Reinhard Höpfner – WS 19/20 – Übungsaufgaben zur Stochastik II

November 25, 2019

Übungsaufgabe 10 : Seien P, P' zwei Wahrscheinlichkeitsmasse auf demselben $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $I\!\!F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ eine Filtration in $\mathcal{A}$; für $0 \leq t < \infty$ bezeichne Q_t bzw. Q'_t die Restriktion der Wahrscheinlichkeitsmasse P bzw. P' auf die Sub-σ-Algebra $\mathcal{F}_t$. Unter der Voraussetzung

$$(*) \qquad \text{für jedes } 0 \leq t < \infty \text{ gilt } \quad Q'_t \ll Q_t$$

existiert für jedes $0 \leq t < \infty$ eine $\mathcal{F}_t$-messbare Festlegung $L_t : \Omega \to [0, \infty)$ der Dichte $\frac{d(Q'_t)}{d(Q_t)}$ auf $\mathcal{F}_t$.
a) Zeige: der Prozess $L = (L_t)_{t \geq 0}$ ist ein $(P, I\!\!F)$-Martingal.
b) Unter der zusätzlichen Voraussetzung $P' \ll P$ (dies bedeutet eine wesentliche Verschärfung der Voraussetzung $(*)$!) gebe man für L einen Abschluss *als Martingal* nach rechts an.

Übungsaufgabe 11 : Sei $M = (M_t)_{t \geq 0}$ ein nichtnegatives Martingal auf $(\Omega, \mathcal{A}, I\!\!F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ mit der Eigenschaft $E(M_t) = 1$ für alle $t \geq 0$. Für beliebige Wahrscheinlichkeitsmasse P' auf $(\Omega, \mathcal{A})$ bezeichne P'_t die Restriktion auf $\mathcal{F}_t$, $0 \leq t < \infty$.

Zeige: es gibt genau ein Wahrscheinlichkeitsmass Q auf $(\Omega, \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ so dass gilt:

$$\text{für jedes } 0 \leq t < \infty \text{ gilt } Q_t \ll P_t, \text{ und } M_t \text{ ist eine Festlegung der Dichte } \frac{d(Q_t)}{d(P_t)} \, .$$

Übungsaufgabe 12 : Sei gegeben ein Wahrscheinlichkeitsmass ν auf $(I\!\!R, \mathcal{B}(I\!\!R))$, eine messbare Funktion $\rho : I\!\!R \to (0,1)$, und eine Übergangswahrscheinlichkeit $K(.,.)$ auf $(I\!\!R, \mathcal{B})$ mit der Eigenschaft

$$\int_{I\!\!R} |y| \, K(x, dy) \; < \; \infty \quad \text{für jedes } x \in I\!\!R \, .$$

Bezeichne $\mathcal{G}(q)$ die gedächtnislose Verteilung auf $I\!\!N$ (d.h.: Gewichte $(1-q)q^{k-1}$ auf $k = 1, 2, \ldots$) mit Parameter $0 < q < 1$. Betrachte einen reellwertigen stochastischen Prozess der Form

$$X = (X_n)_{n \in I\!\!N_0} \quad , \quad X_n \; = \; \zeta_0 \, 1_{\{n < \tau\}} + \zeta_1 \, 1_{\{\tau \leq n < \infty\}} \quad , \quad n \in I\!\!N_0$$

('Ein-Sprung-Sprungprozess'), bezeichne $I\!\!F^X = (\mathcal{F}_n)_{n \in I\!\!N_0}$ die Geschichte von X. Man setze voraus

- der Startwert ζ_0 wird ausgewürfelt durch ν
- τ und ζ_1 sind bedingt unabhängig gegeben ζ_0
- die bedingte Verteilung von τ gegeben ζ_0 ist gedächtnislos mit Parameter $\rho(\zeta_0)$
- die bedingte Verteilung von $\zeta_1 - \zeta_0$ gegeben ζ_0 ist gegeben durch $K(\zeta_0, \cdot)$

und zeige:

a) τ ist eine $I\!F^X$-Stopzeit; $\Delta := \zeta_1 - \zeta_0$ ist eine $\mathcal{F}_\tau$-messbare Zufallsvariable;

b) für jedes $n \in I\!N_0$ ist $\mathcal{F}_n$ die von ζ_0, $\tau 1_{\{\tau \leq n\}}$ und $\Delta 1_{\{\tau \leq n\}}$ erzeugte σ-Algebra, und es gilt

$$P(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \; = \; \zeta_0 + \Delta 1_{\{\tau \leq n\}} + 1_{\{\tau > n\}}(1-\rho(\zeta_0)) \int_{I\!R} y \, K(\zeta_0, dy)$$

c) Die Semimartingalzerlegung von X bezüglich $\mathcal{F}^X$ ist gegeben durch

$$X = X_0 + M + A^\tau$$

wobei A den Prozess

$$n \;\longrightarrow\; A_n \;:=\; n\,(1-\rho(\zeta_0)) \int_{I\!R} y \, K(\zeta_0, dy)$$

(bedingt deterministisch gegeben ζ_0) und $M = (M_n)_{n \in I\!N_0}$ das Martingal mit

$$M_n \;:=\; (X_n - E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})) \;=\; \sum_{j=1}^{n} ((X_n - X_{n-1}) - E((X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1})) \quad , \quad n \geq 1$$

und Startwert $M_0 \equiv 0$ bezeichnet; für dieses gilt M gilt $M = M^\tau$ nach Definition.