für jedes t ist $K_t(\cdot,\cdot)$ also eine Übergangswahrscheinlichkeit auf $(I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$. Aus der Festsetzung $\mu_0 = \epsilon_0$ in 12.14 folgt $K_0(x,\cdot) = \epsilon_x$. Die konstante Funktion $x \to K_t(x, F+x)$ ist trivialerweise messbar.

1) Für die Übergangswahrscheinlichkeiten $K_t(.,.)$ gilt die Halbgruppeneigenschaft:

$$K_{t_1+t_2}(x,dy) \;=\; \int_{I\!R^d} K_{t_1}(x,dz)\; K_{t_2}(z,dy) \quad , \quad x,y,z \in I\!R^d \;,\; t_1,t_2 \geq 0\;.$$

Zum Beweis: $(\times)$ kombiniert mit der Eigenschaft einer Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$

$$K_{t_1+t_2}(x,F) \;=\; \mu_{t_1+t_2}(F-x) \;=\; (\mu_{t_1} * \mu_{t_2})(F-x)$$

und mit $\mu_{t_1} * \mu_{t_2} = \mathcal{L}\left(\xi_{t_1} + \xi_{t_2} \mid \overline{P}\right)$ nach $(\times)$ liefert mit der Faltungsformel 4.24

$$\begin{aligned}
&(\mu_{t_1} * \mu_{t_2})(F-x) \;=\; \overline{P}\,(\,\xi_{t_1} + \xi_{t_2} \,\in\, F-x\,) \;=\; \overline{P}\,(\,x + \xi_{t_1} + \xi_{t_2} \,\in\, F\,)\\
&= \;\; \int_{I\!R^d} \overline{P}(\,x + \xi_{t_1} \in dz\,)\,\overline{P}(\,\xi_{t_2} \in F - z\,)\\
&= \;\; \int_{I\!R^d} K_{t_1}(x,dz)\; K_{t_2}(z,F)\;.
\end{aligned}$$

2) Satz 12.9” zeigt: zu der Halbgruppe von Übergangswahrscheinlichkeiten $(K_t(.,.))_{t\geq 0}$ in $(\times)$ existiert ein Markovprozess, genauer: auf dem kanonischen Raum aller Abbildungen $\alpha : [0,\infty) \to I\!R^d$ gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmass P, so dass der kanonische Prozess $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ der Koordinatenprojektionen Markov ist (bezüglich seiner eigenen Geschichte $I\!F$) mit Markovhalbgruppe $(K_t(.,.))_{t\geq 0}$ und Startverteilung $\nu := \epsilon_0$. Die Markoveigenschaft lautet nach (12.11)

$$P\,(\,\pi_t \in A \mid \mathcal{F}_s\,) \;=\; K_{t-s}(\pi_s, A) \quad \text{für alle } \; s<t\;,\; A \in \mathcal{B}(I\!R^d)\;.$$

Wie in der Vorüberlegung darf man für $B \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ schreiben

$$K_{t-s}(\pi_s, B+\pi_s) \;=\; \mu_{t-s}([B+\pi_s]-\pi_s) \;\;\equiv\;\; \mu_{t-s}(B) \;\;:$$

folglich sind im Prozess $(\pi_t)_{t\geq 0}$ Zuwächse über Zeitintervalle der Länge $h>0$ verteilt nach μ_h.

3) Wir zeigen die Unabhängigkeit der Zuwächse im Prozess $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ unter P.
Für $s<t$, $F \in \mathcal{F}_s$ und $B \in \mathcal{B}(I\!R^d)$ gilt nach Markoveigenschaft und nach $(\times)$

$$\begin{aligned}
&E_P\,(\,1_F\;1_B(\pi_t - \pi_s)\,) \;=\; E_P\,(\,1_F\;E_P(\,1_B(\pi_t-\pi_s) \mid \mathcal{F}_s\,)\,)\\
&= \;\; E_P\,(\,1_F\;P(\,\pi_t \in B+\pi_s \mid \mathcal{F}_s\,)\,) \;=\; E_P\,(\,1_F\;K_{t-s}(\pi_s, B+\pi_s)\,)\\
&= \;\; E_P\,(\,1_F\;\mu_{t-s}(B)\,) \;=\; P(F)\;\mu_{t-s}(B)
\end{aligned}$$

und damit für beschränkte $\mathcal{B}(I\!R^d)$-messbare Funktionen $h : I\!R^d \to I\!R$

$$E_P\,(\,1_F\; h(\pi_t - \pi_s)\,) \;=\; P(F)\;\mu_{t-s}(h) \;=\; P(F)\;E_P(\,h(\pi_t - \pi_s)\,)\;.$$

Folglich ist der Zuwachs $\pi_t - \pi_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$. Dies schliesst den Beweis ab. $\square$

Wir diskutieren nun einige konkrete Prozesse. Wir geben eine Konstruktion der d-dimensionalen Brownschen Bewegung und eine Konstruktion des Poissonprozesses nach 12.14". In beiden Fällen wird der Prozess realisiert als kanonischer Prozess auf dem Raum $((I\!R^d)^{[0,\infty)}, (\mathcal{B}(I\!R^d))^{[0,\infty)})$ aller möglichen Abbildungen $[0,\infty) \to I\!R^d$, $d \geq 1$, unter einem durch den Konsistenzsatz eindeutig bestimmten Wahrscheinlichkeitsmass, welches unabhängige Zuwächse des kanonischen Prozesses (mit vorgeschriebener Verteilung) sicherstellt.

12.15 Beispiel (Brownsche Bewegung): Sei $\Sigma \in I\!R^{d\times d}$ symmetrisch und nichtnegativ definit, $d \geq 1$. Mit $(E,\mathcal{E}) = (I\!R^d, \mathcal{B}(I\!R^d))$ und $I = [0,\infty)$ betrachten wir den kanonischen Prozess $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$; sei $I\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die Geschichte von π. Wir gehen aus von der Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$

$$\mu_t \;:=\; \mathcal{N}(\,0\,,\,t\cdot\Sigma\,)\;,\quad t \geq 0$$

auf $(E,\mathcal{E})$. Nach 2.14" gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmass P auf $(E^I,\mathcal{E}^I)$, so dass der kanonische Prozess π unter P unabhängige und zeitlich homogene normalverteilte Zuwächse besitzt:

für $0 \leq s < t < \infty$: $\pi_t - \pi_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$, und $\mathcal{L}(\pi_t - \pi_s | P) = \mathcal{N}(\,0\,,\,(t-s)\cdot\Sigma\,)$

besitzt, mit $\pi_0 = 0$ P-fast sicher. Wegen Unabhängigkeit setzt sich dies zusammen zu

$$\begin{pmatrix} \pi_{t_1} \\ \pi_{t_2} - \pi_{t_1} \\ \vdots \\ \pi_{t_\ell} - \pi_{t_{\ell-1}} \end{pmatrix} \;\sim\; \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0_d \\ 0_d \\ \vdots \\ 0_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1\Sigma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (t_2-t_1)\Sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (t_\ell - t_{\ell-1})\Sigma \end{pmatrix}\right)$$

unter P, für beliebige $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty$, mit $\pi_0 = 0$ P-fast sicher; Transformationseigenschaften von Normalverteilungen unter linearen Abbildungen (siehe 7.5) liefern

$$(12.15') \qquad \begin{pmatrix} \pi_{t_1} \\ \pi_{t_2} \\ \vdots \\ \pi_{t_\ell} \end{pmatrix} \;\sim\; \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0_d \\ 0_d \\ \vdots \\ 0_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1\Sigma & t_1\Sigma & \dots & t_1\Sigma \\ t_1\Sigma & t_2\Sigma & \dots & t_2\Sigma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1\Sigma & t_2\Sigma & \dots & t_\ell\Sigma \end{pmatrix}\right)$$

als endlichdimensionale Randverteilungen unter P. (12.15') bestimmt das System der endlichdimensionalen Randverteilungen der Brownschen Bewegung mit Kovarianzmatrix Σ; die Kovarianzmatrix auf der rechten Seite von (12.15') ist

$$(\,(t_i \wedge t_j)\cdot\Sigma\,)_{1\leq i,j\leq \ell}\;.$$

Dies ist eine Konstruktion allein im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen; der kanonische Prozess $\pi = (\pi_t)_{t\geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$ hat offenkundig noch keinerlei 'Pfadeigenschaften'. Wir werden in Kapitel XIII zeigen, dass ein 'typischer' Pfad der Brownschen Bewegung stetig ist, und werden dort die Forderung nach *stetigen Pfaden* in die endgültige Definition der Brownschen Bewegung aufnehmen. □

12.16 Beispiel (Poisson-Prozess): Sei $I = [0, \infty)$, sei $(E, \mathcal{E})$ entweder der Raum $\mathbb{R}$ versehen mit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, oder einfach $E = \mathbb{N}_0$ versehen mit seiner Potenzmenge. Sei $\lambda \in (0, \infty)$ fest. Nach 4.25 ist

$$\mu_t \;=\; \mathcal{P}(t \cdot \lambda)\,, \quad t \geq 0$$

eine Faltungshalbgruppe auf $(E, \mathcal{E})$. Nach 12.14" gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmass P auf $(E^I, \mathcal{E}^I)$, so dass für den kanonischen Prozess gilt: $\pi_0 = 0$ P-fast sicher, und

$$\mathcal{L}((\pi_{t_1}, \pi_{t_2} - \pi_{t_1}, \ldots \pi_{t_\ell} - \pi_{t_{\ell-1}})|P) \;=\; \bigotimes_{i=1}^{\ell} \mathcal{P}((t_i - t_{i-1}) \cdot \lambda)$$

für beliebige $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots t_\ell < \infty$. Das aber bedeutet

$$P\,(\,\pi_{t_1}{=}k_1\,,\, \pi_{t_2}{=}k_1{+}k_2\,,\,\ldots\,,\,\pi_{t_\ell}{=}k_1{+}\ldots{+}k_\ell\,) \;=\; e^{-t_\ell \cdot \lambda} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{[(t_i - t_{i-1}) \cdot \lambda]^{k_i}}{(k_i)\,!}$$

für beliebige $k_1, \ldots, k_\ell$ in $\mathbb{N}_0$. Insbesondere gilt $0 \leq \pi_{t_1} \leq \ldots \leq \pi_{t_\ell}$ P-fast sicher. Dies bestimmt die endlichdimensionalen Randverteilungen: man hat $\pi_0 = 0$ P-fast sicher und

$$(12.16') \qquad P\,(\,\pi_{t_1}{=}m_1\,,\, \pi_{t_2}{=}m_2\,,\,\ldots\,,\,\pi_{t_\ell}{=}m_\ell\,) \;=\; e^{-t_\ell \cdot \lambda} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{[(t_i - t_{i-1}) \cdot \lambda]^{(m_i - m_{i-1})}}{(m_i - m_{i-1})\,!}$$

für aufsteigend geordnete Tupel natürlicher Zahlen $0 = m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_\ell < \infty$.
Dies ist die Konstruktion eines *Poisson-Prozesses mit Parameter* λ im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen. In Kapitel XIII werden wir sehen, dass 'typische' Pfade des Poisson-Prozesses stückweise konstant und rechtsstetig sind, und auf kompakten Zeitintervallen höchstens endlich viele Sprünge – alle mit Sprunghöhe 1 – besitzen. □

*C. Mehr über Lévy-Prozesse

Nach P. Lévy (sein Buch 'Theorie de l'addition des variables aleatoires' erschien 1937, in zweiter Auflage 1954) nennt man Prozesse mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen *Lévy-Prozesse*, oder man spricht kurz von *PIIS* ('**p**rocess, **i**ndependent, **i**ncrements, **s**tationary'); etwa zeitgleich gelangte Chinchine in Russland zu ähnlichen Ergebnissen. Eine exzellente Referenz zu Lévy-Prozessen ist das Buch von Bertoin (1996). Lévy-Prozesse stehen in direktem Bezug zu den in Kapitel *IX betrachteten unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmassen auf $I\!\!R$. Starten wir den Prozess zur Zeit $t = 0$ in $0 \in I\!\!R$ und addieren bei vorgegebener Faltungshalbgruppe unabhängige Zuwächse über

$$t_1 - t_0, t_2 - t_1, \ldots, t_l - t_{\ell-1} \quad \text{mit } 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty$$

auf (beliebig vorgegebene endliche Sätze disjunkter Zeitintervalle), mit zugehörigen Verteilungen

$$\mu_{t_1} \ , \ \mu_{t_2 - t_1} \ , \ \cdots \ , \ \mu_{t_\ell - t_{\ell-1}} \ ,$$

so entsprechen den Verteilungen dieser Zuwächse charakteristische Funktionen der Form

$$e^{(t_1 - t_0)\psi(\cdot)} \ , \ e^{(t_2 - t_1)\psi(\cdot)} \ , \ \ldots \ , \ e^{(t_l - t_{l-1})\psi(\cdot)}$$

mit einem die Faltungshalbgruppe bestimmenden 'charakteristischen Exponent' $v \to \psi(v)$ (7.5': Faltungen von Wahrscheinlichkeitsmassen entsprechen Produkten charakteristischer Funktionen).

Nach Kapitel *IX (oder: siehe Bertoin 1996, Thm. 1 in Section 1.1) ist die allgemeine eindimensionale unendlich teilbare Verteilung bestimmt durch einen charakteristischen Exponenten

$$\text{(12.17)} \qquad \psi(v) \ = \ icv - \frac{1}{2}\sigma^2 v^2 + \int_{I\!\!R \setminus \{0\}} [e^{ivx} - 1 - (ivx)1_{\{|x| \leq 1\}}]\, \Lambda(dx) \ , \quad v \in I\!\!R$$

mit Tripel (c, σ^2, Λ) wie in der Lévy-Chintchine-Formel 9.12 (d.h.: $c \in I\!\!R$, $\sigma^2 \geq 0$, Λ ein σ-endliches Mass auf $I\!\!R \setminus \{0\}$, welches der Bedingung $\int_{I\!\!R \setminus \{0\}} (x^2 \wedge 1)\, \Lambda(dx) < \infty$ genügt, siehe 9.1–9.4).

12.18 Beispiel: Sei J eine endliche Indexmenge. Sind $(a_j)_j$ paarweise verschieden in $I\!\!R \setminus \{0\}$ und sind $(\lambda_j)_j$ strikt positiv, sind $(\zeta_j)_j$ unabhängige Zufallsvariable mit $\zeta_j \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$, so sind die charakteristischen Funktionen von ζ_j bzw. von $\widetilde{\zeta}_j := \zeta_j - E(\zeta_j)$ gegeben durch

$$\phi_{\zeta_j}(v) \ = \ E(e^{iv\zeta_j}) \ = \ e^{\lambda_j (e^{iv} - 1)} \quad \text{bzw.} \quad \phi_{\widetilde{\zeta}_j}(v) \ = \ E(e^{iv\widetilde{\zeta}_j}) \ = \ E(e^{iv(\zeta_j - \lambda_j)}) \ = \ e^{\lambda_j (e^{iv} - 1 - iv)}$$

Für ein endliches Punktmass der Bauart $\Lambda := \sum_J \lambda_j \epsilon_{a_j}$ ist das Integral in (12.17) also der Exponent der charakteristischen Funktion der Poissonsumme

$$Z \ := \sum_{j : |a_j| > 1} a_j \zeta_j \ + \sum_{j : |a_j| \leq 1} a_j \widetilde{\zeta}_j \ .$$

Nimmt man eine weitere unabhängige Variable $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ und eine Konstante $c \in I\!\!R$ hinzu, erhält man für die Variable $c + Y + Z$ eine charakteristische Funktion der Bauart $v \to e^{\psi(v)}$, wobei $\psi(\cdot)$ vom Typ (12.17) mit $\Lambda := \sum_J \lambda_j \epsilon_{a_j}$ ist. In Kapitel *IX wird genauer beschrieben, wie man das Integral in (12.17) mittels geeigneter Limiten von Poissonsummen konstruiert. $\square$

Als weitere wichtige Klasse von Beispielen für PIIS betrachten wir symmetrisch stabile Prozesse.

*__12.19 Beispiel (Symmetrisch stabile Prozesse mit Index__ $0<\alpha<2$**):** In Dimension $d=1$, betrachte in (12.17) symmetrische Masse Λ

$$\Lambda(dx) \;=\; \xi\,\alpha\,|x|^{-\alpha-1}\,dx \quad \text{auf} \quad I\!R\setminus\{0\}$$

mit Gestaltparameter $0<\alpha<2$ und Gewichtsparameter $\xi>0$ (es gilt $\Lambda\in\mathcal{M}$, der Klasse aller σ-endlichen Masse auf $I\!R\setminus\{0\}$, welche der Bedingung $\int_{I\!R\setminus\{0\}}(x^2\wedge 1)\,\Lambda(dx)<\infty$ genügen, vgl. 9.1–9.3 und 9.13–9.14). Für diese Wahl von Λ berechnet man

$$\psi(v) \;=\; \int_{I\!R\setminus\{0\}}[e^{ivx}-1-(ivx)1_{\{|x|\le c\}}]\,\Lambda(dx) \;=\; -\,c_\Lambda\,|v|^\alpha \;,\;\; v\in I\!R$$

mit einer expliziten Konstante $c_\Lambda>0$ (siehe 9.14). Beachte (vgl. 9.13): wegen Symmetrie von Λ ist die rechte Seite unabhängig von der Wahl des Trunkationsfaktors $c>0$. Sei μ_t das Wahrscheinlichkeitsmass auf $(I\!R,\mathcal{B}(I\!R))$ mit charakteristischer Funktion

$$(12.19') \qquad v \longrightarrow e^{t\,\psi(v)} \;=\; e^{-\,t\,c_\Lambda\,|v|^\alpha} \quad , \quad v\in I\!R$$

(mit $\Lambda\in\mathcal{M}$ gilt auch $t\,\Lambda\in\mathcal{M}$ für jedes $t>0$, 9.1 und 9.3). Durch (12.19') wird eine Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\ge0}$ auf $(I\!R,\mathcal{B}(I\!R))$ definiert, mit $\mu_0=\epsilon_0$. Nach 12.14" induziert diese Faltungshalbgruppe in eindeutiger Weise einen PIIS als kanonischen Prozess auf dem kanonischen Pfadraum $(E^I,\mathcal{E}^I)$, $I=[0,\infty)$, $E=I\!R$, $\mathcal{E}=\mathcal{B}(I\!R)$, unter einem geeigneten, nach Kolmogorov eindeutig durch $(\mu_t)_{t\ge0}$ bestimmten Wahrscheinlichkeitsmass P. Den so enstandenen Prozess unter P nennen wir *symmetrisch stabil mit Parameter* α, $0<\alpha<2$.

Der Parameter $0<\alpha<2$ liefert eine Skalierungseigenschaft für die Zuwächse bzw. für den Zustand zur Zeit $0<t<\infty$ des Prozesses, denn aus der Gestalt der charakteristischen Funktion (12.19') ergibt sich sofort

$$\text{für } 0\le s<t<\infty \text{ gilt} \quad \mathcal{L}\left(\frac{\pi_t-\pi_s}{(t-s)^{1/\alpha}}\mid P\right) \;=\; \mathcal{L}(\pi_1\mid P) \;=\; \mu_1\;,$$

vergleiche 9.16+9.17. Der Grenzfall $\alpha=2$ in (12.19') entspricht der Brownschen Bewegung. Wieder liefert dies eine vorläufige Definition der symmetrisch stabilen Prozesse, ohne jede Pfadeigenschaften, allein im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen. $\square$

***12.20 Bemerkungen zum allgemeinen eindimensionalen PIIS:** 1) In analoger Weise konstruiert man aus der Lévy-Chinchine Formel 9.12 eindimensionale Lévy-Prozesse $(\pi_t)_{t\geq 0}$ aus ihrer Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\geq 0}$: für $t>0$ ist μ_t das Wahrscheinlichkeitsmass mit charakteristischer Funktion

$$v \longrightarrow e^{t\,\psi(v)} \quad , \quad \psi(v) \,:=\, icv - \frac{1}{2}\sigma^2 v^2 + \int_{I\!R\setminus\{0\}} [e^{ivx} - 1 - (ivx) 1_{\{|x|\leq 1\}}]\, \Lambda(dx)$$

$(v \in I\!R)$ mit Lévy-Tripel

$$\big(c\,,\, \sigma^2\,,\, \Lambda\big) \quad : \quad \Lambda \in \mathcal{M} \text{ wie in 9.1, } \; c \in I\!R\,,\; \sigma^2 \geq 0\,.$$

Nach 9.12 liefert dies die allgemeine Gestalt der Zuwächse eines eindimensionalen Lévy-Prozesses. Der Parameter c steht dabei für einen deterministischen Shiftanteil, σ skalierteine Brownschen Bewegung, und Λ bestimmt als Lévy-Mass einen Prozess mit Zuwächsen vom Typ 'Poisson-Mischung'. Notwendig sind Brownsche Bewegung und 'Poisson-Mischung' als Bestandteile des Prozesses $(\pi_t)_{t\geq 0}$ hierbei unabhängig, nach Gestalt der charakteristischen Funktion.

2) Ohne Beweis bemerken wir für den Fall $\sigma = 0$ (kein Gausscher Anteil) in 1) folgendes:

i) Es ist bekannt, dass $\mathcal{L}(\pi_t|P)$ unter der 'Kallenberg-Bedingung'

$$\frac{1}{\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} y^2\, \Lambda(dy) \;\longrightarrow\; \infty \quad \text{für } \varepsilon \downarrow 0$$

für jedes $t>0$ eine unendlich oft differenzierbare Lebesgue-Dichte besitzt. Dies ist eine hinreichende Bedingung; für hinreichende und notwendige Bedingungen siehe Knopova und Schilling (2011).

ii) Die Kallenberg-Bedingung ist offensichtlich für die symmetrisch stabilen Prozesse mit Parameter $0<\alpha<2$ wie in 12.19 erfüllt. Also besitzen die Zuwächse des symmetrisch stabilen Prozesse mit Parameter $0<\alpha<2$ 'schöne' Lebesgue-Dichten. Diese können allerdings –bis auf den Spezialfall $\alpha = 1$ (Cauchy-Prozess) nicht in geschlossener Form angegeben werden. Nur Darstellungen in Form unendlicher Reihen existieren, siehe Feller II (1971, S. 569+582).

iii) Wieder liefert die gegebene Konstruktion keinerlei 'Pfadeigenschaften'. Folgendes ist bekannt. Besitzt das Mass $\Lambda \in \mathcal{M}$ unendliche Gesamtmasse auf kleinen punktierten Umgebungen der 0, so weiss man, dass die typischen Pfade des Prozesses $(\pi_t)_{t\geq 0}$ nirgends konstant sind und nur durch Sprünge wachsen. Dabei findet man auf jedem endlichen Zeitintervall p-fast sicher stets endlich viele 'grosse' zusammen mit 'unendlich vielen unendlich kleinen' Sprüngen. Die 'unendlich kleinen' Sprünge sind i.a. nicht im üblichen Sinn summierbar, sondern nur kompensiert in einem L^2-Sinn summierbar. Siehe Bertoin (1996). □