Reinhard Höpfner – WS 19/20 – Übungsaufgaben zur Stochastik II

October 29, 2019

Übungsaufgabe 3 : Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ reellwertige Zufallsvariable

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \quad , \quad Y := e^X .$$

Man benutze ohne Beweis, dass die Laplace-Transformierte von $\mathcal{N}(0,1) = \mathcal{L}(X|P)$ durch

$$(*) \qquad E_P\left(e^{-zX}\right) = e^{+\frac{1}{2}z^2} \; , \; z \in \mathbb{C}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ definiert werden kann (vgl. 4.22, 4.23, und Barra (1971) Kapitel VII.2 und X.1).

a) Zeige: $Q := \mathcal{L}(Y|P)$ besitzt die Lebesgue-Dichte

$$\mathbb{R} \ni y \longrightarrow 1_{(0,\infty)}(y) \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \frac{1}{y} \, e^{-\frac{1}{2}(\log y)^2} \in [0,\infty) .$$

b) Betrachte $z = -n \pm 2\pi i \, p$ in $(*)$ und zeige: für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt

$$E_P\left(Y^n\right) = e^{\frac{1}{2}n^2} \quad , \quad E_P\left(Y^n \sin(2\pi \, p \, X)\right) = 0 .$$

c) Assoziiere zu jedem Wahrscheinlichkeitsmass μ auf $\mathbb{Z}$ mittels

$$P_\mu(d\omega) := \left(1 + \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mu(\{p\}) \sin(2\pi \, p \, X(\omega))\right) P(d\omega)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmass P_μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und weise nach, dass

$$E_{P_\mu}\left(Y^n\right) = E_P\left(Y^n\right) \; , \; n \in \mathbb{Z}$$

nicht von der Wahl von μ abhängt.

d) Man gebe explizit eine möglichst grosse Familie $\mathcal{P}$ von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ an, welche die folgenden drei Eigenschaften besitzt :

i) es gilt $P' \ll P$ für alle $P' \in \mathcal{P}$;

ii) es gibt eine gemeinsame Schranke $C < \infty$ für alle Dichten $\frac{dP'}{dP}$, $P' \in \mathcal{P}$;

iii) Verteilungen $Q' \in \mathcal{P}$ können <u>nicht</u> anhand ihrer Momente unterschieden werden.

Übungsaufgabe 4 : Man überlege sich im Detail: Produkte polnischer Räume sind wieder polnisch.

Übungsaufgabe 5 : Für $-1 < \rho < 1$ betrachte man als Wahrscheinlichkeitsmass eine zweidimensionale Normalverteilung

$$P \; := \; \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{auf} \quad (\Omega, \mathcal{A}) = (I\!R^2, \mathcal{B}(I\!R^2)) \; .$$

Man schreibe $X = \binom{X_1}{X_2}$ für die kanonische Variable auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und zeige:

i) eine reguläre Version der bedingten Verteilung von X_2 gegeben $X_1 = \cdot$ ist gegeben durch

$$K(x_1, A_2) \; := \; \mathcal{N}\left(\rho x_1 \, , \, 1 - \rho^2 \right) (A_2) \quad , \quad x_1 \in I\!R \; , \; A_2 \in \mathcal{B}(I\!R))$$

ii) eine reguläre Version der bedingten Wahrscheinlichkeit gegeben $X_1 = \cdot$ ist gegeben durch

$$K(x_1, A) \; := \; \mathcal{N}\left(\rho x_1 \, , \, 1 - \rho^2 \right) (A_{x_1}) \quad , \quad x_1 \in I\!R \; , \; A \in \mathcal{B}(I\!R^2))$$

wobei A_{x_1} den x_1-Schnitt durch A bezeichnet.

Hinweis: man bringe die Dichte von P in eine Form

$$(x_1, x_2) \quad \longrightarrow \quad \varphi(x_1) \, \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \varphi\left(\frac{x_2 - \rho x_1}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)$$

mit $\varphi :=$ Dichte der eindimensionalen Standardnormalverteilung.