Reinhard Höpfner

Vorlesung Stochastik II

Kapitel XIII:

Pfadeigenschaften von Prozessen,

Brownsche Bewegung,

Markoveigenschaften in stetiger Zeit

Wintersemester 2019/20

Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg Universität Mainz

January 29, 2020

Übersicht zu Kapitel XIII :

*D. Markoveigenschaften in stetiger Zeit

A. Versionen stochastischer Prozesse, Pfadeigenschaften

In einem stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$ (I eine beliebige Indexmenge, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum) heissen die Abbildungen

$$X_{\cdot}(\omega) : \quad I \ni t \ \to \ X_t(\omega) \in E \quad , \quad \omega \in \Omega \text{ fest}$$

Pfade (oder *Trajektorien*) des Prozesses X. Für $I \subset [0, \infty)$ interpretiert man den Parameter $t \in I$ im allgemeinen als Zeit. I kann aber auch eine Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ sein, z.B. ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^k$; man nennt den Prozess dann auch ein *Zufallsfeld* (und wird sich einen Pfad eher als Fläche über K vorstellen).

Die Konstruktion eines stochastischen Prozesses hat typischerweise zwei Etappen. In einem ersten Schritt verschafft man sich einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t\in I}$ auf irgendeinem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, welcher die richtigen endlichdimensionalen Randverteilungen besitzt. Dies leistet im allgemeinen der Konsistenzsatz von Kolmogorov: wie in Kapitel XII erhält man ein Wahrscheinlichkeitsmass P auf $(\Omega, \mathcal{A}) = (E^I, \mathcal{E}^I)$, unter dem der *kanonischer Prozess* $\pi = (\pi_t)_{t\in I}$ auf dem kanonischen Pfadraum $(E^I, \mathcal{E}^I, P)$ die gewünschten endlich-dimensionalen Randverteilungen besitzt. In einem zweiten Schritt arbeitet man auf 'schöne' Eigenschaften der Pfade spezifischer Prozesse hin. Zum Beispiel möchte man zeigen, dass typische Pfade der Brownschen Bewegung stetig sind, oder dass typische Pfade des Poissonprozesses $\mathbb{N}_0$–wertig, stückweise konstant, rechtsstetig und nichtfallend sind, wobei nur Sprünge der Höhe 1 auftreten.

Bezeichne $(*)$ eine interessante Pfadeigenschaft, etwa im Fall $I = [0, \infty)$ und $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ eine der beiden Eigenschaften

- für alle $\omega \in \Omega$ sei der Pfad $X_{\cdot}(\omega)$ in $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$,
  der Klasse aller stetigen Funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$
- für alle $\omega \in \Omega$ sei der Pfad $X_{\cdot}(\omega)$ in $D([0, \infty), \mathbb{R}^d)$,
  der Klasse aller rechtsstetigen Funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ mit Limiten von links (kurz *càdlàg–Funktionen*), d.h.: an jeder Stelle $0 \le t < \infty$ existiere ein Grenzwert von rechts, dieser stimme überein mit dem Funktionswert
  $$f(t) \ = \ \lim_{s \downarrow t} f(s) \ ,$$
  und an jeder Stelle $0 < t < \infty$ existiere ein Grenzwert von links
  $$\lim_{s \uparrow t} f(s) \quad \text{existiert in} \quad \mathbb{R}^d \ .$$

Das erhält man nicht aus der Konstruktion des Konsistenzsatzes, kann aber oft nach Abänderung jeder einzelnen Variable X_t auf einer P-Nullmenge

$$(+) \qquad \text{für jedes } t \in I \text{ fest} \;:\quad X_t \;\rightsquigarrow\; \widetilde{X}_t \quad \text{so dass } \; P(\widetilde{X}_t \neq X_t) = 0$$

zu einem modifizierten Prozess $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)_{t \in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ übergehen, der wegen $(+)$ *dieselben endlichdimensionalen Randverteilungen* wie X besitzt, und in dem *alle Pfade* die gewünschte Eigenschaft $(*)$ besitzen.

13.1 Definition: Seien $(X_t)_{t\in I}$, $(\widetilde{X}_t)_{t\in I}$ zwei stochastische Prozesse, auf demselben $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mit demselben Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$. Man nennt $\widetilde{X}$ eine *Version* (oder eine *Modifikation*) von X falls gilt:

$$P(X_t \neq \widetilde{X}_t) \;=\; 0 \quad \text{für jedes einzelne } t \in I\;.$$

Im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen sind Versionen X, $\widetilde{X}$ nicht voneinander zu unterscheiden; die Pfade $X.(\omega)$ und $\widetilde{X}.(\omega)$ sind jedoch typischerweise drastisch verschieden.

13.1' Beispiel: Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ ohne Punktmassen, d.h. es gelte $Q(\{x\}) = 0$ für jedes $x \in [0,1]$. Setze $(\Omega, \mathcal{A}, P) := ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), Q)$ und setze $I := [0,1]$. Definiere auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ zwei stochastische Prozesse $(X_t)_{t\in I}$, $(\widetilde{X}_t)_{t\in I}$ durch

$$\text{für alle } t \in I\text{:} \quad X_t(\omega) := \left\{ \begin{array}{l} 0 \;\text{ falls } t \neq \omega \\ 1 \;\text{ falls } t = \omega \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \widetilde{X}_t(\omega) := 0$$

für alle $\omega \in \Omega$. Nach Voraussetzung über Q ist $\widetilde{X}$ eine Modifikation von X, da

$$\text{für } t \in I \text{ fest:} \quad P\left(\left\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \neq \widetilde{X}_t(\omega)\right\}\right) \;=\; Q(\{t\}) \;=\; 0\;.$$

Zugleich stimmen aber die Pfade $X_{\bullet}(\omega)$ und $\widetilde{X}_{\bullet}(\omega)$ für kein einziges $\omega \in \Omega$ überein. □

Wir formulieren die nächsten Sätze für den Fall der Indexmenge $I = [0, \infty)$ (siehe Bemerkung 13.8 für die Verallgemeinerung auf Indexmengen $I \subset \mathbb{R}^k$, $k > 1$).

13.2 Hilfssatz: Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Hinreichend dafür, dass eine Version $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ von $(X_t)_{t\geq 0}$ existiert, deren Pfade sämtlich stetig sind, ist das folgende Paar von Bedingungen (13.3) und (13.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Stochastische Stetigkeit:} \quad \text{für jedes } t \geq 0 \text{ und jede Folge } t_n \to t \text{ in } [0, \infty) \\ \text{gilt } \; X_{t_n} \to X_t \;\; P\text{-stochastisch für } n \to \infty; \end{array} \right. \tag{13.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Separabilität:} \quad \text{Es gibt eine } P\text{-Nullmenge } N \in \mathcal{A} \text{ und eine abzählbar dichte} \\ \text{Teilmenge } S \subset [0, \infty), \text{ so dass die die auf } [0, m] \cap S \text{ eingeschränkten Pfade} \\ \qquad [0, m] \cap S \; \ni \; t \; \longrightarrow \; X_t(\omega) \; \in \mathbb{R}^d \\ \text{gleichmässig stetige Funktionen } [0, m] \cap S \to \mathbb{R}^d \text{ sind,} \\ \text{für jedes } \omega \in \Omega \backslash N \text{ und jedes } m \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \tag{13.4}$$

Beweis: Sei S abzählbar dicht in $[0, \infty)$.

1) Wir starten mit einer Vorüberlegung in Dimension $d = 1$: Sei f eine Funktion $S \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Einschränkung von f auf $[0, m] \cap S$ gleichmässig stetig ist. Dann kann f zu einer stetigen Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

Bew.: i) Fixiere ein beliebiges $t \in [0, \infty)$ und wähle $m > t$. Nach Voraussetzung ist f insbesondere beschränkt auf $[0, m] \cap S$, also existieren

$$\overline{f}(t) := \limsup_{s \in S \,,\, s \to t} f(s) \; \in \mathbb{R} \,, \quad \underline{f}(t) := \liminf_{s \in S \,,\, s \to t} f(s) \; \in \mathbb{R} \,.$$

Angenommen, diese stimmten nicht überein: dann existierten $\underline{f}(t) < a < b < \overline{f}(t)$ und zwei gegen t konvergierende Folgen $(s_n)_n$, $(r_n)_n$ in S so dass

$$|s_n - r_n| \longrightarrow 0 \,, \; n \to \infty \,, \quad f(s_n) < a \; \text{ und } \; f(r_n) > b \quad \text{für schliesslich alle } n \,,$$

im Widerspruch zur vorausgesetzten gleichmässigen Stetigkeit der Einschränkung $f : [0, m] \cap S \to \mathbb{R}^d$. Folglich existiert an jeder Stelle $t \in [0, \infty)$ ein Grenzwert

$$\widetilde{f}(t) \; := \lim_{s \in S \,,\, s \to t} f(s)$$

in $\mathbb{R}$. Im Falle $t \in S$ stimmt $\widetilde{f}(t)$ nach Voraussetzung mit dem Funktionswert $f(t)$ überein. Wir setzen also $f : S \to \mathbb{R}$ durch Hinzunahme von Grenzwerten an allen Stellen $t \in [0, \infty) \setminus S$ fort zu einer Funktion $\widetilde{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Es ist noch zu beweisen, dass $\widetilde{f} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist.

ii) Fixiere $t \in [0, \infty)$, sei $m > t$, sei $(t_n)_n \subset [0, m]$ eine Folge mit $t_n \to t$. Nach Konstruktion in i) findet man zu jedem t_n ein $s_n \in S$ so dass

$$|s_n - t_n| \; < \; 2^{-n} \quad , \quad \left| \widetilde{f}(t_n) - f(s_n) \right| \; < \; 2^{-n}$$

gelten. Wegen $t_n \to t$ gilt auch $s_n \to t$ für $n \to \infty$: dies erzwingt $\lim\limits_n f(s_n) = \widetilde{f}(t)$ nach Schritt i) (insbesondere existiert $\lim\limits_n f(s_n)\,!$). Zugleich muss $\lim\limits_n f(s_n)$ übereinstimmen mit $\lim\limits_n \widetilde{f}(t_n)$. Damit gilt $\lim\limits_n \widetilde{f}(t_n) = \widetilde{f}(t)$ an jeder Stelle $t \in [0,\infty)$.

2) Wir beweisen die Aussage des Satzes. Zu dem $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definieren wir mit der P-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ und der abzählbar dichten Teilmenge $S \subset [0,\infty)$ aus (13.4) einen $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozess $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ durch

$$\widetilde{X}_t(\omega) \;:=\; 1_{N^c}(\omega) \cdot \left\{ \begin{array}{ll} X_t(\omega) & \text{falls } t \in S \\ \lim\limits_{s\in S\,,\, s\to t} X_s(\omega) & \text{falls } t \notin S \end{array} \right\} \,, \quad t \geq 0\,,\, \omega \in \Omega\,.$$

Für $\omega \in N^c$ ist dann – wegen (13.4) und wegen 1) angewandt auf jede einzelne Komponente des eingeschränkten Pfades $S \cap [0,m] \ni t \to X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ – der neu definierte Pfad $\widetilde{X}_{\bullet}(\omega)$ eine stetige Funktion $[0,\infty) \to \mathbb{R}^d$. Für $\omega \in N$ gilt $\widetilde{X}_{\bullet}(\omega) \equiv 0$ nach Definition. Also sind alle Pfade von $\widetilde{X}$ stetig. Der Prozess $\widetilde{X}$ ist eine Modifikation von X: Betrachte zuerst $t \in S$. Wegen $N \in \mathcal{A}$ ist dann $\widetilde{X}_t = 1_{N^c} X_t$ eine $\mathcal{A}$-messbare Zufallsvariable; da N eine P-Nullmenge ist, gilt $\widetilde{X}_t = X_t$ P-fast sicher. Sei nun $t \notin S$. In diesem Fall ist $\widetilde{X}_t$ als Limes von $\mathcal{A}$-messbaren Abbildungen $\mathcal{A}$-messbar, und für jede Folge $(s_n)_n \subset S$ mit $s_n \to t$, jedes $\varepsilon > 0$ und hinreichend grosses $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$P(|X_t - \widetilde{X}_t| > \varepsilon) \;\leq\; P(|X_t - X_{s_n}| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|X_{s_n} - \widetilde{X}_{s_n}| \neq 0) + P(|\widetilde{X}_{s_n} - \widetilde{X}_t| > \frac{\varepsilon}{2})$$

wobei die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 strebt: der erste Term verschwindet wegen stochastischer Stetigkeit (13.3), der zweite ist schon 0 nach Definition von $\widetilde{X}$, und der dritte verschwindet wegen Stetigkeit der Pfade von $\widetilde{X}$. Also gilt auch $X_t = \widetilde{X}_t$ P-fast sicher falls $t \notin S$. Gezeigt ist damit $X_t = \widetilde{X}_t$ P-fast sicher für jedes $t \in [0,\infty)$. $\square$

Stetige Versionen $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozesse mit Indexmenge $I = [0,\infty)$ existieren unter gewissen Voraussetzungen. Ein wichtiges Werkzeug ist der Satz von Kolmogorov-Prohorov.

13.5 Hauptsatz: (Kolmogorov-Prohorov) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Hinreichend dafür, dass eine Version $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ von $(X_t)_{t\geq 0}$ existiert, deren Pfade sämtlich stetig sind, ist die Bedingung

$$(13.6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{es gibt Konstanten } a > 0,\ b > 1,\ c > 0 \text{ so dass} \\ E_P(|X_s - X_t|^a) \;\leq\; c \cdot |t-s|^b \quad \forall\, s,t \in [0,\infty)\,. \end{array} \right.$$

Beweis: Wir zeigen in mehreren Schritten, dass (13.6) die Gültigkeit von (13.3)+(13.4) impliziert.

1) Nachweis von (13.3): eine einfache Anwendung der Chebyshev-Ungleichung zeigt für beliebiges $\varepsilon > 0$ und konvergente Folgen $t_n \to t$ in $[0, \infty)$

$$P(|X_t - X_{t_n}| > \varepsilon) \;\leq\; \frac{E_P(|X_t - X_{t_n}|^a)}{\varepsilon^a} \;\stackrel{(13.6)}{\leq}\; \frac{c\,|t-t_n|^b}{\varepsilon^a} \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

für $n \to \infty$. Also ist $(X_t)_{t\geq 0}$ stochastisch stetig.

2) Sei S abzählbar dicht in $[0, \infty)$, sei $m \in I\!N$. Wir definieren einen *Stetigkeitsmodul für die auf* $S \cap [0, m]$ *eingeschränkten Pfade* des Prozesses X, indem wir für jedes $\delta > 0$ setzen

$$V^S_{\delta,m}(\omega) \;:=\; \sup_{\substack{s,t\in S\cap[0,m] \\ |s-t|<\delta}} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \;.$$

Wegen der Abzählbarkeit von S sind die $V^S_{\delta,m}$ wohldefinierte Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Nach Definition ist $V^S_{\delta,m}(\omega)$ für festes ω monoton fallend in $\delta \downarrow 0$, und es gilt:

$$\lim_{\delta\downarrow 0} V^S_{\delta,m}(\omega) \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad S \cap [0, m] \ni t \to X_t(\omega) \;\in I\!R^d \text{ ist gleichmässig stetig.}$$

Damit erhält man für die in (13.4) relevante Menge C_S aller $\omega \in \Omega$ mit der Eigenschaft

$$S \cap [0, m] \ni t \;\longrightarrow\; X_t(\omega) \;\in I\!R^d \quad \text{ist gleichmässig stetig, für beliebiges } m \in I\!N$$

die Aussage

$$C_S \;=\; \bigcap_{m\in I\!N} \{\, \lim_{\delta\downarrow 0} V^S_{\delta,m} \;=\; 0 \,\} \quad \in \; \mathcal{A} \;.$$

Also sind (bei gegebenem S) die folgenden Aussagen i)–ii) gleichwertig:

i) es gilt (13.4) bezüglich S

i') es gilt $P(C_S) = 1$

ii) es gilt für alle $m \in I\!N$: $\lim_{\delta\downarrow 0} V^S_{\delta,m} = 0$ P-fast sicher.

3) Wir werden (13.4) bezüglich S beweisen, indem wir ii) zeigen; zum Nachweis von ii) reicht es aber,

(13.7) für jedes feste $\eta > 0$ und jedes m gilt $\lim_{\delta\downarrow 0} P(V^S_{\delta,m} > \eta) \;=\; 0$

nachzuweisen: $V^S_{\delta,m}(\omega)$ ist monoton fallend für $\delta \downarrow 0$, also sind Ereignisse $\{V^S_{\delta,m} > \eta\}$ bei festem $\eta > 0$ absteigend in $\delta \downarrow 0$, und mit absteigender Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmassen liefert (13.7)

$$P\left(\lim_{\delta\downarrow 0} V^S_{\delta,m} > \eta\right) \;=\; \lim_{\delta\downarrow 0} P\left(V^S_{\delta,m} > \eta\right) \;=\; 0 \;.$$

4) Für den Beweis von Satz 2.5 sind wir frei, eine abzählbar dichte Teilmenge $S \subset [0, \infty)$ zu wählen: ab jetzt sei S die Menge der dyadischen Zahlen in $[0, \infty)$. Mit dieser Wahl von S werden wir aus der Voraussetzung (13.6) des Satzes die Aussage (13.7) folgern. Damit wird wegen i)$\Longleftrightarrow$ii) in Schritt 2) oben die Gültigkeit von (13.4) mit dyadischem S nachgewiesen sein.

5) Betrachte $a > 0$, $b > 1$, $c > 0$ wie in (13.6) vorausgesetzt. Wegen $b > 1$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass $b - \varepsilon \cdot a > 1$; für dieses definieren wir Ereignisse $B_\ell = B_{\ell,m}(\varepsilon)$ durch

$$B_\ell := \bigcup_{k \geq \ell} \bigcup_{j=0}^{m2^k - 1} \left\{ \left| X_{\frac{j+1}{2^k}} - X_{\frac{j}{2^k}} \right| > 2^{-\varepsilon \cdot k} \right\} , \quad \ell \geq 1$$

und weisen nach:

$$(*) \qquad \lim_{\ell \to \infty} P(B_\ell) = 0 .$$

Bew: Zunächst gilt mit Chebychev und (13.6)

$$P(|X_t - X_s| > \eta) \leq \frac{E(|X_t - X_s|^a)}{\eta^a} \leq c\, \eta^{-a} |t - s|^b$$

und damit nach Wahl von ε

$$(+) \qquad P\left(|X_{\frac{j+1}{2^k}} - X_{\frac{j}{2^k}}| > 2^{-\varepsilon k} \right) \leq c\, 2^{-(b - \varepsilon a) k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \text{ alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

Angewandt auf die oben definierten Mengen $B_\ell = B_{\ell,m}(\varepsilon)$ zeigt (+)

$$\begin{aligned} P(B_\ell) &\leq \sum_{k \geq \ell} \sum_{j=0}^{m2^k - 1} P\left(\left| X_{\frac{j+1}{2^k}} - X_{\frac{j}{2^k}} \right| > 2^{-\varepsilon \cdot k} \right) \\ &\leq \sum_{k \geq \ell} (m\, 2^k)(c\, 2^{-(b - \varepsilon a) k}) = c\, m \sum_{k \geq \ell} 2^{-(b - \varepsilon a - 1) k} . \end{aligned}$$

Dieser Reihenrest strebt gegen 0 für $\ell \to \infty$ nach Wahl von ε; damit ist $(*)$ bewiesen.

6) Für $B_\ell = B_{\ell,m}(\varepsilon)$ aus Schritt 5) beweisen wir als nächstes :

$$(++) \qquad \text{für bel. } s, t \in S \cap [0, m] \text{ mit } |t - s| < 2^{-\ell} \text{ gilt:} \quad \left\{ |X_t - X_s| > 2 \cdot \sum_{k \geq \ell} 2^{-\varepsilon k} \right\} \subset B_\ell .$$

Bew: Seien $s < t$,m, ℓ wie in (++) fest. Dann gibt es eine spezielle Zerlegung des Intervalls $[s, t]$

$$(+++) \qquad s = s_1 < t_1 = s_2 < t_2 = \ldots = s_r < t_r = t , \quad [s, t] = \bigcup_{i=1}^{r} [s_i, t_i] , \quad r = r(s, t) \text{ geeignet}$$

mit den folgenden Eigenschaften (α)+(β):

(α) zu i gibt es ein $k_i \geq \ell$ so dass gilt: s_i, t_i sind benachbarte Punkte im Gitter $2^{-k_i} I\!N_0$;

(β) für festes $k \geq \ell$ findet man in der Zerlegung höchstens *zweimal* ein Paar s_i, t_i so dass

$$s_i,\ t_i \text{ sind benachbarte Punkte im Gitter } 2^{-k} I\!N_0 \ .$$

Das sieht man so: man betrachtet ein kleinstes $k \geq \ell$ so dass im offenen Intervall (s,t) ein Punkt x des Gitters $2^{-k} I\!N$ enthalten ist, und teilt das Intervall dort: $[s,t] = [\underline{s}, \underline{t}] \cup [\overline{s}, \overline{t}]$ mit $\underline{t} = x = \overline{s}$. Man betrachtet jedes Teilintervall separat. Für $[\underline{s}, \underline{t}]$ gilt ebenfalls $\underline{t} - \underline{s} < 2^{-\ell}$, damit $2^\ell(\underline{t} - \underline{s}) < 1$, und wegen $\underline{s}, \underline{t} \in S$ hat diese Zahl eine endliche dyadische Entwicklung

$$2^\ell(\underline{t} - \underline{s}) = \sum_{\text{endlich}} \alpha_i\, 2^{-i} \ , \quad \alpha_i \in \{0,1\} \text{ eindeutig bestimmt .}$$

Genauso erhält man

$$2^\ell(\overline{t} - \overline{s}) = \sum_{\text{endlich}} \beta_i\, 2^{-i} \ , \quad \beta_i \in \{0,1\} \text{ eindeutig bestimmt .}$$

Beiden dyadischen Entwicklungen entspricht in $[s,t]$ ein sukzessives Abspalten maximaler Subintervalle ausgehend vom Punkt $\underline{t} = x = \overline{s}$: dies führt zu den Aussagen (α)+(β). Für die Zerlegung (+++) des Intervalls $[s,t]$ gilt

$$|X_t - X_s|(\omega) \ \leq \ \sum_{i=1}^{r} |X_{t_i} - X_{s_i}|(\omega) \ ,$$

so dass die Aussage auf der linken Seite der in (++) behaupteten Inklusion

$$(\circ) \qquad |X_t - X_s|(\omega) \ > \ 2 \cdot \sum_{k \geq \ell} 2^{-\varepsilon\, k}$$

wegen (α)+(β) und wegen Dreiecksungleichung die Aussage

$$|X_{t_i} - X_{s_i}|(\omega) \ > \ 2^{-\varepsilon\, k(i)} \quad \text{für mindestens ein } i = 1, \ldots, r$$

impliziert, wobei $k(i)$ die in (α) einem Paar $s_i < t_i$ zugeordnete Gitterschrittweite bezeichnet. Dies zeigt, dass ein $\omega \in \Omega$ mit der Eigenschaft ($\circ$) notwendig –nach Definition von B_ℓ in Schritt 2), und wegen der Eigenschaft (α) der Zerlegung (+++)– zum Ereignis

$$B_\ell \ = \bigcup_{k \geq \ell} \ \bigcup_{j=0}^{m2^k - 1} \left\{ \left| X_{\frac{j+1}{2^k}} - X_{\frac{j}{2^k}} \right| > 2^{-\varepsilon\, k} \right\}$$

gehört. Damit ist (++) bewiesen.

7) Wir betrachten den Stetigkeitsmodul $V^S_{2^{-\ell},m}$ aus 2) und die Menge $B_\ell = B_{\ell,m}(\varepsilon)$ aus 5), definiert bezüglich des in Schritt 5) gewählten $\varepsilon > 0$, und zeigen

$$(**) \qquad \left\{ V^S_{2^{-\ell},m} > 2 \cdot \sum_{k \geq \ell} 2^{-\varepsilon k} \right\} \ \subset \ B_\ell \ .$$

Bew.: S ist die Menge der dyadischen Zahlen; wegen

$$V^S_{2^{-\ell},m} \;=\; \sup_{\substack{s,t\in S\cap[0,m]\\ |s-t|<2^{-\ell}}} |X_t - X_s|$$

gilt nach (++) in Schritt 6) für das in Schritt 5) definierte Ereignis $B_\ell = B_{\ell,m}(\varepsilon)$:

$$\left\{ V^S_{2^{-\ell},m} > 2\cdot\sum_{k\geq\ell} 2^{-\varepsilon k} \right\} \;\subset\; \bigcup_{\substack{s,t\in S\cap[0,m]\\ |s-t|<2^{-\ell}}} \left\{ |X_t - X_s| > 2\cdot\sum_{k\geq\ell} 2^{-\varepsilon k} \right\} \;\subset\; B_\ell\ .$$

8) Abschluss der Beweises: für $\eta > 0$ beliebig und hinreichend grosse ℓ gilt mit (∗∗)

$$\left\{ V^S_{2^{-\ell},m} > \eta \right\} \;\subset\; \left\{ V^S_{2^{-\ell},m} > 2\cdot\sum_{k\geq\ell} 2^{-\varepsilon k} \right\} \;\subset\; B_\ell$$

und damit nach (∗) in Schritt 5)

$$\lim_{\ell\to\infty} P\left(V^S_{2^{-\ell},m} > \eta \right) \;=\; \lim_{\ell\to\infty} P\left(B_\ell\right) \;=\; 0\ .$$

Das ist (13.7). Gemäss Schritt 4) ist der Beweis des Satzes damit abgeschlossen. □

13.8 Bemerkung: Stetige Versionen für $\mathbb{R}^d$-wertige stochastischen Prozesse $(X_t)_{t\in I}$, deren Indexmenge I ein Kompaktum in $\mathbb{R}^m$ ist, $m \geq 1$ beliebig, kann man mit Argumenten derselben Bauart konstruieren. Für $m \geq 1$ bleibt die Aussage von Satz 13.5 gültig, wenn die Voraussetzung $b > m$ in Bedingung (13.6) eingeschrieben wird. Siehe Kallenberg (2002, Theorem 3.23). Die einzige Stelle des Beweises des Satzes 13.5, welche wesentlich von der Dimension m der Indexmenge abhängt, ist das Summationsargument zur Berechnung von $P(B_\ell)$ in Schritt 5). Ist die Indexmenge I ein Kompaktum in $\mathbb{R}^m$, so braucht man dort Multiindices $\underline{j} = (j_1, \ldots, j_m)$ und Wege in Gittern $2^{-k}\mathbb{Z}^m$: dafür gibt es $O(2^{km})$ Möglichkeiten, daher braucht man $(b-\varepsilon a-m) > 0$ für den Beweis von (∗) in Schritt 5).

B. Die Standard-Brownsche Bewegung

Die Brownsche Bewegung trägt den Namen des englischen Botanikers R. Brown, der um 1830 unter dem Mikroskop eine seltsame Zickzackbewegung von Pollenkörnern in einem Wassertropfen beobachtete. L. Bachelier benutzte die Brownsche Bewegung um 1900 zur Analyse von Börsenkursen, A. Einstein 1905 zur Beschreibung der Bewegung von Molekülen, die in einem Gas unendlich vielen infinitesimalen Stössen durch andere Moleküle ausgesetzt sind. Eine mathematisch rigorose Konstruktion der Brownschen Bewegung wurde von N. Wiener um 1925 gegeben.

13.9 Definition: Eine d-dimensionale *Standard-Brownsche Bewegung* (SBB) ist ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit Werten in $I\!R^d$, definiert auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, der die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

i) X hat unabhängige Zuwächse, die in der folgenden Weise normalverteilt sind:

$$\text{für alle } 0 \leq s < t < \infty \; : \quad \mathcal{L}(X_t - X_s | P) \; = \; \mathcal{N}(0, (t-s)I_d) \; ;$$

ii) alle Pfade $X_{\bullet}(\omega) : [0, \infty) \to I\!R^d$ sind stetig;

iii) es gilt $X_0 = 0$ P-fast sicher.

13.9' Bemerkung: Oft fordert man auch die Eigenschaft ii) in Definition 13.9 nur P-fast sicher: hat man eine P-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, so dass für alle $\omega \in N^c$ die Pfade $X_{\bullet}(\omega) : [0, \infty) \to I\!R^d$ stetig sind, so liefert $\widetilde{X} := (1_{N^c} X_t)_{t \geq 0}$ eine Modifikation von X, die i)–iii) erfüllt.

13.10 Satz: Die Standard-Brownsche Bewegung existiert.

Beweis: 1) Schreibe $I = [0, \infty)$, $E = I\!R^d$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(I\!R^d)$. Wie in 12.17 konstruiert man zuerst aus der Faltungshalbgruppe $(\mathcal{N}(0_d, tI_d))_{t \geq 0}$ auf $(E, \mathcal{E})$ und der Startverteilung $\nu := \epsilon_0$ einen Prozess mit den Eigenschaften i)+iii) als kanonischen Prozess $X := (\pi_t)_{t \geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I, P) =: (\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei P durch die Familie (12.18) endlichdimensionaler Randverteilungen

$$\mathcal{L}\left((\pi_{t_i})_{i=1,\ldots,\ell} \mid P \right) \; = \; \mathcal{N}\left(\, (0_d)_{i=1,\ldots,\ell} \, , \, ((t_i \wedge t_j) I_d)_{i,j=1,\ldots,\ell} \right)$$

eindeutig bestimmt ist. Dies beruht allein auf dem Konsistenzsatz 12.6.

2) Betrachte für $1 \leq i \leq d$ die Komponenten $X^{(i)}$ des Prozesses $X = (X^{(i)})_{1 \leq i \leq d}$ separat (jedes $X^{(i)}$ ist im Sinne der endlichdimensionalen Randverteilungen eine eindimensionale Brownsche Bewegung). Wegen $\mathcal{L}(X_t^{(i)} - X_s^{(i)} | P) = \mathcal{N}(0, t-s)$ und $\int x^4 \, \mathcal{N}(0,1)(dx) = 3$ gilt für $s < t$

$$E\left(|X_t^{(i)} - X_s^{(i)}|^4 \right) \; = \; (t-s)^2 \cdot E\left(\left| \frac{X_t^{(i)} - X_s^{(i)}}{\sqrt{t-s}} \right|^4 \right) \; = \; 3\,(t-s)^2 \; .$$

Damit ist die Voraussetzung von Satz 13.5 erfüllt. Nach 13.5 existiert zu $X^{(i)}$ eine Modifikation $\widetilde{X}^{(i)}$ mit stetigen Pfaden. Wegen $\nu = \epsilon_0$ gilt $\widetilde{X}_0^{(i)} = 0$ P-fast sicher. Dies hat man für jedes $i = 1, \ldots, d$: damit ist für den $I\!R^d$-wertigen Prozess X eine Version $\widetilde{X} = (\widetilde{X}^{(i)})_{1 \leq i \leq d}$ mit stetigen Pfaden gefunden. Die Version $\widetilde{X}$ besitzt alle Eigenschaften i)–iii) aus Definition 13.9. $\square$

13.11 Bemerkung: Ist auf einem Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine d-dimensionale Standard-Brownsche Bewegung $X = (X_t)_{t \geq 0}$ gegeben, so erhält man für jedes $\Lambda \in I\!R^{d \times d}$ symmetrisch und nichtnegativ definit, $\mu \in I\!R^d$ und $x \in I\!R^d$ eine *d-dimensionale Brownsche Bewegung $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ mit Startpunkt x, Kovarianzmatrix Λ und Drift μ* über die Transformation

$$Y_t \;:=\; x \;+\; \Lambda^{1/2} X_t \;+\; \mu\, t\,, \quad t \geq 0\,. \qquad \square$$

Oft ist es praktisch, die Standard-Brownsche Bewegung direkt als kanonischen Prozess auf dem Pfadraum $C([0,\infty), I\!R^d)$ anzusetzen:

13.12 Satz: Wir versehen den Raum $C := C([0,\infty), I\!R^d)$ aller stetigen Funktionen $f : [0,\infty) \to I\!R^d$ mit der von den Koordinatenprojektionen

$$\alpha_t \;:\; \quad C \ni \, f \longrightarrow f(t) \;\in I\!R^d\,, \quad t \geq 0$$

erzeugten σ-Algebra $\mathcal{C} := \sigma(\alpha_t \,:\, t \geq 0)$. Dann gilt: Es gibt genau ein Wahrscheinlichkeitsmass Q^W auf $(C, \mathcal{C})$, unter dem der kanonische Prozess $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$ auf $(C, \mathcal{C})$ eine Standard-Brownsche Bewegung ist. Diess Wahrscheinlichkeitsmass Q^W auf $(C, \mathcal{C})$ nennt man *Wienermass*.

Beweis: Mit 13.9 und 13.10 geht man aus von einer SBB $X = (X_t)_{t \geq 0}$, die auf irgendeinem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiert ist, und betrachtet die Abbildung, die jedem $\omega \in \Omega$ den ω-Pfad $X_{\bullet}(\omega) \in C$ zuordnet

$$X_{\bullet} \;:\; \quad \Omega \ni \, \omega \longrightarrow X_{\bullet}(\omega) = (X_t(\omega))_{t \geq 0} \;\in C\,.$$

1) Wir zeigen: $X_{\bullet}$ ist eine messbare Abbildung von $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(C, \mathcal{C})$.
Dies liegt an der Definition der σ-Algebra $\mathcal{C} = \sigma(\alpha_t : t \geq 0)$ auf C, die von dem Mengensystem

$$\{\, \alpha_{t_i} \in F_i\,,\, 1 \leq i \leq \ell \,\} \;=\; \{\, f \in C : f(t_i) \in F_i\,,\, 1 \leq i \leq \ell \,\}\,, \quad F_i \in \mathcal{B}(I\!R^d)\,,\; t_i \geq 0\,,\; \ell \in I\!N\,,$$

erzeugt wird, denn Urbilder unter $X_{\bullet}$ solcher Mengen sind Ereignisse in $\mathcal{A}$:

$$(X_{\bullet})^{-1}\,(\{\, f \in C : f(t_i) \in F_i\,,\, 1 \leq i \leq \ell \,\}) \;=\; \{\, \omega \in \Omega : X_{t_i}(\omega) \in F_i\,,\, 1 \leq i \leq \ell \,\} \quad \in \; \mathcal{A}\,.$$

2) Definiert man auf $(C, \mathcal{C})$ ein Wahrscheinlichkeitsmass $Q^W := \mathcal{L}(X_{\bullet} | P)$ als Bild von P unter der messbaren Abbildung $X_{\bullet} : (\Omega, \mathcal{A}) \to (C, \mathcal{C})$, so erbt der Prozess der Koordinatenprojektionen

$$\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0} \text{ auf } (C, \mathcal{C}, Q^W)$$

die endlichdimensionalen Randverteilungen des ursprünglichen Prozesses:

$$\begin{aligned} Q^W(\,\alpha_{t_i} \in F_i\,,\, 1 \le i \le \ell\,) &= Q^W(\{\, f \in C : f(t_i) \in F_i\,,\, 1 \le i \le \ell\,\}) \\ &= P(\{\,\omega \in \Omega : X_{\cdot}(\omega) \in \{f \in C : f(t_i) \in F_i, 1 \le i \le \ell\}\,\}) \\ &= P(\{\,\omega \in \Omega : X_{t_i}(\omega) \in F_i\,,\, 1 \le i \le \ell\,\}\}) \ . \end{aligned}$$

3) Da für X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die endlich-dimensionalen Randverteilungen durch (12.15') mit $\Sigma = I_d$ gegeben sind, muss dasselbe für $\alpha = (\alpha_t)_{t \ge 0}$ auf $(C, \mathcal{C}, Q^W)$ gelten: insbesondere

$$(13.12') \qquad \begin{cases} \text{es gilt } \alpha_0 = 0 \;\; Q^W\text{-fast sicher, und für } 0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty \text{ beliebig :} \\ \mathcal{L}(\,(\alpha_{t_i})_{1 \le i \le \ell} \mid Q^W\,) \;=\; \mathcal{N}\Big(\,(0_d)_{1 \le i \le \ell}\,,\, ((t_i \wedge t_j) I_d\,)_{1 \le i,j \le \ell}\,\Big) \end{cases}$$

für beliebige $0 = t_0 \le t_1 < \ldots < t_\ell$, bzw. äquivalent

$$\begin{cases} \text{es gilt } \alpha_0 = 0 \;\; Q^W\text{-fast sicher, und für } 0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty \text{ beliebig :} \\ \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} \alpha_{t_1} - \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{t_\ell} - \alpha_{t_{\ell-1}} \end{pmatrix} \mid Q^W\,\right) \;=\; \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0_d \\ \vdots \\ 0_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1 I_d & & 0 \\ & (t_2 - t_1) I_d & \\ 0 & & (t_\ell - t_{\ell-1}) I_d \end{pmatrix} \right) \end{cases} .$$

4) Da die σ-Algebra $\mathcal{C}$ auf C von den Koordinatenprojektionen α_t, $t \ge 0$, erzeugt wird, kann es nach dem Eindeutigkeitssatz nur ein Wahrscheinlichkeitsmass Q^W auf $(C, \mathcal{C})$ mit (13.12') geben: dieses nennt man Wienermass. Unter Q^W hat der kanonische Prozess $\alpha = (\alpha_t)_{t \ge 0}$ auf $(C, \mathcal{C})$ alle Eigenschaften i)–iii) aus 13.9, und ist damit eine Standard-Brownsche Bewegung. □

13.12" Satz: Der Raum $(C, \mathcal{C})$ aus 13.12 ist ein polnischer Raum.

Beweis: Wir skizzieren die einzelnen Beweisschritte im Fall $d = 1$ (genaue Begründungen siehe unten); die Verallgemeinerung auf beliebige Dimension $d \ge 1$ ist dann leicht.
Wie in 13.12 bezeichne $(C, \mathcal{C})$ den Raum der stetigen Funktionen $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, versehen mit der durch die Koordinatenprojektionen $(\alpha_t)_{t \ge 0}$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{C}$. Erklärt man auf C die Metrik der lokal gleichmässigen Konvergenz

$$d(f, g) \;=\; \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} \left(1 \wedge \max_{0 \le s \le m} |f(s) - g(s)| \right) \ , \quad f, g \in C$$

so ist (C, d) vollständig und separabel. Die bezüglich $d(.,.)$ gebildete Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(C)$ stimmt überein mit der von den Koordinatenprojektionen erzeugten σ-Algebra $\mathcal{C} = \sigma(\alpha_t : t \ge 0)$. Nach Definition 10.24 ist somit $(C, \mathcal{C})$ aus 13.12 polnisch.

i) Vollständigkeit von (C, d) : Jede Cauchyfolge $(f_n)_n$ unter $d(.,.)$ ist in Einschränkung auf $[0, N]$ eine Cauchyfolge in $C([0, N])$, dem Raum der stetigen Funktionen $[0, N] \to \mathbb{R}$ mit gleichmässiger

Konvergenz auf $[0,N]$. Cauchyfolgen in $C([0,N])$ konvergieren. Dabei ist $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Für die Cauchyfolge $(f_n|_{[0,N]})_n$ in $C([0,N])$ gibt es folglich eine stetige Limesfunktion $g^{[N]} : [0,N] \to \mathbb{R}$. Notwendig gilt dabei $g^{[N]}|_{[0,N-1]} = g^{[N-1]}$, also lassen sich die $g^{[N]}$ zusammenkleben zu einer Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, welche stetig ist. Für diese gilt $f_n \to g$ in (C,d).

ii) Separabilität von (C,d): schreibe $\mathcal{A}^{[N,M]}$ für die Klasse aller Funktionen $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften: g ist konstant auf $[M,\infty)$, und in Einschränkung auf $[0,M]$ ist g ein Polygonzug mit Stützstellen $j2^{-N}$, $0 \le j \le M2^{-N}$, und mit dyadischen Werten $k2^{-N}$, $|k| \le N2^{-N}$, an diesen Stützstellen. Damit ist jedes $\mathcal{A}^{[N,M]}$ abzählbar, und die Vereinigung aller $\mathcal{A}^{[N,M]}$, $N, M \in \mathbb{N}$, liegt abzählbar dicht in (C,d).

iii) Es gilt $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(C)$: nach Wahl der Metrik $d(.,.)$ ist für jedes feste $t \ge 0$ die Koordinatenprojektion α_t eine stetige Funktion $C \to \mathbb{R}$. Also sind Urbilder offener Mengen offen: für O offen in $\mathbb{R}$ ist $\alpha_t^{-1}(O)$ offen in (C,d), also $\alpha_t^{-1}(O) \in \mathcal{B}(C)$. Damit ist α_t eine $\mathcal{B}(C)$–$\mathcal{B}(\mathbb{R})$–messbare Funktion. Somit gilt $\mathcal{C} = \sigma(\alpha_t : t \ge 0) \subset \mathcal{B}(C)$.

iv) Es gilt $\mathcal{B}(C) \subset \mathcal{C}$: Für S abzählbar dicht in C kann jede offene Menge als abzählbare Vereinigung geeigneter offener d-Kugeln um $g \in S$ mit rationalem Radius dargestellt werden. Insbesondere wird die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(C)$ vom System der offenen Kugeln $B_\varepsilon(g)$, $g \in C$, $\varepsilon > 0$ erzeugt. Kugeln

$$B_\varepsilon(g) \;=\; \{f \in C : d(f,g) < \varepsilon\} \;=\; \left\{ f \in C \;:\; \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \left(1 \wedge \max_{0 \le t \le j} |f(t) - g(t)|\right) \;<\; \varepsilon \right\}$$

können wegen der Stetigkeit von $t \to \alpha_t(f)$ für festes $f \in C$ in der Form

$$B_\varepsilon(g) \;=\; \left\{ f \in C \;:\; \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \left(1 \wedge \sup_{\substack{0 \le s \le j \\ s \in \mathbb{Q}}} |\alpha_s(f) - g(s)|\right) \;<\; \varepsilon \right\}$$

geschrieben werden und sind damit Ereignisse in der σ-Algebra $\mathcal{C} = \sigma(\alpha_t : t \ge 0)$.
Damit sind im Fall $d = 1$ alle oben gemachten Behauptungen bewiesen. □

Allerdings sind die Pfade der Brownschen Bewegung keineswegs glatt. Man kann zeigen (siehe Revuz-Yor 1991 S. 25), dass typische Pfade Hölder-stetig mit Hölder-Index $\frac{1}{2} - \varepsilon$ (für $\varepsilon > 0$ beliebig klein) sind. Hier beweisen wir nur:

13.13 Satz: Sei $X = (X_t)_{t \ge 0}$ – definiert auf irgendeinem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – eine Standard-Brownsche Bewegung. Dann gilt: P-fast sicher sind die Pfade von X an keiner Stelle $t \ge 0$ differenzierbar.

Beweis: Im Falle einer d-dimensionalen Standard-Brownsche Bewegung reicht es, die Behauptung für jede einzelne Komponente von X nachzuweisen. Wir führen also den Beweis für $d = 1$.

1) Für beliebiges festes $c > 0$ gilt für $n \to \infty$

$$P\left(\left|X_{\frac{1}{n}} - X_0\right| \le \frac{c}{n}\right) \;=\; \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})\,,$$

denn: Zuwächse über Zeitintervalle der Länge $\frac{1}{n}$ sind nach $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$ verteilt, also $\sqrt{n}(X_{\frac{1}{n}} - X_0)$ nach $\mathcal{N}(0,1)$, und damit gilt

$$\mathcal{N}(0,1)\left([-\frac{c}{\sqrt{n}}\,,\,+\frac{c}{\sqrt{n}}]\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-c/\sqrt{n}}^{+c/\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \;\le\; \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})\,.$$

2) Ist $f \in C$ an einer Stelle $0 < t < \infty$ differenzierbar, so gibt es eine Konstante $\beta \in I\!N$ und eine offene Umgebung $U = U(t)$ von t so dass

$$(+) \qquad |f(s) - f(t)| \;\le\; \beta\,|s-t| \quad \forall\, s \in U(t)\,.$$

Da $U = U(t)$ offen ist, muss es für hinreichend grosse $n \in I\!N$ eine Kette von vier sukzessiven Punkten des Gitters $\frac{1}{n}I\!N_0$ in der Nähe der Stelle t enthalten

$$(++) \qquad \frac{k-1}{n} \;<\; \frac{k}{n} \;\le\; t \;<\; \frac{k+1}{n} \;<\; \frac{k+2}{n}$$

für die wir betrachten

$$\varphi_{nk}(f) \;:=\; \max\left\{\left|f(\frac{k+2}{n}) - f(\frac{k+1}{n})\right|, \left|f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})\right|, \left|f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})\right|\right\}\,.$$

Einschieben von $f(t)$ in jeden Differenzterm, Dreiecksungleichung und (+) liefern die Abschätzung

$$\varphi_{nk}(f) \;\le\; 2\cdot\beta\cdot\frac{2}{n} \;=\; \frac{4\beta}{n}\,.$$

3) Wir betrachten nun für $0 < t < m$ mit fester Konstante $\beta \in I\!N$ das Ereignis, dass – irgendwo in dem auf $[0,m]$ eingeschränkten Pfad $X_{\bullet}$ – Zuwächse über drei aufeinander folgende Intervalle im Gitter $\frac{1}{n}I\!N_0$ die in Schritt 2) definierte Schranke einhalten:

$$B(\beta,m,n) \;:=\; \bigcup_{k=1}^{n\cdot m}\left\{\varphi_{nk}\circ X_{\bullet} \;\le\; \frac{4\beta}{n}\right\} \;\in \mathcal{A}\,.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse von X erhält man

$$P(B(\beta,m,n)) \;\le\; \sum_{k=1}^{n\cdot m} P\left(\varphi_{nk}\circ X_{\bullet} \le \frac{4\beta}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n\cdot m} P\left(|X_{\frac{k+2}{n}} - X_{\frac{k+1}{n}}| \le \frac{4\beta}{n}\;,\; |X_{\frac{k+1}{n}} - X_{\frac{k}{n}}| \le \frac{4\beta}{n}\;,\; |X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}}| \le \frac{4\beta}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n\cdot m}\left[P\left(|X_{1/n} - X_0| \le \frac{4\beta}{n}\right)\right]^3 \;=\; m\cdot n\cdot\left(\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)^3 \;=\; \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})\,.$$

Dies verschwindet für $n \to \infty$, also gilt für jedes feste β und m

$$\bigcap_{n \geq n_0} B(\beta, m, n) \quad \text{ist eine } P\text{-Nullmenge in } \mathcal{A}$$

bei beliebigem n_0.

4) Für die (i.a. nicht in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ enthaltene) Teilmenge von Ω

$$A(\beta, m) \ := \ \{\omega \in \Omega : \text{es existiert eine Stelle } t \in (0, m), \text{ an der die Schranke } (+) \text{ gilt}\}$$

muss wegen (+) und (++) zuerst

$$A(\beta, m) \ \subset \ \bigcup_{n_0} \bigcap_{n \geq n_0} B(\beta, m, n)$$

und dann

$$\bigcup_{\beta \in \mathbb{N}} A(\beta, m) \ \subset \ \bigcup_{\beta \in \mathbb{N}} \bigcup_{n_0} \bigcap_{n \geq n_0} B(\beta, m, n)$$

gelten. Auf der rechten Seite steht eine abzählbare Vereinigung von P-Nullmengen in $\mathcal{A}$, damit eine P-Nullmenge in $\mathcal{A}$: also ist die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die der Pfad $X_{\bullet}(\omega) \in C$ an auch nur einer einzigen Stelle $t \in (0, m)$ differenzierbar ist, eine *Teilmenge* einer P-Nullmenge in $\mathcal{A}$. Hierbei ist $m \in \mathbb{N}$ beliebig: also kann man ein Ereignis von vollem Mass angeben, auf dem der Pfad $X_{\bullet}$ nirgends in $(0, \infty)$ differenzierbar ist.

5) Eine rein notationelle Abwandlung der Argumente aus 2) für $t = 0$ und einseitig definierte Umgebungen von 0 liefert die entsprechende Behauptung für $t \in [0, \infty)$. □

B'. Der Poisson-Prozess

Die Brownsche Bewegung ist unser wichtigstes Beispiel für einen stochastischen Prozess mit stetigen Pfaden. Der Poissonprozess ist Prototyp eines stochastischen Prozesses mit Sprüngen.

13.14 Definition: Sei $\lambda > 0$. Ein *Poissonprozess mit Parameter* λ ist ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$, definiert auf irgendeinem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mit Zustandsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (oder einfacher: $\mathbb{N}_0$ versehen mit seiner Potenzmenge), und den folgenden Eigenschaften i) und ii):

i) der Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ hat unabhängige Zuwächse, die wie folgt Poisson-verteilt sind:

$$\forall\, s < t : \quad P\left(X_t - X_s \in A\right) \ = \sum_{k \in A \cap \mathbb{N}_0} e^{-\lambda(t-s)} \, \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} \ , \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ ;$$

ii) jeder Pfad $X_{\bullet}(\omega) : t \longrightarrow X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, ist stückweise konstant, nichtfallend, rechtsstetig, wobei alle Sprünge die Sprunghöhe +1 besitzen;

iii) es gilt $X_0 = 0$ P-fast sicher.

Insbesondere wächst der Pfad eines Poissonprozesses nur durch Sprünge, und besitzt höchstens endlich viele Sprünge auf endlichen Zeitintervallen.

13.15 Satz: Der Poisson-Prozess existiert.

Beweisskizze: 1) Wie in 12.19 konstruiert man aus der Faltungshalbgruppe $(\mathcal{P}(t\lambda))_{t\geq 0}$ – aufgrund des Kolmogorov-Konsistenzsatzes – einen Prozess mit unabhängigen Zuwächsen und mit den durch 13.14 i) vorgeschriebenen Randverteilungen als kanonischen Prozess $X := (\pi_t)_{t\geq 0}$ auf $(E^I, \mathcal{E}^I, P) =: (\Omega, \mathcal{A}, P)$ zur Startverteilung $\nu = \epsilon_0$ (mit $E = I\!R$ oder $E = I\!N_0$, und $I = [0,\infty)$).
2) Eine einfachere Variante der im Teilkapitel A benutzten Argumente – nachzulesen z.B. bei Bauer (1978, S. 390-391) – liefert eine Version $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ von $X = (\pi_t)_{t\geq 0}$, welche die geforderten Pfadeigenschaften besitzt. Mit $S :=$ Klasse der dyadischen Zahlen, abzählbar dicht in $[0,\infty)$, und mit X wie in 1) skizzieren wir die wesentlichen Schritte:
i) Für alle $s < t$ in S hat man $X_s \leq X_t$ P-fast sicher, auch sind Zuwächse $X_t - X_s$ P-fast sicher $I\!N_0$-wertig. Es gibt also eine P-Nullmenge N_1 so dass auf S eingeschränkte Pfade

$$(*) \qquad S \ni s \longrightarrow X_s(\omega) \in I\!R$$

für alle $\omega \in N_1^c$ nichtfallend und $I\!N_0$-wertig sind, und zur Zeit 0 in 0 starten. Folglich wird durch

$$\widetilde{X}_t := 1_{N_1^c} \lim_{s\in S\,,\, s\downarrow t} X_s \quad \text{für alle } t \geq 0$$

ein stochastischer Prozess definiert, dessen Pfade sämtlich nichtfallende càdlàg-Funktionen $[0,\infty) \to I\!N_0$ (mit Start in 0 zur Zeit 0) sind.
i') $\widetilde{X}$ ist eine Modifikation von X: Für $0 < \varepsilon < 1$ und alle $t_1 < t_2$ in $[0,\infty)$ gilt $P(X_{t_2} - X_{t_1} > \varepsilon) = P(X_{t_2} - X_{t_1} \geq 1) = 1 - e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$. Damit ist der Prozess X stochastisch stetig im Sinne von (13.3). Für festes $t \in [0,\infty)$ wählt man eine Folge $(s_n)_n \subset S$ mit $s_n \downarrow t$ und hat $\widetilde{X}_t = 1_{N_1^c} \lim_n X_{s_n}$ nach Definition von $\widetilde{X}$. Da $(X_{s_n})_n$ P-stochastisch gegen X_t konvergiert, folgt $\widetilde{X}_t = X_t$ P-fast sicher.
ii) Zuwächse von X über $\left[\frac{j+1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]$ sind verteilt nach $\mathcal{P}(\lambda 2^{-n})$, und für $\widetilde{\lambda} := \lambda 2^{-n}$ hat man die elementare Abschätzung $\sum_{r\geq 2} e^{-\widetilde{\lambda}} \frac{(\widetilde{\lambda})^r}{r!} \leq \widetilde{\lambda}^2 \cdot 1$. Damit gilt

$$P\left(\bigcup_{j=0}^{m\,2^{-n}-1} \left\{ X_{\frac{j+1}{2^n}} - X_{\frac{j}{2^n}} \geq 2 \right\} \right) \leq (m\,2^n)\,(\lambda 2^{-n})^2 = m\,\lambda^2\,2^{-n}$$

für jedes $n \in I\!N$. Also muss das Ereignis

$$N_2 := \bigcup_m \bigcup_{n_0} \bigcap_{n\geq n_0} \bigcup_{j=0}^{m\,2^{-n}-1} \left\{ X_{\frac{j+1}{2^n}} - X_{\frac{j}{2^n}} \geq 2 \right\}$$

eine P-Nullmenge in $\mathcal{A}$ sein. Für $\omega \in N_1^c \cap N_2^c$ sind die auf S eingeschränkten Pfade $(*)$ stückweise konstant und stetig von rechts, und wo es Sprünge im Pfad $(*)$ gibt, müssen diese die Sprunghöhe 1 aufweisen. $\widetilde{X}$ erbt diese Eigenschaft. $\square$

In Analogie zur Definition des Wienermasses auf dem Pfadraum $C([0,\infty), I\!R^d)$ als 'einfachste' Konstruktion der Standard Brownschen Bewegung (in 13.12) besteht die 'einfachste' Konstruktion eines Poissonprozesses mit Parameter $\lambda > 0$ darin, ein Wahrscheinlichkeitsmass auf dem für Poissonprozesse spezifischen Pfadraum festzulegen.

13.16 Satz: Schreibe $I\!M$ für den Raum aller Funktionen $f : [0,\infty) \to I\!N_0$ mit den in 13.14 ii) genannten Eigenschaften: f ist stückweise konstant, nichtfallend, rechtsstetig, und alle Sprünge von f haben Sprunghöhe 1. Versehe $I\!M$ mit der von den Koordinatenprojektionen $\alpha_t : f \to f(t)$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{M}$. Für jedes $\lambda > 0$ gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmass Q^λ auf $(I\!M, \mathcal{M})$, unter dem der kanonische Prozess $\alpha = (\alpha_t)_{t\geq 0}$ auf $(I\!M, \mathcal{M}, Q^\lambda)$ ein Poissonprozess mit Parameter λ ist.

Beweis: Man argumentiert genau wie in 13.12: Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Poissonprozess mit Parameter λ, definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Indem man den Pfad von X als messbare Abbildung $(\Omega, \mathcal{A}) \to (I\!M, \mathcal{M})$ betrachtet, definiert man Q^λ als Bild von P unter $X_{\bullet} : \Omega \ni \omega \longrightarrow X_{\bullet}(\omega) \in I\!M$. Nach Definition von $\mathcal{M}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(I\!M, \mathcal{M})$ durch seine endlichdimensionalen Randverteilungen eindeutig festgelegt. $\square$

13.16' Bemerkung: Betrachte eine Familie unabhängiger Poisson-Prozesse $X^{(i)}$ mit Parametern $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq n+m$, und reelle Konstanten $a_1, \ldots, a_{n+m} \neq 0$ so dass $|a_i| > 1$ für $1 \leq i \leq n$ und $|a_i| \leq 1$ für $n+1 \leq i \leq n+m$. Prozesse der Bauart

$$X = (X_t)_{t\geq 0}\ , \quad X_t \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_i\, X_t^{(i)} + \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i\, (X_t^{(i)} - \lambda_i \cdot t)\ , \quad t \geq 0$$

entsprechen den Poissonmischungen aus 9.4 oder 12.18 (hier mit $\Lambda := \sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i\, \epsilon_{a_i}$) und besitzen càdlàg-Pfade mit höchstens endlich vielen Sprüngen über kompakte Zeitintervalle.

Wir geben zwei weitere Ausblicke ohne Beweise.

13.16" Bemerkung: $(I\!M, \mathcal{M})$ ist ein polnischer Raum: es gibt eine Metrik auf $I\!M$, unter der $(I\!M, d)$ ein vollständiger und separabler metrischer Raum wird, wobei die von den Koordinatenprojektionen erzeugte σ-Algebra $\mathcal{M}$ auf $I\!M$ übereinstimmt mit der Borelschen $\mathcal{B}(I\!M)$.

Der Konvergenzbegriff (genaueres liest man nach im Buch von Billingsley 1968) ist der folgende. Schreibe Φ für die Klasse aller Zeittransformationen auf $[0,\infty)$, d.h. aller stetigen streng monoton wachsenden Funktionen $t \to \varphi(t)$ mit den Eigenschaften $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(t) \uparrow \infty$ für $t \to \infty$. Sei $f \in I\!M$, sei $(f_n)_n$ eine Folge in $I\!M$. Wir definieren Konvergenz in $I\!M$ wie folgt: es gilt $d(f_n, f) \to 0$ genau dann wenn man zu $(f_n)_n$ eine Folge von Zeittransformationen $(\varphi_n)_n$ finden kann, so dass

$$\phi_n \longrightarrow \text{id} \quad \text{und} \quad f_n \circ \varphi_n \longrightarrow f \quad \text{lokal gleichmässig auf } [0,\infty) \text{ für } n \to \infty\,.$$

Äquivalent formuliert: bezeichnet $(t_j)_{j\ge1}$ die aufsteigend geordnete Folge der Sprungzeiten eines Pfades $f \in I\!M$, so konvergieren Pfade f_n mit Sprungzeitenfolge $(t_j^{(n)})_{j\ge1}$ genau dann im Sinne der Metrik $d(f, f_n)$ gegen f, wenn für jedes feste $j \in I\!N$ die Konvergenz $t_j = \lim_{n\to\infty} t_j^{(n)}$ gilt.

*__13.16''' Bemerkung:__ Mit Martingalmethoden, die jenseits der bisher erarbeiteten Techniken liegen, kann man für die in 9.3 oder (12.17) als schwacher Limes von Poissonmischungen betrachteten unendlich teilbaren Verteilungen Q_Λ folgendes zeigen: der zur Faltungshalbgruppe $(Q_{t\Lambda})_{t\ge0}$ nach 12.14" existierende Prozess $(X_t)_{t\ge0}$ mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen besitzt càdlàg-Pfade. Hierbei ist Λ wie in 9.1 ein beliebiges σ-endliches Mass auf $I\!R \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $\int (x^2 \wedge 1)\Lambda(dx) < \infty$.

Ist Λ ein endliches Mass auf $I\!R \setminus \{0\}$, besitzen die Pfade von X höchstens endlich viele Sprünge über kompakte Zeitintervalle, und man nennt X oft auch *Compound Poisson-Prozess.* Eine empfehlenswerte Referenz ist das Buch von Brémaud, Point Processes and Queues, 1981.

Gilt dagegen $\Lambda\,(\,B_\varepsilon(0)\backslash\{0\}\,) = +\infty$ für beliebig kleines $\varepsilon > 0$, so ist die Struktur der Pfade (vgl. Bemerkung 12.20) viel subtiler: P-fast sicher sind diese nirgends konstant und besitzen abzählbar unendlich viele Sprünge. Für festes $\varepsilon > 0$ (beliebig klein) findet man auf jedem kompakten Zeitintervall höchstens endlich viele 'grosse' Sprünge (Sprünge, deren Sprunghöhe betragsmässig $> \varepsilon$ ist), daneben aber 'unendlich viele unendlich kleine' Sprünge (Sprunghöhe betragsmässig $\le \varepsilon$), die sich für 'Sprunghöhe gegen 0' häufen. Diese sind ähnlich wie in Bemerkung 9.7 nur in einem L^2-Sinn 'zentriert' summierbar. Siehe Bertoin (1996).

C. Eigenschaften der eindimensionalen Brownschen Bewegung

Ziel dieses Teilkapitels ist das Gesetz vom iterierten Logarithmus, das das Verhalten des Brownschen Pfades im Ursprung $t = 0$ sowie asymptotisch für $t \to \infty$ beschreibt, sowie die Untersuchung der Nullstellenmenge des Brownschen Pfades. Die starke Markoveigenschaft, die wir dabei in suggestiver

Weise benutzen, wird im Teilkapitel 13 *D (insbesondere: 13.32 und 13.36) sorgfältig formuliert werden; Teilkapitel *D kann separat gelesen (oder auch ausgelassen) werden. Zu Beginn betrachten wir statt der Brownschen Bewegung einen einfachen symmetrischen Random Walk.

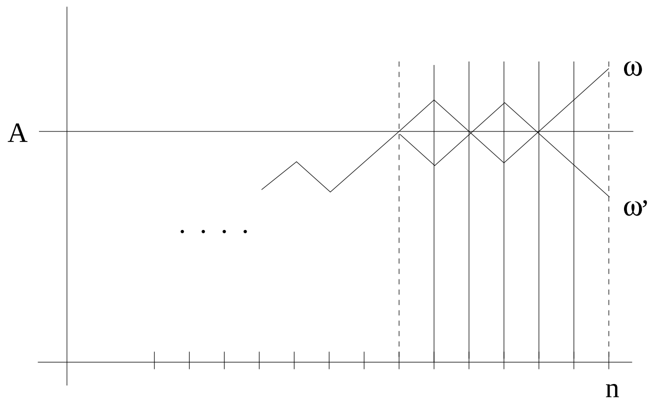
13.17 Hilfssatz (Spiegelungsprinzip): Sei $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der symmetrische Random Walk

$$S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} \xi_i \;, \quad (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ iid mit } P(\xi_1 = +1) = P(\xi_1 = -1) = \tfrac{1}{2} \;, \quad S_0 := 0$$

und $M_n := \max\limits_{0 \le k \le n} S_k$. Dann gilt für $a \in \mathbb{N}$ beliebig und alle n:

$$P(M_n \ge a) \;=\; 2\,P(S_n > a) + P(S_n = a) \;.$$

Beweis: Sei T_a die Zeit, zu der der Prozess S zum erstenmal die Schranke $a \in \mathbb{N}$ trifft. Im Prozess nach T_a hat jedes Pfadsegment dieselbe Wahrscheinlichkeit wie das entsprechende an a gespiegelte Pfadsegment:



also ist die Verteilung von S_n *in Einschränkung auf das Ereignis* $\{T_a < n\}$ symmetrisch um a. Da S nur Schritte der Höhe ± 1 machen kann, zeigt dies

$$P(S_n > a) = P(S_n > a, T_a < n) = P(S_n < a, T_a < n)$$

und folglich

$$P(T_a \le n, S_n \ne a) \;=\; P(T_a < n, S_n \ne a) \;=\; 2\,P(S_n > a) \;.$$

Zugleich gilt aber auch

$$P(T_a \le n, S_n = a) \;=\; P(S_n = a)$$

und Addition der letzten beiden Zeilen liefert die Behauptung:

$$P(M_n \ge a) \;=\; P(T_a \le n) \;=\; P(S_n = a) + 2\,P(S_n > a) \;. \qquad \square$$

13.17' Bemerkung: Der symmetrische Random Walk $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in 13.17 wird mit Wahrscheinlichkeit 1 jede noch so grosse Schranke $a \in \mathbb{N}$ irgendwann überschreiten:
mit dem Zentralen Grenzwertsatz gilt für $n \to \infty$ bei festem $a \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n > a) \;=\; \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n > \frac{1}{\sqrt{n}}a\right) \;=\; \mathcal{N}(0,1)\left((0,\infty)\right) \;=\; \frac{1}{2}\;,$$

analog

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n < a) \;=\; \frac{1}{2}$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n = a) \;=\; 0\;.$$

Daher zeigt die letzte Zeile des Beweises von 13.17

$$P(T_a < \infty) \;=\; \lim_{n\to\infty} P(T_a \le n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \left[\, P(S_n = a) + 2\,P(S_n > a)\,\right] \;=\; 1$$

für jedes feste $a \in \mathbb{N}$. □

13.17" Bemerkung: Wir werden in diesem Teilkapitel die *starke Markov-Eigenschaft* der Brownschen Bewegung X in der folgenden intuitiven Form (siehe Teilkapitel *D für exakte Formulierungen) benutzen. Sei $X = (X_t)_{t\ge 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, definiert auf irgendeinem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Betrachte die Filtration

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0} \quad , \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_{r>t} \sigma\left(X_s : 0 \le s \le r\right)\;.$$

Dies ist die kleinste *rechtsstetige* Filtration in $\mathcal{A}$, an die die Brownsche Bewegung adaptiert ist. Ist T eine $\mathbb{F}$-Stopzeit mit $P(T < \infty) = 1$, so liefert der *Prozess der Zuwächse nach der Zeit* T

$$Y = (Y_h)_{h\ge 0} \quad , \quad Y_h \;:=\; X_{T+h} - X_T \;\;,\;\; h \ge 0$$

wieder eine Brownsche Bewegung, und diese ist unabhängig von der Vergangenheit $\mathcal{F}_S$ im Prozess X bis zur Zeit T. Genaue Formulierung werden in Teilkapitel *D gegeben werden.

13.18 Satz (Spiegelungsprinzip): Für die eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung $X = (X_t)_{t\ge 0}$ mit Maximumsprozess M

$$M = (M_t)_{t\ge 0}\;, \quad M_t \;:=\; \max_{s\in[0,t]} X_s$$

und für beliebiges $a > 0$ gilt

$$P(M_t > a) \;=\; 2\,P(X_t > a)\;.$$

Beweisidee: Für $a > 0$ betrachte $T_a := \inf\{t > 0 : X_t > a\}$. Zuerst ist T_a fast sicher endlich, denn ähnlich wie in 13.18 wird der in X eingebettete Random Walk $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ jede noch so grosse Schranke $a > 0$ irgendwann überschreiten (ÜA). Für $\mathbb{F}$ wie in 13.18 definiert ist T_a eine $\mathbb{F}$-Stopzeit, denn Stetigkeit *aller* Pfade von X impliziert

$$\{T_a < t\} \;=\; \{M_t > a\} \;=\; \bigcup_{r \le t\,,\, r \in \mathbb{Q}^+} \{X_r > a\} \quad \in \mathcal{F}_t$$

für jedes $t > 0$ (detaillierte Begründung in 3.26, Teilkapitel *D). Mit 13.18 sind

$$X^{T_a} = (X_{T_a \wedge t})_{t \ge 0} \quad , \quad (X_{T_a + h} - X_{T_a})_{h \ge 0}$$

(der *zur Zeit T_A eingefrorene Prozess*, der wegen Stetigkeit aller Pfade zu dem *Prozess vor T_a* äquivalent ist, und der *Prozess der Zuwächse nach T_a*) unabhängig voneinander, und Symmetrie des zweiten Prozesses impliziert $P(T_a < t) = 2P(X_t > a)$. □

13.19 Satz: Sei $X = (X_t)_{t \ge 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Die *level crossing Zeiten* von X

$$T_a \;:=\; \inf\{t > 0 : X_t > a\}\,, \quad a > 0$$

sind P-fast sicher endlich und haben die Skalierungseigenschaft

$$\mathcal{L}(T_a | P) = \mathcal{L}(a^2 T_1 | P)\,, \quad a > 0\,.$$

Die Verteilung $\mathcal{L}(T_a|P)$ besitzt auf $(0, \infty)$ die stetige Lebesgue-Dichte

$$f_a(t) \;=\; \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\, t^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{t}}\,, \quad 0 < t < \infty\,.$$

Insbesondere hat $\mathcal{L}(T_a|P)$ *keinen endlichen Mittelwert*, und es gilt

$$P(T_a > t) \;=\; \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{für} \quad t \to \infty\,.$$

Beweis: Mit $M_t = \max_{0 \le s \le t} X_s$ und Φ Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}(0,1)$ gilt nach Spiegelungsprinzip

$$P(T_a < t) \;=\; P(M_t > a) \;=\; 2P(X_t > a) \;=\; 2P(X_1 > \frac{a}{\sqrt{t}}) \;=\; 2(1 - \Phi(\frac{a}{\sqrt{t}}))\,.$$

Die rechte Seite ist eine in $t \in (0, \infty)$ stetige Funktion, also gilt auch

$$P(T_a \le t) \;=\; 2(1 - \Phi(\frac{a}{\sqrt{t}}))\,, \quad 0 < t < \infty$$

und Ableiten nach t liefert die Dichte f_a wie angegeben. Deren Gestalt impliziert die Aussage über das Abklingen von $P(T_a > \cdot)$, und die Nicht-Endlichkeit erster Momente $E(T_a) = +\infty$. Die Skalierungseigenschaft kann man aus der Transformationsformel 3.12 herleiten (ÜA), aber auch aus Skalierungseigenschaften der Brownschen Bewegung. Man hat

$$\{T_a < t\} \;=\; \{\max_{s\le t} X_s > a\} \;=\; \{\,\max_{s\le t}\,[\frac{1}{a}X_s] > 1\,\} \;=\; \{\,\max_{r\le t/a^2}\,[\frac{1}{a}X_{a^2r}] > 1\,\}\;,$$

mit $X = (X_t)_{t\ge0}$ ist aber auch $\widetilde{X} := \left(\frac{1}{a}X_{a^2t}\right)_{t\ge0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung (genaueres siehe 13.21 unten), und zu dieser gehören Level-Crossing Zeiten $\widetilde{T}_b$, $b > 0$. Auf der rechten Seite der Gleichungskette steht damit

$$\{\,\max_{r\le t/a^2}\,\widetilde{X}_r > 1\,\} \;=\; \{\widetilde{T}_1 < t/a^2\} \;=\; \{a^2\widetilde{T}_1 < t\}\;.$$

Da sowohl X als auch $\widetilde{X}$ Standard-Brownsche Bewegungen sind, folgt

$$P(T_a < t) \;=\; P(a^2\widetilde{T}_1 < t) \;=\; P(a^2T_1 < t)$$

und damit die Behauptung. $\square$

*__13.19' Satz:__ Für jedes feste $a > 0$ ist das Wahrscheinlichkeitsmass $Q_a := \mathcal{L}(T_a|P)$ die folgende Eigenschaft: für i.i.d. Kopien $T_a^{(1)},\ldots,T_a^{(n)}$ von T_a gilt

$$\frac{T_{n\,a}}{n^{1/\alpha}} \;\stackrel{d}{=}\; \frac{T_a^{(1)} * \ldots * T_a^{(n)}}{n^{1/\alpha}} \;\stackrel{d}{=}\; T_a \quad \text{mit } \alpha := \tfrac{1}{2}$$

Man nennt daher $\mathcal{L}(T_a|P)$ strikt stabil mit Parameter $\alpha = \frac{1}{2}$.

Beweis: Die starke Markov-Eigenschaft 13.17" impliziert

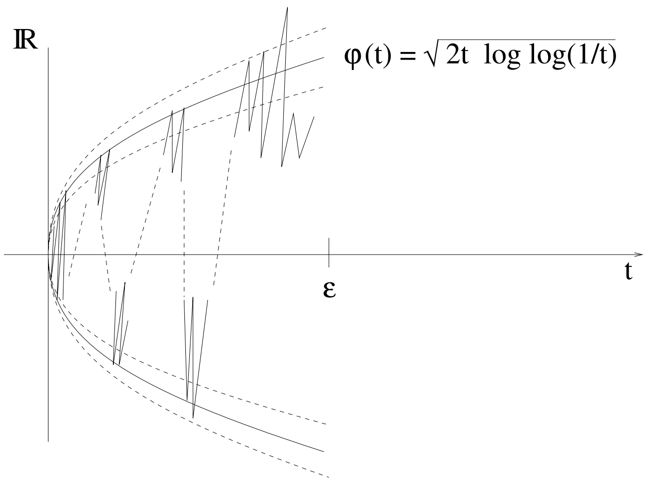
$$(+) \qquad \mathcal{L}(T_{a+a'}) \;=\; \mathcal{L}(T_a) * \mathcal{L}(T_{a'})\;, \quad a, a' \in (0,\infty)\;.$$

Dies sieht man so: um ein Niveau $a+a'$ zu erreichen, wartet man zuerst, bis die Brownsche Bewegung X das Niveau a überquert. Zur Zeit T_a startet mit $Y := (X_{T_a+t} - a)_{t\ge0}$ eine von der Vergangenheit bis T_a unabhängige Brownsche Bewegung. Danach wartet man, bis Y das Niveau a' überquert hat. Dies zeigt (+). Aus der Skalierungseigenschaft in 13.19 folgt mit $\alpha := \frac{1}{2}$

$$\mathcal{L}\left(\frac{T_{na}}{n^{1/\alpha}} \mid P\right) \;=\; \mathcal{L}\left(\frac{(na)^2T_1}{n^2} \mid P\right) \;=\; \mathcal{L}\left(a^2T_1 \mid P\right) \;=\; \mathcal{L}\left(T_a \mid P\right)$$

für jedes feste $a > 0$. Dies kombiniert mit (+) zeigt die Behauptung. $\square$

Das Hauptergebnis in diesem Teilkapitel ist das *Gesetz vom Iterierten Logarithmus (LIL)*. Es geht zurück auf Khintchine (1933) und Hartmann und Wintner (1941) und beschreibt das Verhalten der Brownschen Pfade am 'Ursprung' $t = 0$.



13.20 Satz (LIL in $t = 0$): Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann gelten die folgenden Aussagen i) und ii) P-fast sicher:

i) $$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log\log(\frac{1}{t})}} = 1 ,$$

ii) $$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log\log(\frac{1}{t})}} = -1 .$$

Beweis: 0) Es genügt, die Aussage i) zu beweisen: zugleich mit dem Prozess X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist auch der 'gespiegelte' Prozess $\widetilde{X} = (-X_t)_{t \geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung, und die Aussage ii) für X folgt sofort aus der Aussage i) für $\widetilde{X}$. Mit $t_0 := e^{-2}$ setze

$$\varphi(t) := \sqrt{2t \log\log(\frac{1}{t})} , \quad 0 < t < t_0 .$$

Die Behauptung i) ergibt sich aus dem folgenden Paar $(\alpha') + (\beta')$ von Aussagen:

(α') $$\forall\, \delta > 0 : \quad P\left(\limsup_{t \downarrow 0} 1_{(\,(1+\delta)\varphi(t)\,,\,\infty\,)}(X_t) = 1 \right) = 0 ,$$

(β') $$\forall\, \delta > 0 : \quad P\left(\limsup_{t \downarrow 0} 1_{(\,(1-\delta)\varphi(t)\,,\,\infty\,)}(X_t) = 1 \right) = 1 .$$

Wir werden $(\alpha') + (\beta')$ zeigen, indem wir das Paar von Aussagen $(\alpha) + (\beta)$ beweisen:

(α) für jedes $\delta > 0$ existiert ein $q = q(\delta) \in (0,1)$ so dass gilt: P-fast sicher tritt

$$X_t \ > \ (1+\delta)\,\varphi(t) \quad \text{für ein } t \text{ in } [q^{n+1}, q^n]$$

nur für endlich viele $n \in I\!N$ ein;

(β) für jedes $\delta > 0$ existiert ein $q = q(\delta) \in (0,1)$ so dass gilt: P-fast sicher tritt

$$X_{q^n} \ > \ (1-\delta)\,\varphi(q^n)$$

für unendlich viele $n \in I\!N$ ein.

Wir schreiben nun

$$M = (M_t)_{t \geq 0} \ , \quad M_t \ := \ \max_{s \in [0,t]} X_s \ , \ t \geq 0$$

für den Maximumsprozess der Brownschen Bewegung, und zeigen $(\alpha) + (\beta)$ in mehreren Schritten.

1) Beweis der Aussage (α): Fixiere $\delta > 0$ beliebig klein. Für $0 < q < 1$ geeignet (die Wahl von q wird später in ($\diamond$) getroffen) betrachte

$$C_n(q) \ := \ \left\{ X_t > (1+\delta)\varphi(t) \text{ für ein } t \in [q^{n+1}, q^n] \right\} \ \in \mathcal{A}$$

(da alle Pfade von X stetig sind, schreibt sich die Menge $C_n(q)$ als

$$\bigcup_{t \in [q^{n+1}, q^n] \cap \mathbb{Q}} \{ X_t > (1+\delta)\varphi(t) \}$$

und ist als Vereinigung abzählbar vieler Ereignisse ein Ereignis). Wir starten nach einer groben Abschätzung mit dem Spiegelungsprinzip:

$$\begin{aligned}
P(C_n(q)) \quad &\leq \quad P\left(M_{q^n} > (1+\delta)\varphi(q^{n+1})\right) \quad \overset{13.17}{\leq} \quad 2\,P\left(X_{q^n} > (1+\delta)\varphi(q^{n+1})\right) \\
&= \quad 2\,P\Bigg(\underbrace{\frac{X_{q^n}}{\sqrt{q^n}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} > \underbrace{(1+\delta)\,\frac{\varphi(q^{n+1})}{\sqrt{q^n}}}_{\to\infty \ , \ n \to \infty} \Bigg) \\
&\overset{n\to\infty}{\sim} \quad 2\left((1+\delta)\frac{\varphi(q^{n+1})}{\sqrt{q^n}} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \exp\left(-\frac{1}{2}\left[(1+\delta)\frac{\varphi(q^{n+1})}{\sqrt{q^n}} \right]^2 \right)
\end{aligned}$$

wobei für die 'tails' von $\mathcal{N}(0,1)$ die bekannte Abschätzung (Feller I, 1969, S. 165, mit Notation Φ für die Verteilungsfunktion und n für die Dichte von $\mathcal{N}(0,1)$)

$$1 - \Phi(x) \ \sim \ \frac{1}{x} n(x) \ , \quad x \to \infty$$

benutzt wurde, zusammen mit

$$\frac{\varphi(q^{n+1})}{\sqrt{q^n}} = \sqrt{2\cdot q \log\log\left((\frac{1}{q})^{n+1}\right)} = \sqrt{2\cdot q\left(\log(n+1)+\log\log(\frac{1}{q})\right)} \sim \sqrt{2\,q\,\log(n)}$$

für $n\to\infty$. Wählt man nun $q\in(0,1)$ nahe genug an 1:

$$(\diamond) \qquad (1+\delta)^2 q \;>\; 1$$

so gilt für $n\to\infty$

$$\frac{1}{2}\left[(1+\delta)\frac{\varphi(q^{n+1})}{\sqrt{q^n}}\right]^2 \;\sim\; (1+\delta)^2\cdot q\cdot\log n\;.$$

Damit sind nach Wahl von q in $(\diamond)$ die Wahrscheinlichkeiten

$$P(C_n(q)) \;=\; \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}} n^{-(1+\delta)^2 q}\right)$$

summierbar in n, und Borel-Cantelli 5.5 a) zeigt

$$P\,(C_n(q)\text{ tritt ein für unendlich viele } n) \;=\; 0\;;$$

damit ist (α) bewiesen. Mit (α) gilt aber auch (α'):

$$P\left(\limsup_{t\downarrow 0}\; 1_{(\,(1+\delta)\varphi(t)\,,\,\infty\,)}(X_t) \;=\; 1\right) \;=\; 0\;.$$

2) Fixiere $\varepsilon>0$ beliebig klein. Für $0<q<1$ geeignet (die Wahl von q wird später in $(*)$ getroffen) betrachte die unabhängigen Zuwächse

$$Z_n \;:=\; X_{q^n}-X_{q^{n+1}} \qquad \text{verteilt nach } \mathcal{N}(0,q^n-q^{n+1})=\mathcal{N}(0,q^n(1-q))$$

und zeige

$$(\gamma) \qquad P\,(\,D(q)\,) \;=\; 1\;,\quad D(q) \;:=\; \left\{\,X_{q^n} > (1-\varepsilon)\varphi(q^n)+X_{q^{n+1}}\;\text{ für unendlich viele } n\,\right\}\;.$$

Dies sieht man so: derselbe Schluss wie in Schritt 1) liefert mit einer geeigneten Konstanten C_q

$$\begin{aligned} &P\left(\,X_{q^n} > (1-\varepsilon)\varphi(q^n)+X_{q^{n+1}}\,\right) \;=\; P(\,Z_n > (1-\varepsilon)\varphi(q^n)\,) \\ &=\; P\left(\frac{Z_n}{\sqrt{q^n(1-q)}} > (1-\varepsilon)\frac{\varphi(q^n)}{\sqrt{q^n(1-q)}}\right) \\ &\sim\; C_q\,\frac{1}{\sqrt{\log n}}\,n^{-\frac{(1-\varepsilon)^2}{1-q}}\quad,\quad n\to\infty\;. \end{aligned}$$

Wählt man nun $q\in(0,1)$ klein genug:

$$(*) \qquad \frac{(1-\varepsilon)^2}{1-q} \;<\; 1\;,$$

so sind unter $(*)$ die Wahrscheinlichkeiten in der letzten Gleichungskette *nicht* summierbar über n, und Borel-Cantelli 5.5 b) – wegen Unabhängigkeit der $(Z_n)_n$ – liefert die Aussage (γ).

3) Als Hilfsresultat halten wir fest: für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ und für *jede* Wahl von $0 < q < 1$ gilt

$$(\delta) \qquad P\,(\,E(q)\,) \;=\; 1\,, \quad E(q) \;:=\; \{\,X_{q^n} \geq -(1+\varepsilon)\varphi(q^n) \;\text{ für schliesslich alle } n\,\}\;.$$

Diese Aussage (δ) ergibt sich sofort aus einer Anwendung der schon bewiesenen Aussage (α') auf die Standard-Brownsche Bewegung $\widetilde{X} := (-X_t)_{t\geq 0}$:

$$\begin{aligned} P\,(\,\Omega \setminus E(q)\,) &= P\,(\,X_{q^n} < -(1+\varepsilon)\varphi(q^n) \;\text{ für unendlich viele } n\,) \\ &\leq P\left(\limsup_{t\downarrow 0}\, 1_{(\,(1+\varepsilon)\varphi(t)\,,\,\infty\,)}(\widetilde{X}_t) \;=\; 1\right) \quad = \quad 0\,. \end{aligned}$$

4) Nun beweisen wir die Aussage (β) und schliessen damit den Beweis des Satzes ab. Fixiere $\delta > 0$ beliebig klein. Wir wählen zuerst ein $\varepsilon \in (0, \delta)$, danach ein q in $(0,1)$, welches klein genug ist, um neben der Bedingung $(*)$ aus Schritt 2)

$$q \;<\; 1 - (1-\varepsilon)^2$$

auch noch die Bedingung

$$(**) \qquad \sqrt{q} \;<\; \frac{\delta - \varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \quad\Longleftrightarrow\quad (1-\varepsilon) - 2(1+\varepsilon)\sqrt{q} \;>\; 1 - \delta$$

zu erfüllen. Durch sukzessiven Übergang zu Teilmengen erhält man wegen $(*)$ und $(**)$

$$\begin{aligned} & P\,(\,X_{q^n} > (1-\delta)\,\varphi(q^n) \quad \text{für unendlich viele } n\,) \\ \overset{(**)}{\geq}\;& P\,(\,X_{q^n} > [(1-\varepsilon) - 2(1+\varepsilon)\sqrt{q}\,]\,\varphi(q^n) \quad \text{für unendlich viele } n\,) \\ \geq\;& P\left(\,X_{q^n} > [(1-\varepsilon) - (1+\varepsilon)\;\underbrace{\frac{\varphi(q^{n+1})}{\varphi(q^n)}}_{\to\sqrt{q}\,,\;n\to\infty}\;]\,\varphi(q^n) \quad \text{für unendlich viele } n\right) \\ \geq\;& P\left(\;\{X_{q^n} > (1-\varepsilon)\varphi(q^n) + X_{q^{n+1}} \;\text{ und }\; X_{q^{n+1}} \geq -(1+\varepsilon)\varphi(q^{n+1}) \quad \text{für } \infty \text{ viele } n\,\}\right) \\ \geq\;& P\Big(\;\{X_{q^n} > (1-\varepsilon)\varphi(q^n) + X_{q^{n+1}} \quad \text{für unendlich viele } n\,\} \;\bigcap \\ & \qquad\qquad \left\{X_{q^{n+1}} \geq -(1+\varepsilon)\varphi(q^{n+1}) \quad \text{für schliesslich alle } n\right\}\Big) \\ =\;& P\,(\,D(q) \cap E(q)\,) \;\overset{(*)}{=}\; 1 \end{aligned}$$

nach (δ) und (γ). Damit ist (β) bewiesen, und der Beweis von 13.20 ist abgeschlossen. $\square$

Wir können also obere und untere Einhüllende für den Brownschen Pfad im Ursprung angeben. Das nächste Ziel besteht darin, obere und untere Einhüllende für den Brownschen Pfad 'nach langer Zeit' herzuleiten. Dies kann aus 13.20 mit 'Zeitumkehr' hergeleitet werden.

13.21 Satz: Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, definiert auf irgendeinem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Für jedes feste $a > 0$ ist der Prozess

$$\widetilde{\widetilde{X}} \;:=\; \left(\frac{1}{\sqrt{a}} X_{a\cdot t} \right)_{t\geq 0}$$

ebenfalls eine Standard-Brownsche Bewegung. Nach Abänderung der Pfade auf einer P-Nullmenge ist auch

$$\widetilde{X} = (\widetilde{X}_s)_{s\geq 0} \quad , \quad \widetilde{X}_s(\omega) \;:=\; \begin{cases} sX_{1/s}(\omega), & s > 0 \\ 0, & s = 0 \end{cases}$$

eine Standard-Brownsche Bewegung.

Beweis: Die erste Aussage ist leicht, sie folgt aus der Unabhängigkeit der Zuwächse in X bzw. $\widetilde{X}$ und der üblichen Skalierungseigenschaft von Normalverteilungen. Wir beweisen die zweite Aussage, in der eine 'Zeitumkehr' im Prozess X durchgeführt wird. Die Pfade von $\widetilde{X}$ sind stetig auf $(0,\infty)$, und die endlichdimensionalen Randverteilungen von $\widetilde{X}$ sind Normalverteilungen, deren Kovarianzmatrix für $0 < s_i, s_j < \infty$ die Einträge

$$E(\widetilde{X}_{s_i}\, \widetilde{X}_{s_j}) = s_i s_j E(X_{1/s_i}\, X_{1/s_j}) = s_i s_j (\frac{1}{s_i} \wedge \frac{1}{s_j}) = s_j \wedge s_i$$

aufweist. Damit hat der Prozess $(\widetilde{X}_s)_{0<s<\infty}$ die endlichdimensionalen Randverteilungen der auf das Zeitintervall $(0,\infty)$ eingeschränkten Standard-Brownschen Bewegung

$$(*) \qquad 0 < s_1 < \ldots < s_\ell < \infty \;:\; \mathcal{L}((\widetilde{X}_{s_1}, \ldots, \widetilde{X}_{s_\ell})|P) = \mathcal{N}(0, (s_i \wedge s_j)_{i,j=1,\ldots,\ell})\;.$$

Es bleibt zu zeigen, dass P-fast alle Pfade von $\widetilde{X}$ stetig sind in $t = 0$, genauer:

$$\text{für } P\text{-fast alle } \omega \in \Omega \text{ gilt } \lim_{s\downarrow 0} \widetilde{X}_s(\omega) = 0.$$

Setze $\widetilde{C} := C((0,\infty), I\!R)$, und versehe $\widetilde{C}$ mit der durch die Koordinatenprojektionen $(\alpha_t)_{0<t<\infty}$ erzeugten σ-Algebra $\widetilde{\mathcal{C}}$. Nach dem Eindeutigkeitssatz gibt es auf $(\widetilde{C}, \widetilde{\mathcal{C}})$ höchstens ein Wahrscheinlichkeitsmass mit den $(*)$ entsprechenden Eigenschaften

$$0 < s_1 < \ldots < s_\ell < \infty \;:\; \mathcal{L}((\alpha_{s_1}, \ldots, \alpha_{s_\ell})|P) = \mathcal{N}(0, (s_i \wedge s_j)_{i,j=1,\ldots,\ell})\;.$$

Als Bild $\widetilde{Q}$ des Wienermasses Q^W unter der Abbildung

$$C \ni f = (f(s))_{s\geq 0} \;\to\; (f(s))_{0<s<\infty} \;\in \widetilde{\mathcal{C}}$$

erhält man ein solches, zugleich aber auch als Bild von P unter der Abbildung

$$\Omega \ni \omega \to \widetilde{X}_{\bullet}(\omega) \in \widetilde{\mathcal{C}} \, .$$

Notwendig stimmen dann diese zwei Bildmasse auf $(\widetilde{C}, \widetilde{\mathcal{C}})$ überein, und man erhält

$$P\Big(\Big\{ \lim_{\substack{s \downarrow 0 \\ s \text{ rat.}}} \widetilde{X}_s = 0 \Big\}\Big) = \widetilde{Q}\Big(\underbrace{\Big\{ \lim_{\substack{s \downarrow 0 \\ s \text{ rat.}}} \alpha_s = 0 \Big\}}_{\in \widetilde{\mathcal{C}}}\Big) = Q^W\Big(\Big\{ \lim_{\substack{s \downarrow 0 \\ s \text{ rat.}}} \alpha_s = 0 \Big\}\Big) = 1 \, .$$

Also gibt es eine P-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, so dass der Prozess $(1_{N^c}\widetilde{X}_s)_{s \geq 0}$ stetige Pfade auf ganz $[0, \infty)$ hat und die richtigen endlich-dimensionalen Randverteilungen besitzt, mit $1_{N^c}\widetilde{X}_0 \equiv 0$. Damit ist $(1_{N^c}\widetilde{X}_s)_{s \geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. □

Bemerkung: Analog zu den Argumenten des Beweises von 13.12" weist man nach, dass auch die Räume $\widetilde{C} := C((-\infty, \infty), I\!R^d)$ bzw. $\widetilde{C} := C((0, \infty), I\!R^d)$ versehen mit der von ihren Koordinatenprojektionen erzeugten σ-Algebra $\widetilde{\mathcal{C}}$ polnische Räume sind.
Die Metrik der lokal gleichmässigen Konvergenz definiert man auf $\widetilde{C}$, indem man Kompakta $[-m, m]$ zum Ausschöpfen von $(-\infty, \infty)$ bzw. Kompakta $[2^{-m}, m]$ zum Ausschöpfen von $(0, \infty)$ benutzt, jeweils anstelle der in 13.12" in die Definition der Metrik, den Nachweis von Vollständigkeit und Separabilität, sowie den Nachweis von $\mathcal{B}(\widetilde{C}) = \widetilde{\mathcal{C}}$ eingehenden $[0, m]$, $m \in I\!N$. □

13.22 Satz (LIL in ∞): Für die eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung $X = (X_t)_{t \geq 0}$ gilt P-fast sicher

i)
$$\limsup_{t \to \infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1 \, ,$$

ii)
$$\liminf_{t \to \infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = -1 \, .$$

Beweis: Man betrachtet die Standard-Brownsche Bewegung $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_s)_{s \geq 0}$, die aus X durch Zeitumkehr nach 13.21 entsteht. Satz 13.20 (LIL in 0) liefert obere und untere Einhüllende für den Pfad von $\widetilde{X}$ für $s \downarrow 0$. Schreibt man

$$\frac{\widetilde{X}_s}{\sqrt{2s \log\log(\frac{1}{s})}} = \frac{s X_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2s \log\log(\frac{1}{s})}} = \frac{X_{\frac{1}{s}}}{\sqrt{2\frac{1}{s} \log\log(\frac{1}{s})}}$$

und setzt $t := \frac{1}{s}$, werden daraus Einhüllende für den Pfad von X für $t \to \infty$. □

Mit dem Gesetz vom iterierten Logarithmus in 0 und ∞ hat man reichhaltige Infomation zum Verhalten des Brownschen Pfades in Dimension $d = 1$ sowohl für $t \downarrow 0$ als auch für $t \uparrow \infty$. Offenkundig gilt folgende *Rekurrenzeigenschaft*:

13.23 Bemerkung: Für die eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung gilt:
Ist $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Menge von positivem Lebesgue-Mass, so wird der Brownsche Pfad P-fast sicher auch noch in 'beliebig späten' Zeitintervallen $[N, \infty)$, $N \in \mathbb{N}$ gross, die Menge B besuchen. In der Tat: notwendig enthält B einen Punkt $y \in B$, und das Niveau y wird für $t \to \infty$ gemäss 13.22 beim Wechseln des Brownschen Pfades von der oberen zur unteren Einhüllenden und umgekehrt notwendig unendlich oft durchquert.

Kombiniert man dies mit der starken Markoveigenschaft 13.19', so kann man den Pfad in *iid-Zyklen* zerlegen, die zwischen Zeiten $(T_n)_n$ der Bauart

$$(*) \qquad T_0 \equiv 0 \ , \quad S_n := \inf\{t > T_{n-1} : X_t > 1\} \ , \quad T_n := \inf\{t > S_n : X_t < 0\} \ , \quad n \geq 1$$

entstehen. Wegen der Stetigkeit aller Pfade gilt $X_{T_n} \equiv 0$ für jedes n. Zwischenzeiten wie $(S_n)_n$ braucht man, weil sich nach 13.19' und 13.20 P-fast sicher rechts von jedem T_n aus $(*)$ ein Cluster von Nullstellen des Brownschen Pfades bilden wird ($c := 1$ ist willkürlich festgesetzt, jede andere Schwelle $c \in (0, \infty)$ leistet in $(*)$ dasselbe). Mit 13.19' und 3.19 und Symmetrie der Brownschen Bewegung gilt P-fast sicher

$$0 \equiv T_0 < T_1 < T_2 < \ldots \quad ; \quad \lim_{n \to \infty} T_n = \infty \quad ; \quad T_n < \infty \ \text{ für jedes } \ n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Die iid-Zyklen erhält man nun wegen $X_{T_n} \equiv 0$, wegen der starken Markov-Eigenschaft 13.19' und wegen $T_{n+1} = T_1 \circ \Theta_{T_n}$ (dabei bezeichnet Θ_{T_n} den Shift um T_n) aus dem Prozess nach T_n

$$Y^{(n)} \ := \ (X_{T_n+v})_{v \geq 0} \ = \ (X_{T_n+v} - X_{T_n})_{v \geq 0}$$

eingefroren in 0 zu *seiner* ersten Returnzeit $T_1^{(n)}$ (definiert gemäss $(*)$ mit $Y^{(n)}$ anstelle von X):

$$(**) \qquad (Y^{(n)})^{T_1^{(n)}} \ = \ (Y_v^{(n)} 1_{\{v \leq T_1^{(n)}\}})_{v \geq 0} \ = \ (X 1_{[T_n, T_{n+1}]}) \circ \Theta_{T_n} \ = \ \big(X_{(T_n+v) \wedge T_{n+1}}\big)_{v \geq 0} \ , \quad n \geq 1 \ .$$

Beachte dabei: alle $Y^{(n)}$ sind wieder Standard-Brownsche Bewegungen, und die zwischen T_n und T_{n+1} ablaufenden Zyklen sind iid Repliken von $X_{\cdot \wedge T_1}$. Man hat zwar P-fast sicher endliche Zyklenlänge, aber der Erwartungswert $E(T_{n+1} - T_n)$ ist nach 3.19 nicht-endlich. Dieses Phänomen nennt man *Nullrekurrenz.* $\square$

Kombiniert mit der starken Markoveigenschaft 13.19' liefert der Satz vom iterierten Logarithmus eine durchaus überraschende Beschreibung der Nullstellenmenge des typischen Pfades der eindimensionalen Standard-Brownschen Bewegung.

13.24 Satz: Für P-fast alle $\omega \in \Omega$ ist die Nullstellenmenge des Brownschen Pfades

$$N(\omega) \;:=\; \{\, t \geq 0 : X_t(\omega) = 0 \,\} \quad \in \quad \mathcal{B}([0,\infty))$$

abgeschlossen ohne isolierte Punkte (d.h. eine vollkommene Menge), und hat Lebesgue-Mass 0.

Bemerkung: P-fast sicher besitzt $N(\omega)$ als Lebesgue-Nullmenge keine inneren Punkte. Vollkommene Mengen sind stets überabzählbar (siehe Rudin 1998, S. 47 oder Hewitt-Stromberg 1965 S. 70–72). Ein aus der Analysis bekanntes Beispiel einer vollkommenen Menge vom Lebesgue-Mass 0 ist die Cantormenge.

Beweis: Betrachte eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung $X = (X_t)_{t\geq 0}$, definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Schreibe $X(t,\omega)$ anstelle von $X_t(\omega)$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$.

1) Jeder Pfad $X(\cdot,\omega)$, $\omega \in \Omega$ fest, ist eine stetige Funktion $[0,\infty) \to I\!\!R$. Folglich hat man auf $[0,\infty)\times\Omega$ punktweise Konvergenz für $n \to \infty$ der Abbildungen

$$(+) \qquad\qquad (t,\omega) \quad \to \quad \sum_{k=1}^{n2^n} 1_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n})}(t)\; X(\frac{k}{2^n},\omega)$$

gegen $(t,\omega) \longrightarrow X(t,\omega)$. Jede dieser Abbildungen ist messbar $\mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(I\!\!R)$, also ist

$$(t,\omega) \;\to\; X(t,\omega) \quad \text{messbar von } \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{A} \text{ nach } \mathcal{B}(I\!\!R).$$

Damit gilt

$$I\!\!H \;:=\; \{(t,\omega) : X(t,\omega) = 0\} \;\in\; \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{A}$$

und folglich sind Schnitte durch $I\!\!H$ messbar:

$$N(\omega) = I\!\!H_\omega = \{t \in [0,\infty) : X_t(\omega) = 0\} \;\in\; \mathcal{B}([0,\infty)) \quad , \quad I\!\!H_t = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = 0\} \;\in\; \mathcal{A}\,.$$

Da jeder Pfad $X(\cdot,\omega)$ stetig ist, ist $N(\omega)$ notwendig abgeschlossen. Für das Produktmass $\lambda\!\!\lambda \otimes P$ auf $\mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{A}$ ($\lambda\!\!\lambda$ ist das Lebesgue-Mass eingeschränkt auf $[0,\infty)$) zeigt Fubini

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_0^m dt\, \mathcal{N}(0,t)(\{0\}) \;=\; \int_0^m dt\; P(I\!\!H_t) \\ &=\; (\lambda\!\!\lambda \otimes P)(\, I\!\!H \cap ([0,m] \times \Omega)\,) \\ &=\; \int_\Omega P(d\omega)\, \lambda\!\!\lambda(\, I\!\!H_\omega \cap [0,m]\,) \;=\; \int_\Omega P(d\omega)\, \lambda\!\!\lambda(\, N(\omega) \cap [0,m]\,) \end{aligned}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$. Also ist $N(\omega)$ für P-fast alle $\omega \in \Omega$ eine $\lambda\!\!\lambda$-Nullmenge in $\mathcal{B}([0,\infty))$.

2) Für jedes rationale $q > 0$ definiere

$$\tau_q \ := \ \inf\{t > q : X_t = 0\}$$

(dies ist eine Stopzeit bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$ aus 13.17”, siehe 13.26 und 13.30’ in Teilkapitel *D; nach LIL in ∞ 13.22 gilt $\tau_q < \infty$ P-fast sicher) und zeige:

$$(\diamond) \qquad \begin{cases} \text{es existiert ein Ereignis } \Omega_0 \in \mathcal{A} \text{ mit } P(\Omega_0) = 1 \text{ so dass gilt} \\ \omega \in \Omega_0 \implies 0 \text{ und } \tau_q(\omega),\ q \in \mathbb{Q}^+, \text{ sind Häufungspunkte von } N(\omega). \end{cases}$$

Dies sieht man so: i) Wegen $X_0 = 0$ P-fast sicher gilt $0 \in N(\omega)$ für P-fast alle $\omega \in \Omega$; der Satz vom iterierten Logarithmus 13.20 zeigt: für P-fast alle $\omega \in \Omega$ ist 0 *kein* isolierter Punkt von $N(\omega)$.
ii) Sei $q > 0$ fest. Mit der starken Markoveigenschaft 13.19’ ist der Prozess nach τ_q

$$\left(X_{\tau_q+t}\right)_{t\geq 0} = \left(X_{\tau_q+t} - X_{\tau_q}\right)_{t\geq 0}$$

wieder eine Standard-Brownsche Bewegung, also gilt mit 13.20 auch

$$\tau_q(\omega) \text{ ist kein isolierter Punkt von } N(\omega), \text{ für } P\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

iii) Für rationale $q > 0$ lassen sich alle Ausnahmemengen in i) und ii) zu einer einzigen P-Nullmenge in $\mathcal{A}$ zusammenfassen. Damit ist die Behauptung $(\diamond)$ bewiesen.

3) Sei jetzt $\omega \in \Omega_0$ fest und $t \in N(\omega) \cap (0,\infty)$. Wähle eine rationale Folge $q_n \uparrow t$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: entweder gilt

$$t = \tau_{q_n}(\omega) \quad \text{für } \textit{ein } n \in \mathbb{N} \quad \overset{(\diamond)}{\Longrightarrow} \quad t \text{ ist kein isolierter Punkt von } N(\omega)\ ,$$

oder es gilt

$$(\times) \qquad t \neq \tau_{q_n}(\omega) \quad \text{für } \textit{alle } n \in \mathbb{N}\ .$$

Wegen $t \in N(\omega)$, wegen Definition der Stopzeit τ_{q_n} und wegen $q_n \uparrow t$ muss es im Fall $(\times)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $s_n \in [q_n, t)$ mit $X_{s_n}(\omega) = 0$ geben. Damit erhält man

$$\text{im Fall } (\times) \text{ gibt es eine Folge } (s_n)_n \subset N(\omega) \text{ mit } s_n \uparrow t.$$

Wieder ist t ein Häufungspunkt von $N(\omega)$. Zusammen mit $(\diamond)$ ist nachgewiesen, dass für $\omega \in \Omega_0$ *jeder* Punkt der Menge $N(\omega)$ ein Häufungspunkt von $N(\omega)$ ist. Damit ist $N(\omega)$ vollkommen. $\square$

Exzellente Referenzen zur Brownschen Bewegung, ihren Eigenschaften und vielen mit ihr zusammenhängenden Prozessen sind die Bücher Revuz und Yor (1991) und Schilling und Partsch (2014).

*D. Markoveigenschaften in stetiger Zeit

In einem kurzen Abschnitt ohne Anspruch auf Vollständigkeit diskutieren wir die 'starke Markoveigenschaft' zeitstetiger Prozesse. Einziges Ziel ist es, die in Teilkapitel C) intuitiv präsentierten Argumente mit präzisen Definition zu unterlegen und rigoros zu machen. Wir beginnen mit der Definition von Stopzeiten T und mit dem Begriff der Vergangenheit bis zur Zeit T im zeitstetigen Fall; für diskrete Zeit waren diese in Kapitel 11.B eingeführt worden. Wir schreiben in Analogie zu 11.9

$$\bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t \;:=\; \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$$

für zeitstetig indizierte Filtrationen $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

13.25 Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{F}_t \;=\; \bigcap_{r>t} \mathcal{F}_r \quad \text{für jedes } t \in [0,\infty)$$

heisst *rechtsstetig.*

13.26 Hilfssatz: Betrachte $(\Omega, \mathcal{A})$ versehen mit einer *rechtsstetigen* Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

a) Für jede Abbildung $T : \Omega \to [0,\infty]$ sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig:

i) für jedes $0 \leq t < \infty$ gilt $\{T \leq t\} \;\in\; \mathcal{F}_t$;

ii) für jedes $0 < t < \infty$ gilt $\{T < t\} \;\in\; \mathcal{F}_t$.

b) Für jede Abbildung $T : \Omega \to [0,\infty]$ und jedes Ereignis in $A \in \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$ sind gleichwertig:

i) für jedes $0 \leq t < \infty$ gilt $A \cap \{T \leq t\} \;\in\; \mathcal{F}_t$;

ii) für jedes $0 < t < \infty$ gilt $A \cap \{T < t\} \;\in\; \mathcal{F}_t$.

Beweis: Sei $T : \Omega \to [0,\infty]$ eine Abbildung. Setzt man die Eigenschaft a)i) voraus, so schreibt man für festes $t > 0$ mit geeignetem $m \in \mathbb{N}$

$$\{T < t\} \;=\; \bigcup_{n\geq m} \underbrace{\{T \leq t - \frac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_t} \quad \in \quad \mathcal{F}_t$$

und erhält a)ii). Setzt man a)ii) voraus, so gilt für festes $t \ge 0$

$$\{T \le t\} \;=\; \bigcap_{n \ge m} \{T < t + \frac{1}{n}\} \quad \in \; \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}}$$

bei beliebig grossem $m \in I\!N$, also wegen der vorausgesetzten Rechtsstetigkeit der Filtration $I\!F$

$$\{T \le t\} \;\in\; \bigcap_{m} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}} \;=\; \bigcap_{r>t} \mathcal{F}_r \;=\; \mathcal{F}_t \; .$$

Dies ist a)i). Den Beweis von b) führt man mit analogen Argumenten. □

13.26' Bemerkung: Gilt $\{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$ für jedes $0 \le t < \infty$, so ist das System

$$\{\, A \in \bigvee_{t \ge 0} \mathcal{F}_t \;:\; A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t \;\text{ für alle }\; t \in [0,\infty) \,\}$$

eine σ-Algebra. Der Beweis geht analog zum zeitdiskreten Fall genau wie in Bemerkung 11.10 b).

13.27 Definition: Auf $(\Omega, \mathcal{A})$ versehen mit einer *rechtsstetigen* Filtration $I\!F = (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$:

a) Eine *$I\!F$-Stopzeit* ist eine Abbildung $T : \Omega \to [0,\infty]$ mit den Eigenschaften i) *oder* ii) aus 13.26 a).

b) Für eine $I\!F$-Stopzeit T definiere die *Vergangenheit bis zur Zeit* T als die σ-Algebra aller Ereignisse $A \in \bigvee_{t \ge 0} \mathcal{F}_t$ mit den Eigenschaften i) *oder* ii) aus 13.26 b):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_T \;&:=\; \{\, A \in \bigvee_{t \ge 0} \mathcal{F}_t \;:\; A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t \;\text{ für alle }\; t \in [0,\infty) \,\} \\
&=\; \{\, A \in \bigvee_{t \ge 0} \mathcal{F}_t \;:\; A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \;\text{ für alle }\; t \in (0,\infty) \,\} \; .
\end{aligned}$$

Wir betonen: die in 13.27 gegebene Definition der Vergangenheit bis zur Zeit T beruht wesentlich auf der Rechtsstetigkeit der Filtration $I\!F$: ohne diese würde die zweite Formelzeile in 13.27 b) ein anderes System beschreiben als die erste, und 13.26 a)i) eine andere Klasse von Abbildungen $T : \Omega \to [0,\infty]$ als 13.26 a)ii) (siehe dazu Dellacherie und Meyer, Band I 1975, Kapitel IV, IV.3.49 und IV.3.52). Nur unter der Voraussetzung der Rechtsstetigkeit sind die beiden hier gegebenen Darstellungen äquivalent. Das folgende Beispiel zeigt, wo die Schwierigkeit liegt:

13.28 Beispiel: Sei $X = (X_t)_{t \ge 0}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Wir setzen voraus, dass die Pfade von X sämtlich rechtsstetig oder sämtlich linksstetig sind.

a) Betrachte zwei Filtrationen $I\!F^0 = (\mathcal{F}^0_t)_{t \ge 0}$ und $I\!F = (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ in $\mathcal{A}$, definiert durch

$$\mathcal{F}^0_t \;:=\; \sigma(X_s : 0 \le s \le t) \; , \quad \mathcal{F}_t \;:=\; \bigcap_{r>t} \mathcal{F}^0_r \;=\; \bigcap_{r>t} \sigma(X_s : 0 \le s \le r) \; , \quad t \ge 0 \; .$$

$\mathbb{F}_0$ ist die Geschichte von X gemäss 11.3', und $\mathbb{F}$ ist die kleinste rechtsstetige Filtration, an die der Prozess X adaptiert ist. Man nennt $\mathbb{F}$ die *von X erzeugte rechtsstetige Filtration.*

b) Für jedes $a > 0$ ist die *level crossing Zeit*

$$T_a \;:=\; \inf\{t > 0 : X_t > a\} \quad (\text{mit Konvention } \inf\emptyset = \infty)$$

eine $\mathbb{F}$-Stopzeit, jedoch nicht notwendig eine $\mathbb{F}^0$-Stopzeit. Dies sieht man so. Für jedes $t \geq 0$ gilt

$$(+) \qquad \omega \in \{T_a \leq t\} \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{0 \leq s \leq t + \frac{1}{m}} X_s(\omega) \;>\; a \quad \text{für beliebig grosse } m \in \mathbb{N}$$

(wegen der vorausgesetzten Rechts- bzw. Linksstetigkeit aller Pfade von X ist das 'sup ...' auf der rechten Seite in (+) als Supremum über abzählbar viele rationale s eine wohldefinierte Zufallsvariable). Wegen (+) und Rechtsstetigkeit von $\mathbb{F}$ gehört das Ereignis $\{T_a \leq t\}$ zur σ-Algebra $\bigcap_m \mathcal{F}^0_{t+\frac{1}{m}} = \mathcal{F}_t$, für jedes $t \geq 0$: damit ist T_a eine $\mathbb{F}$-Stopzeit. Ohne den Blick 'infinitesimal über t hinaus' kann jedoch für Prozesse mit stetigen Pfaden i.a. nicht entschieden werden, ob ein $\omega \in \Omega$ mit den Eigenschaften

$$X_s(\omega) < a \;\text{ für }\; 0 \leq s < t\;, \quad X_t(\omega) = a$$

dem Ereignis $\{T_a \leq t\}$ zuzuordnen ist oder nicht. Daher ist T_a i.a. keine $\mathbb{F}^0$-Stopzeit. $\square$

13.29 Satz: Auf $(\Omega, \mathcal{A})$ versehen mit einer *rechtsstetigen* Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ betrachte $\mathbb{F}$-Stopzeiten T, T_1, T_2, ... Dann gilt:

a) Jede $\mathbb{F}$-Stopzeit T ist eine $\mathcal{F}_T$-messbare Abbildung von Ω nach $[0, \infty]$.

b) Aus $T_1 \leq T_2$ folgt $\mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$.

c) $T_1 \wedge T_2$, $T_1 \vee T_2$, $\inf\limits_{m\geq 1} T_m$, $\sup\limits_{m\geq 1} T_m$ sind $\mathbb{F}$-Stopzeiten.

d) Für jede fallende Folge $T_n \downarrow T$ von $\mathbb{F}$-Stopzeiten gilt $\mathcal{F}_T = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$.

Beweis: Die Aussagen a)+b) beweist man analog zu 11.12 a)+b). Wir betrachten $\inf\limits_{m\geq 1} T_m$ und $\sup\limits_{m\geq 1} T_m$ in c). Genau dann ist $\{T_m \leq t\}$ in $\mathcal{F}_t$ enthalten, wenn das Komplement $\{T_m > t\}$ in $\mathcal{F}_t$ enthalten ist. Man hat

$$T := \sup_m T_m \;:\quad \{T > t\} \;=\; \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{T_m > t\}$$

für alle $t \geq 0$, also ist $\sup\limits_m T_m$ eine $\mathbb{F}$-Stopzeit. Auch hat man

$$T := \inf_m T_m \;:\quad \{T < t\} \;=\; \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{T_m < t\}$$

für alle $t > 0$, also ist $\inf_m T_m$ eine $\mathbb{F}$-Stopzeit (die letzte Aussage wäre ohne die Voraussetzung der Rechtstetigkeit von $\mathbb{F}$ nicht mehr richtig). Wir beweisen d). Die Inklusion '$\subset$' folgt sofort aus b). Zum Beweis der umgekehrten Inklusion '$\supset$' betrachte ein Ereignis $A \in \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$. Aus $T_n \downarrow T$ folgt

$$A \cap \{T < t\} \;=\; A \cap \left(\bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \{T_n < t\} \right) \;=\; \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} (A \cap \{T_n < t\}) \quad \in \mathcal{F}_t$$

für jedes $t > 0$. Nach 13.27 gehört A damit zur σ-Algebra $\mathcal{F}_T$ der Vergangenheit bis zur Zeit T (auch dieser Schluss nutzt die Rechtstetigkeit von $\mathbb{F}$ aus). □

Als nächstes definieren wir im zeitstetigen Setting (vgl. 11.13 für diskrete Zeit) den Zustand eines Prozesses X zu einer zufälligen Zeit T.

13.30 Satz: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A})$ eine rechtsstetige Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter (siehe 11.3) reellwertiger stochastischer Prozess mit rechtsstetigen Pfaden. Für jede $\mathbb{F}$-Stopzeit T ist der *Zustand von X zur Zeit T*, definiert durch

$$X_T(\omega) \;:=\; 1_{\{T<\infty\}}(\omega)\, X(\, T(\omega), \omega\,)\,, \quad \omega \in \Omega$$

mit Schreibweise $X(t, \omega)$ für $X_t(\omega)$, eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable $\Omega \to \mathbb{R}$.

Bemerkung: Beachte wieder: die hier gegebene Definition impliziert

$$X_T \;:=\; 0 \quad \text{auf} \quad \{T = \infty\}$$

und bezieht sich explizit auf einen Prozess, dessen Indexmenge den Punkt $+\infty$ nicht enthält.

Beweis: 1) Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ rechtsstetig, sei T eine $\mathbb{F}$-Stopzeit. Definiere zu T eine Folge

$$T_n \;:=\; \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{2^n}\, 1_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\}} \;+\; \infty\, 1_{\{T=\infty\}}\,, \quad n \geq 1\,.$$

Wegen $\{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$ sind die T_n $\mathbb{F}$-Stopzeiten, $n \in \mathbb{N}$, und nach Konstruktion gilt

$$T \;<\; T_n \;\text{ auf }\; \{T < \infty\}\,,\; n \geq 1\,, \quad \{T_n = \infty\} = \{T = \infty\}\,,\; n \geq 1\,, \quad T_n \,\downarrow\, T\,,\; n \to \infty\,.$$

2) Fixiere $n \in \mathbb{N}$. Da T_n eine $\mathbb{F}$-Stopzeit ist, die nur abzählbar viele Werte im Gitter $\frac{1}{2^n}\overline{\mathbb{N}_0}$ annimmt, gelten die folgenden Aussagen i)–iii):

i) T_n ist eine Stopzeit bezüglich der diskreten Filtration $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k \in \mathbb{N}_0}$ im Sinne der Definition 11.9. Offenkundig hat man insbesondere $\{T_n \leq \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

ii) Der Begriff der 'Vergangenheit bis zur Zeit T_n' bleibt derselbe, ob er nun 'diskret' bezüglich $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ nach Definition 11.9 b) oder 'zeitstetig' bezüglich $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ im Sinne von 13.27 verstanden wird. Nach Definition in 13.27 b) ist die Vergangenheit bis zur Zeit T_n bezüglich der zeitstetigen Filtration $\mathbb{F}$ die σ-Algebra

$$\mathcal{F}_{T_n} \quad = \quad \{ \, A \in \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t \ : \ A \cap \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \text{ für jedes } t \geq 0 \, \} \ ;$$

diese stimmt aber überein mit

$$\{ \, A \in \bigvee_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \ : \ A \cap \{T_n \leq \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \ \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}_0 \, \} \ ,$$

d.h. mit der σ-Algebra, die in 11.9 als Vergangenheit bis zur Zeit T_n bezüglich der zeitdiskreten Filtration $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eingeführt worden war.

iii) Für den Zustand des Prozesses X zur Zeit T_n stimmt die in der Formulierung des zu beweisenden Satzes gegebene Definition überein mit der 'zeitdiskreten' Definition aus 11.13. Nach Voraussetzung ist X adaptiert an $\mathbb{F}$, damit ist insbesondere der Prozess in diskreter Zeit $(X_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert an $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N}_0}$. Die Stopzeit T_n nimmt alle ihre Werte im Gitter $\frac{1}{2^n}\overline{\mathbb{N}_0}$ an. Satz 11.13 definiert den Zustand von $(X_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ zur Zeit T_n als $\mathcal{F}_{T_n}$-messbare Zufallsvariable

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \, 1_{\{T_n=\frac{k}{2^n}\}}(\omega) \ , \quad \omega \in \Omega$$

die auf $\{T_n = \infty\}$ den Wert 0 annimmt. Dies kann geschrieben werden als

$$1_{\{T_n<\infty\}}(\omega) \, X(\, T_n(\omega), \omega \,) \quad = \quad X_{T_n}(\omega) \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{N}_0} X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \, 1_{\{T_n=\frac{k}{2^n}\}}(\omega) \ , \quad \omega \in \Omega \ .$$

wie in der Formulierung des zu beweisenden Satzes. Dabei gilt $\{T_n = \infty\} = \{T = \infty\}$ für jedes n.

3) Da die Folge $(T_n)_n$ gegen T absteigt und da alle Pfade von X rechtstetig sind, hat man

$$X_T \ = \ \lim_{n\to\infty} X_{T_n} \quad \text{ist messbar bezüglich} \quad \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n} \ .$$

Wegen der Rechtsstetigkeit von $\mathbb{F}$ gilt aber $\bigcap_n \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_T$ nach 13.29 d). Also ist X_T eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable. $\square$

13.30' Übungsaufgabe: Sei X eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{C}, P)$, sei $\mathbb{F}$ die rechtsstetige Geschichte von X wie in 13.17", sei A offen in $\mathbb{R}$.

a) $T_A := \inf\{t > 0 : X_t \in A\}$ (mit Konvention $\inf\{\emptyset\}) = +\infty$) ist eine P-fast sicher endliche $\mathbb{F}$-Stopzeit.

Hinweis: weil A offen ist und weil alle Pfade von X stetig sind, gilt $\{T_a < t\} = \bigcup_{r<t\,,\, r\in\mathbb{Q}^+} \{X_r \in A\}$.

b) Ist S eine $I\!\!F$-Stopzeit, so auch $\widetilde{T}_A := \inf\{t > S : X_t \in A\}$; aus $P(S < \infty) = 1$ folgt $P(\widetilde{T}_A < \infty) = 1$.

Hinweis: Man betrachte zuerst Stopzeiten $S_n := \sum_{j \in I\!\!N} \frac{j}{2^n} 1_{\{\frac{j-1}{2^n} \le S < \frac{j}{2^n}\}}$ mit abzählbar vielen Werten, die gegen S absteigen, und zeige dass $T_n = \inf\{t > S_n : X_t \in A\}$ eine $I\!\!F$-Stopzeit ist.

c) Für festes $\delta > 0$ ist $\widetilde{T} := \inf\{t > \delta : X_t = 0\}$ eine $I\!\!F$-Stopzeit mit $P(\widetilde{T} < \infty) = 1$.

Hinweis: Man arbeite mit einer Folge von $I\!\!F$-Stopzeiten des Typs a), die gegen $\widetilde{T}$ aufsteigen. □

13.31 Hilfssatz: Sei $X = (X_t)_{t \ge 0}$ eine d-dimensionale Standard-Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sei $I\!\!F^0$ die Geschichte von X nach 11.3', sei $I\!\!F$ die von X erzeugte rechtsstetige Filtration

$$I\!\!F := (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0} \quad , \quad \mathcal{F}_t := \bigcap_{r > t} \mathcal{F}_r^0 \quad , \quad \mathcal{F}_r^0 = \sigma(X_s : 0 \le s \le r) .$$

Die Markovhalbgruppe $(K_r)_{r \ge 0}$ bezüglich $I\!\!F^0$ war in 12.9" und (12.11) berechnet worden:

$$\begin{cases} E\left(1_A(X_t) \mid \mathcal{F}_s^0\right) = K_{t-s}(X_s, A) \quad , \quad 0 \le s < t < \infty \, , \; A \in \mathcal{B}(I\!\!R^d) \\ K_r(y, A) = \mathcal{N}(y, rI_d)(A) \quad , \quad y \in I\!\!R^d \, , \; A \in \mathcal{B}(I\!\!R^d) \, , \; r \ge 0 \end{cases}$$

Dann ist X auch Markov bezüglich $I\!\!F$, und die Markov-Halbgruppe bleibt dieselbe:

$$E(\, 1_A(X_t) \mid \mathcal{F}_s \,) = K_{t-s}(X_s, A) \quad \text{mit} \quad (K_r)_{r \ge 0} \quad \text{wie oben} .$$

Beweis: 1) Für beschränkte messbare Funktionen $f : I\!\!R^d \to I\!\!R$ schreiben wir kurz

$$(K_r f)(y) := \int f(x) \, K_r(y, dx) .$$

Bezeichne $\mathcal{C}_b$ die Klasse der stetigen beschränkten Funktionen auf $I\!\!R^d$ wie in Kapitel VI. Für $f \in \mathcal{C}_b$ und für konvergente Folgen $r_n \downarrow r$ in $[0, \infty)$ sowie $y_n \to y$ in $I\!\!R^d$ gilt

$$(\diamond) \qquad (K_{r_n} f)(y_n) = \int f(x) \, \mathcal{N}(y_n, r_n I_d)(dx) \longrightarrow \int f(x) \, \mathcal{N}(y, rI_d)(dx) = (K_r f)(y) \; :$$

dies erhält man explizit aus der Gestalt der Normaldichten, die als 'Glättungskerne' mit Zentrum $y_n \to y$ und Breite proportional zu $\sqrt{r_n} \downarrow \sqrt{r}$ über die Funktion $f \in \mathcal{C}_b$ gezogen werden. Im Fall $r = 0$ gilt die Konvention $K_0(y, \cdot) = \epsilon_y$.

2) Betrachte zuerst die Geschichte von X wie in 11.3' definiert:

$$I\!\!F^0 := (\mathcal{F}_t^0)_{t \ge 0} \, , \quad \mathcal{F}_t^0 := \sigma(X_s : 0 \le s \le t) .$$

Die Markoveigenschaft bezüglich $I\!\!F^0$ war als direkte Folgerung aus der Unabhängigkeit der Zuwächse von X in (12.11) in der Form

$$E(\, 1_F \, 1_A(X_t) \,) = E(\, 1_F \, E(1_A(X_t) | \mathcal{F}_s^0) \,) = E(\, 1_F \, K_{t-s}(X_s, A) \,) \quad \text{für} \;\; s < t \, , \; F \in \mathcal{F}_s^0 \, , \; A \in \mathcal{B}(I\!\!R^d)$$

bewiesen worden; per Aufbau messbarer Funktionen schreibt man dies um in

$$(+) \qquad E(\, 1_F\, f(X_t)\,) \;=\; E(\, 1_F\, (K_{t-s}f)(X_s)\,) \quad \text{für } \; s<t \;,\; F \in \mathcal{F}^0_s \;,\; f \in \mathcal{C}_b \;.$$

3) Wir zeigen: aus der Markoveigenschaft bezüglich $I\!F_0$ kombiniert mit ($\diamond$) und der Rechtsstetigkeit der Pfade von X erhält man die Markov-Eigenschaft von X bezüglich der rechtsstetigen Filtration $I\!F$. Sei $s<t$ und $F \in \mathcal{F}_s$. Für jede streng monoton fallende Folge $s_n \downarrow s$ gilt dann $F \in \mathcal{F}^0_{s_n}$ für alle n, folglich wegen (+) aus Schritt 2)

$$E(\, 1_F\, f(X_t)\,) \;=\; E(\, 1_F\, E(f(X_t)|\mathcal{F}^0_{s_n})\,) \;=\; E(\, 1_F\, \cdot (K_{t-s_n}f)(X_{s_n})\,) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}_b$$

für alle hinreichend grossen n. Wegen ($\diamond$) und wegen Rechtsstetigkeit der Pfade $X_{\bullet}(\omega)$ konvergieren die Integranden auf der rechten Seite für $s_n \downarrow s$ punktweise für jedes feste $\omega \in \Omega$. Beschränktheit der Funktionen $f \in \mathcal{C}_b$ impliziert dominierte Konvergenz und damit

$$E(\, 1_F\, (K_{t-s_n}f)(X_{s_n})\,) \quad \longrightarrow \quad E(\, 1_F\, (K_{t-s}f)(X_s)\,)$$

für $n \to \infty$. Beides zusammen bedeutet

$$(++) \qquad E(\, 1_F\, f(X_t)\,) \;=\; E(\, 1_F\, (K_{t-s}f)(X_s)\,) \quad \text{für } s<t,\, F \in \mathcal{F}_s,\, f \in \mathcal{C}_b \;.$$

oder

$$E(\, 1_F\, 1_A(X_t)\,) \;=\; E(\, 1_F\, K_{t-s}(X_s, A)\,) \quad \text{für } s<t,\, F \in \mathcal{F}_s,\, A \in \mathcal{B}(I\!R^d)$$

(monotone Konvergenz wie im Beweis von 6.1 b) zeigt, dass die Funktionen $f \in \mathcal{C}_b$ in (++) ersetzt werden dürfen durch Indikatorfunktionen 1_B für abgeschlossene Mengen $B \subset I\!R^d$; ein Dynkinschluss verallgemeinert dies von der Klasse aller abgeschlossenen Mengen auf die Klasse aller messbaren Mengen $A \in \mathcal{B}(I\!R^d)$).
Damit liefert (++) die Markoveigenschaft von X bezüglich der rechtsstetigen Filtration $I\!F$. □

Die bisher betrachtete Markoveigenschaft besagte: gegeben eine Filtration $I\!F$ und damit ein Begriff von 'Informationsstand $\mathcal{F}_t$ zur Zeit t', hängt die weitere Entwicklung des Prozesses gegeben $\mathcal{F}_t$ nur vom gegenwärtigen Zustand des Prozesses zur Zeit t ab. Falls man eine Aussage dieses Typs für die Klasse der $I\!F$-Stopzeiten T anstelle der deterministischen Zeiten t beweisen kann, so spricht man von einer starken Markoveigenschaft bezüglich $I\!F$. Mit den eben benutzten Argumenten kommt man zu einem sehr allgemeinen Resultat.

13.32 Hauptsatz (starke Markoveigenschaft): Auf beliebigem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ Markov bezüglich einer Filtration $I\!F^0 = (\mathcal{F}_t^0)_{t\geq 0}$, mit Werten in einem polnischen Raum $(E, \mathcal{E})$, und mit rechtsstetigen Pfaden. Die Halbgruppe $(K_t)_{t\geq 0}$ von X bezüglich $I\!F^0$ besitze die Eigenschaft

$$\text{(13.33)} \qquad \text{für jedes } f \in \mathcal{C}_b(E) \text{ ist } \quad (t,y) \longrightarrow (K_t f)(y) \quad \text{stetig auf } [0,\infty) \times E \ .$$

Betrachte nun die von X erzeugte rechtsstetige Filtration $I\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann ist X Markov bezüglich $I\!F$ mit derselben Halbgruppe

$$E(\, 1_A(X_t) \mid \mathcal{F}_s \,) \;=\; K_{t-s}(X_s, A) \quad \text{für alle } s < t,\ A \in \mathcal{E} \ ,$$

und besitzt sogar die *starke Markoveigenschaft bezüglich* $I\!F$:

$$\text{(13.34)} \qquad \begin{cases} \text{für alle } I\!F\text{-Stopzeiten } T \text{ mit } P(T<\infty) = 1 \ : \\ E(\, 1_A(X_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T \,) \;=\; K_t(X_T, A) \quad \text{für } t \geq 0,\ A \in \mathcal{E} \ . \end{cases}$$

13.34' Bemerkung: Analog zu 13.30 überlegt man sich im Falle eines polnischen Raumes $(E, \mathcal{E})$ und einer rechtsstetigen Filtration $I\!F$:
i) für einen $I\!F$-adaptierten Prozess X mit Werten in $(E, \mathcal{E})$, dessen Pfade rechtsstetige Funktionen $[0,\infty) \to E$ sind, kann der Zustand von X zu einer P-fast sicher endlichen $I\!F$-Stopzeit T durch

$$X_T(\omega) \;:=\; 1_{\{T(\omega)<\infty\}}\, X(\, T(\omega), \omega\,) \;+\; x_0\, 1_{\{T(\omega)=\infty\}}$$

mit beliebigem $x_0 \in E$ (als default value auf der P-Nullmenge $\{T = \infty\} \in \mathcal{F}_T$) definiert werden;
ii) $X_T : \Omega \to E$ wie in i) festgelegt ist eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable.

Beweis von Satz 13.32: 1) Die Markoveigenschaft von X bezüglich $I\!F$ mit derselben Halbgruppe folgt mit einer nahezu wörtlichen Übertragung der Argumente des Beweises von 13.31. Hier wird die Voraussetzung (13.33) ausgenutzt.

2) Wir zeigen, dass bezüglich der rechtsstetigen Filtration $I\!F$ schon die Stetigkeitsbedingung

$$(*) \qquad \text{für jedes } f \in \mathcal{C}_b(E) \text{ und jedes } t \geq 0 \text{ ist } \quad y \longrightarrow (K_t f)(y) \quad \text{stetig auf } E$$

die starke Markoveigenschaft garantiert; $(*)$ ist insbesondere durch (13.33) sichergestellt.

Sei T eine $I\!F$-Stopzeit mit $P(T<\infty) = 1$, sei $F \in \mathcal{F}_T$, sei $f \in \mathcal{C}_b(E)$. Mit F ist auch $\widetilde{F} := F \cap \{T < \infty\}$ in $\mathcal{F}_T$, nach 13.29 a). Nach Voraussetzung über T ist $F \setminus \widetilde{F}$ eine P-Nullmenge.

Betrachte die fallende Folge von $\mathbb{F}$-Stopzeiten $T_n \downarrow T$ aus dem Beweis von 13.30:

$$T_n := \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{2^n}\, 1_{\{\frac{k-1}{2^n}\le T<\frac{k}{2^n}\}} + \infty\, 1_{\{T=\infty\}}\ , \quad n\ge 1\ .$$

Für deterministisches $t>0$ sind mit T, T_n auch $T+t, T_n+t$ $\mathbb{F}$-Stopzeiten (nach Definition in 13.27), und die Rechtsstetigkeit aller Pfade $X_{\cdot}(\omega)$ impliziert wegen dominierter Konvergenz

$$(+)\qquad E(\,1_F\, f(X_{T+t})\,) \;=\; E(\,1_{\widetilde{F}}\, f(X_{T+t})\,) \;=\; \lim_{n\to\infty} E(\,1_{\widetilde{F}}\, f(X_{T_n+t})\,)\ .$$

Für jedes feste n gilt aber nach Definition von $\widetilde{F}$ und T_n

$$(\times)\qquad E(\,1_{\widetilde{F}}\, f(X_{T_n+t})\,) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} E(\,1_{\widetilde{F}\cap\{T_n=\frac{k}{2^n}\}}\, f(X_{T_n+t})\,) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} E(\,1_{\widetilde{F}\cap\{T_n=\frac{k}{2^n}\}}\, f(X_{\frac{k}{2^n}+t})\,)\ .$$

Wegen $\widetilde{F}\in\mathcal{F}_{T_n}$ gilt $\widetilde{F}\cap\{T_n=\frac{k}{2^n}\}\in\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$. Mit der Markoveigenschaft bezüglich $\mathbb{F}$ kann die rechte Seite der Formelzeile $(\times)$ als

$$(\times\times)\qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} E(\,1_{\widetilde{F}\cap\{T_n=\frac{k}{2^n}\}}\,(K_t f)(X_{\frac{k}{2^n}})\,) \;=\; E(\,1_{\widetilde{F}}\,(K_t f)(X_{T_n})\,)$$

geschrieben werden. Für $n\to\infty$ lassen Rechtsstetigkeit aller Pfade von X, die Stetigkeitsbedingung $(*)$ und dominierte Konvergenz die rechte Seite von $(\times\times)$ gegen

$$(++)\qquad E(\,1_{\widetilde{F}}\,(K_t f)(X_T)\,) \;=\; E(\,1_F\,(K_t f)(X_T)\,)$$

streben. Damit ist die Übereinstimmung von $(+)$ und $(++)$ für jedes feste $f\in\mathcal{C}_b(E)$ bewiesen, was man wie im Beweis von 13.31 in die Form

$$E(\,1_F\, 1_A(X_{T+t})\,) \;=\; E(\,1_F\, K_t(X_T, A)\,)\ ,\quad A\in\mathcal{E}\ ,\ t\ge 0\ ,\ F\in\mathcal{F}_T$$

zurückschreibt. Das ist die starke Markoveigenschaft bezüglich $\mathbb{F}$. $\square$

Beachte, dass $\mathbb{F}^0$ im letzten Satz irgendeine Filtration sein kann, bezüglich der X Markov ist (nicht notwendig speziell die Geschichte von X wie in 11.3'). Beachte auch, dass polnische Räume die natürlichen Zustandsräume für Markovprozesse sind: zum einen können bedingte Wahrscheinlichkeiten auf polnischen Räumen stets regulär festgelegt werden (Korollar 10.28), zum anderen existiert zu jeder Markov-Halbgruppe auf einem polnischen Raum ein Markov-Prozess (Satz 12.9"). Auch liefert Beweisteil 2) des Beweises von 13.32 folgende allgemeinere Aussage: hat X rechtsstetige Pfade, ist X Markov bezüglich einer rechtsstetigen Filtration $\mathbb{G}=(\mathcal{G}_t)_{t\ge 0}$ und erfüllt die Markovhalbgruppe bezüglich $\mathbb{G}$ die Stetigkeitsbedingung $(*)$, so ist X stark Markov bezüglich $\mathbb{G}$.

13.34” Folgerung: Unter allen Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 13.32 gilt:

a) Aus der starken Markoveigenschaft (12.34) bezüglich $\mathbb{F}$ folgt, dass der *Prozess nach* T

$$X_{T+\cdot} := (X_{T+t})_{t\geq 0}$$

Markov bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_{T+t})_{t\geq 0}$ ist, mit derselben Halbgruppe $(K_t(\cdot,\cdot))_{t\geq 0}$ wie zuvor. Dabei ist $(\mathcal{F}_{T+t})_{t\geq 0}$ in Anwendung von 13.29 d) wieder eine rechtsstetige Filtration. $\mathcal{L}(X_T)$ übernimmt die Rolle einer Startverteilung für den Prozess nach T; die Pfadeigenschaften von $X_{T+\cdot}$ sind die von X.

b) In Analogie zu (12.13) kann wegen a) die starke Markoveigenschaft in kompakter Form als

$$E(\, G \circ (X_{T+\cdot}) \mid \mathcal{F}_T \,) \;=\; E_{(X_T)}(\, G \circ X \,) \tag{13.34'''}$$

geschrieben werden, für beliebige beschränkte $\mathcal{E}^{[0,\infty)}$-messbare Funktionen $G : E^{[0,\infty)} \to \mathbb{R}$, und für jede P-fast sicher endliche $\mathbb{F}$-Stopzeit T. Die rechte Seite von (13.34”) ist wie in 12.12 c) als Funktion $y \longrightarrow E_y(G \circ X)$ zu lesen, in die der zuletzt erreichte Zustand X_T als Startwert für den Prozess nach T eingesetzt wird. □

13.35 Folgerung: Unter allen Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 13.32:

a) Ist a ein fester Punkt in E und ist T eine $\mathbb{F}$-Stopzeit mit der Eigenschaft

$$P(\, T < \infty \,,\, X_T = a \,) \;=\; 1 \,,$$

so ist der Prozess nach T unabhängig von der Vergangenheit $\mathcal{F}_T$ bis zur Zeit T: mit 13.34’ gilt

$$\begin{aligned} E\,(\, 1_F\; G \circ (X_{T+\cdot})\,) \;&=\; E\,(\, 1_F\; E(G \circ (X_{T+\cdot})) \mid \mathcal{F}_T)\,) \\ &=\; E\,(\, 1_F\; E_a(G \circ X)\,) \;=\; P(F) \cdot E_a(G \circ X) \\ &=\; P(F) \cdot E\,(\, G \circ (X_{T+\cdot})\,) \end{aligned}$$

für alle $F \in \mathcal{F}_T$ und für alle beschränkten $\mathcal{E}^{[0,\infty)}$-messbaren Funktionen $G : E^{[0,\infty)} \to \mathbb{R}$.

b) Ist in 13.32 mit $E = \mathbb{R}^d$ insbesondere X ein Prozess mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen nach 12.14’ (damit $X_0 = 0$ P-fast sicher), dessen Pfade sämtlich rechtsstetig sind, so ist für *jede P-fast sicher endliche* $\mathbb{F}$-Stopzeit T der Prozess

$$Y \;:=\; X_{T+\cdot} - X_T \;=\; (X_{T+t} - X_T)_{t\geq 0}$$

unabhängig von der Vergangenheit $\mathcal{F}_T$ bis zur Zeit T, mit Start in 0, und ist eine unabhängige Replik des ursprünglichen Prozesses X. Y heisst Prozess der *Zuwächse nach der Zeit T*.

Dies sieht man so: mit $F \in \mathcal{F}_T$, mit den Stopzeiten T_n aus dem letzten Beweis und $\widetilde{F} = F \cap \{T < \infty\}$, mit $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell < \infty$ beliebig und $f \in \mathcal{C}_b(E^\ell)$,

$$\begin{aligned}
& E\left(1_F \, f(\, X_{T+t_1} - X_T \, , \, \ldots \, , \, X_{T+t_\ell} - X_{T+t_{\ell-1}} \,) \right) \\
= \quad & \lim_{n\to\infty} E\left(1_{\widetilde{F}} \, f(\, X_{T_n+t_1} - X_{T_n} \, , \, \ldots \, , \, X_{T_n+t_\ell} - X_{T_n+t_{\ell-1}} \,) \right) \\
= \quad & \lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} 1_{\widetilde{F}\cap\{T_n = \frac{k}{2^n}\}} E\left(f(\, X_{\frac{k}{2^n}+t_1} - X_{\frac{k}{2^n}} \, , \, \ldots \, , \, X_{\frac{k}{2^n}+t_\ell} - X_{\frac{k}{2^n}+t_{\ell-1}} \,) \mid \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit und zeitlichen Homogenität der Zuwächse von X besitzt die innere bedingte Erwartung aber unabhängig von k und n dieselbe deterministische Festlegung

$$E\left(f(\, X_{t_1} - X_0 \, , \, \ldots \, , \, X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}} \,) \right)$$

die aus dem Integral herausgezogen werden kann: wie in a) ergibt sich also

$$E\left(1_F \, f(\, X_{T+t_1} - X_T \, , \, \ldots \, , \, X_{T+t_\ell} - X_{T+t_{\ell-1}} \,) \right) \; = \; P(F) \cdot E\left(f(\, X_{t_1} - X_0 \, , \, \ldots \, , \, X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}} \,) \right)$$

für alle $F \in \mathcal{F}_T$, woraus die Behauptung folgt. □

Insbesondere sind mit 13.35 die in Teilkapitel 13 C (z.B. in 13.19', im Beweis von 13.19", im Beweis von 13.24) in intuitiver Weise benutzten Eigenschaften der Brownschen Bewegung bewiesen:

13.36 Folgerung: Ist $X = (X_t)_{t\ge0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung und ist

$$T_a \; = \; \inf\{t > 0 : X_t > a\} \quad \text{(mit Konvention } \inf\emptyset = \infty)$$

die level crossing Zeit für das Niveau $a > 0$, so ist der Prozess der Zuwächse nach T_a

$$X_{T_a+\bullet} - X_{T_a} \; = \; (X_{T_a+t} - a)_{t\ge0}$$

eine von $\mathcal{F}_{T_a}$ unabhängige Standard-Brownsche Bewegung. □

Wir beenden das Kapitel mit einer Betrachtung des Poissonprozesses und seiner Markoveigenschaften.

13.37 Satz: Betrachte einen reellwertigen stochastischen Prozess $(X_t)_{t\ge0}$, definiert auf irgendeinem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dessen Pfade càdlàg und stückweise konstant sind. Dann ist die Geschichte von X nach 11.3'

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge0} \quad , \quad \mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \le s \le t) \; , \; t \ge 0$$

bereits eine rechtsstetige Filtration.

Beweis: 1) Schreibe $I\!\!F$ für die Geschichte von X; zu zeigen ist die Rechtsstetigkeit dieser Filtration. Definiere $I\!\!F^+ := (\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$ durch $\mathcal{F}_t^+ := \bigcap_{r>t} \mathcal{F}_r$. Zum Nachweis von $I\!\!F^+ = I\!\!F$ benutzen wir das 'countable dependency theorem' (vgl. Brémaud 1981, S. 265 und S. 304): für jedes $t \geq 0$, jedes $A \in \mathcal{F}_t^+$ und jede Folge $r_n \downarrow t$ gibt es wegen $A \in \mathcal{F}_{r_n} = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq r_n)$ eine höchstens abzählbare Teilmenge $J_n \subset [0, r_n]$ so dass A bereits in $\sigma(X_t : t \in J_n)$ enthalten ist.
Fixiere ab jetzt $A \in \mathcal{F}_t^+$, $(r_n)_n$ und $(J_n)_n$.
2) Ein durchschnittsstabiler Erzeuger für $\mathcal{G}_n := \sigma(X_t : t \in J_n)$ ist

$$\mathcal{C}_n := \left\{ \bigcap_{t\in J_n} \{X_t \in D_t\} \, , \; D_t \in \mathcal{B}(I\!\!R) \, , \; D_t \neq I\!\!R \text{ für höchstens endlich viele } t \in J_n \right\} .$$

Mit Notation

$$B_n := \left\{ X_t = X_{t'} \text{ für alle } t' \in [t, r_n] \right\}$$

gilt –da alle Pfade von X rechtsstetig und stückweise konstant sind– sicher

$$(\times) \qquad \Omega = \bigcup_m \bigcap_{n\geq m} B_n = \liminf_n B_n \, .$$

3) Schreibe nun $\widetilde{J}_n := (J_n \cap [0, t)) \cup \{t\}$ und betrachte A und B_n wie oben. Es gilt $A \in \mathcal{G}_n$ für alle n. Zu A und jedem n kann man aber ein $\widetilde{A}_n \in \sigma(X_t : t \in \widetilde{J}_n)$ finden so dass

$$(+) \qquad A \cap B_n = \widetilde{A}_n \cap B_n$$

gilt: dies verifiziert man zuerst direkt aus der Definition von B_n für alle Elemente des Erzeugers $\mathcal{C}_n$ von $\mathcal{G}_n$, und macht dann einen Dynkinschluss.

4) Aus (+) und ($\times$) ergibt sich für A und $(B_n)_n$ wie oben eine Darstellung

$$(*) \qquad A = A \cap \Omega = \bigcup_m \bigcap_{n\geq m} (A \cap B_n) = \bigcup_m \bigcap_{n\geq m} (\widetilde{A}_n \cap B_n) \, ,$$

von A, aus der man einerseits erhält

$$\begin{aligned} \liminf_n \widetilde{A}_n &= (\liminf_n \widetilde{A}_n) \cap \Omega = (\liminf_n \widetilde{A}_n) \cap (\liminf_n B_n) \\ &\subset \bigcup_m \bigcup_{\ell(m)\geq m} \bigcap_{n\geq \ell(m)} (\widetilde{A}_n \cap B_n) \subset \bigcup_\ell \bigcap_{n\geq\ell} (\widetilde{A}_n \cap B_n) \overset{(*)}{=} A \, , \end{aligned}$$

andererseits aber auch

$$A \overset{(*)}{\subset} \bigcup_m \bigcap_{n\geq m} \widetilde{A}_n = \liminf_n \widetilde{A}_n \, .$$

Es ergibt sich

$$A \quad = \quad \bigcup_{m} \bigcap_{n \geq m} \widetilde{A}_n \quad \in \quad \mathcal{F}_t$$

da für jedes n das Ereignis $\widetilde{A}_n$ in $\sigma(X_t : t \in \widetilde{J}_n)$ und damit in $\mathcal{F}_t$ enthalten ist.

5) Schritte 2)–4) zusammen weisen nach, dass $A \in \mathcal{F}_t^+$ schon in $\mathcal{F}_t$ enthalten ist: damit gilt $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$ für jedes $t \geq 0$, also ist die Filtration $I\!F$ rechtsstetig. $\square$

13.38 Satz: Der Poissonprozess ist stark Markov bezüglich seiner eigenen Geschichte 11.3'.

Beweis: Die Poisson-Halbgruppe $K_t(k, A) = \mathcal{P}(t\lambda)(A - k)$ (12.14" und 12.19) erfüllt die Bedingung (13.33); die Pfade des Poissonprozesses sind rechtstetig und stückweise konstant (13.14 und 13.15); seine Geschichte ist bereits rechtsstetig (13.37). Also liefert 13.32 die starke Markoveigenschaft. $\square$

13.39 Satz: Sei X ein Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$, sei $I\!F$ seine eigene Geschichte 3.3'. Betrachte Treffzeiten $T_n := \inf\{t : N_t = n\}$, $n \in I\!N$. Dann gilt:

a) T_n ist eine $I\!F$-Stopzeit, und $(X_{T_n+t} - n)_{t \geq 0}$ ist ein von $\mathcal{F}_{T_n}$ unabhängiger Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$.

b) Die Wartezeiten zwischen sukzessiven Sprüngen von X sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ.

c) Für P-fast alle Pfade von X gilt: $\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} X_t \; = \; \lambda$.

Beweis: 1) Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$, $t \geq 0$. Nach 13.37 ist $I\!F$ rechtsstetig. Wegen der in 13.14 definierten Pfadeigenschaften von X gilt

$$(+) \qquad \{T_n \leq t\} \; = \; \{X_t \geq n\} \; \in \; \mathcal{F}_t \, ,$$

also sind die T_n $I\!F$-Stopzeiten. Schreibt man in (+) bei festem n für $t \to \infty$

$$P(T_n \leq t) = P(X_t \geq n) = \mathcal{P}(\lambda t)([n, \infty)) \, ,$$

so liefern elementare Eigenschaften von Poissonverteilungen sofort die Aussage $P(T_n < \infty) = 1$.

2) Betrachte $n = 1$: es gilt

$$P(T_1 > t) \; = \; P(X_t = 0) \; = \; e^{-\lambda \cdot t} \quad , \quad \text{für alle } t > 0 \, ,$$

folglich ist die Wartezeit T_1 auf den ersten Sprung in X exponentialverteilt mit Parameter λ.

3) Für $n \geq 1$ ist nach der starken Markoveigenschaft $\widetilde{X} := (X_{T_n+t} - X_{T_n})_{t \geq 0}$ ein von der Vergangenheit

$\mathcal{F}_{T_n}$ bis zur Zeit T_n unabhängiger Poissonprozess mit Parameter $\lambda > 0$. Insbesondere ist die Wartezeit auf den ersten Sprung in $\widetilde{X}$ unabhängig von der Vergangenheit bis T_n und exponentialverteilt mit Parameter λ, nach 2). Zusammen bilden also die Zwischen-Sprung-Zeiten

$$T_1\,,\, T_2 - T_1\,, \ldots,\, T_{n+1} - T_n\,, \ldots$$

ein Folge von iid exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter λ.

4) Wegen der P-fast sicheren Endlichkeit aller Zwischen-Sprung-Zeiten wachsen die Pfade von X für $t \to \infty$ P-fast sicher gegen ∞. Schritt 3) und das starke Gesetz der grossen Zahlen zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} T_n \;=\; E(T_1) \;=\; \frac{1}{\lambda} \quad P\text{-fast sicher}\,.$$

Die Pfade von X sind nichtfallend, und es gilt $X_t(\omega) = n$ für $T_n(\omega) \le t < T_{n+1}(\omega)$. Also übersetzt man die letzte Aussage sofort in

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} X_t(\omega) \;&\le\; \lim_{n\to\infty} \frac{n}{T_n(\omega)} \;=\; \lambda \quad \text{für } P\text{-fast alle } \omega \in \Omega \\
\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} X_t(\omega) \;&\ge\; \lim_{n\to\infty} \frac{n}{T_{n+1}(\omega)} \;=\; \lambda \quad \text{für } P\text{-fast alle } \omega \in \Omega
\end{aligned}$$

Also haben P fast alle Pfade die Eigenschaft $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} X_t(\omega) \;=\; \lambda$. Dies schliesst den Beweis ab. □

Mit Hilfe der starken Markoveigenschaft erhalten wir also die einfachstmögliche Beschreibung des Poissonprozesses mit Parameter $\lambda > 0$: nach Start in 0 zur Zeit 0 folgt man einer exponentiellen Uhr, die jeweils nach Ablauf einer unabhängigen exponentiellen Wartezeit mit Parameter λ schlägt: zu jedem Schlag der Uhr macht der Pfad einen Sprung der Höhe 1.