Reinhard Höpfner – WS 19/20 – Übungsaufgaben zur Stochastik II

December 3, 2019

Übungsaufgabe 10 : Sei gegeben ein Wahrscheinlichkeitsmass ν auf $(I\!R, \mathcal{B}(I\!R))$, eine messbare Funktion $\rho : I\!R \to (0,1)$, und eine Übergangswahrscheinlichkeit $K(.,.)$ auf $(I\!R, \mathcal{B})$ mit der Eigenschaft

$$\int_{I\!R} |y| \, K(x,dy) \; < \; \infty \quad \text{für jedes } x \in I\!R \, .$$

Schreibe $M(x) := \int_{I\!R} y \, K(x,dy)$, $x \in I\!R$. Bezeichne $\mathcal{G}(q)$ die gedächtnislose Verteilung auf $I\!N$ (mit Gewichten $(1-q)q^{k-1}$ auf $k = 1, 2, \ldots$) mit Parameter $0 < q < 1$. Betrachte einen reellwertigen stochastischen Prozess der Form

$$X = (X_n)_{n \in I\!N_0} \quad , \quad X_n \; = \; \zeta_0 \, 1_{\{n<\tau\}} + \zeta_1 \, 1_{\{\tau \le n < \infty\}} \quad , \quad n \in I\!N_0$$

('Ein-Sprung-Sprungprozess'), bezeichne $I\!F^X = (\mathcal{F}_n)_{n \in I\!N_0}$ die Geschichte von X. Man setze voraus

- der Startwert ζ_0 wird ausgewürfelt durch ν
- τ und ζ_1 sind bedingt unabhängig gegeben ζ_0
- die bedingte Verteilung von τ gegeben ζ_0 ist gedächtnislos mit Parameter $\rho(\zeta_0)$
- die bedingte Verteilung von $\Delta := \zeta_1 - \zeta_0$ gegeben ζ_0 ist gegeben durch $K(\zeta_0, \cdot)$

und zeige:

a) τ ist eine $I\!F^X$-Stopzeit; $\Delta = \zeta_1 - \zeta_0$ ist eine $\mathcal{F}_\tau$-messbare Zufallsvariable;

b) für jedes $n \in I\!N_0$ ist $\mathcal{F}_n$ die von ζ_0, $\tau 1_{\{\tau \le n\}}$ und $\Delta 1_{\{\tau \le n\}}$ erzeugte σ-Algebra, und es gilt

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \; = \; \zeta_0 + \Delta 1_{\{\tau \le n\}} + 1_{\{\tau > n\}} [1 - \rho(\zeta_0)] M(\zeta_0)$$

c) Die Semimartingalzerlegung von X bezüglich $I\!F^X$ ist gegeben durch

$$X = X_0 + M + A$$

wobei A den Prozess

$$A_n \; := \; (n \wedge \tau) \, [1 - \rho(\zeta_0)] M(\zeta_0) \quad , \quad n \in I\!N_0$$

und M das Martingal

$$M_n := \sum_{j=1}^{n} ((X_j - X_{j-1}) - E((X_j - X_{j-1})|\mathcal{F}_{j-1})) \quad , \quad n \geq 1$$

mit Startwert $M_0 \equiv 0$ bezeichnet. Beachte: für $M = (M_n)_{n \in I\!N_0}$ gilt $M = M^\tau$ nach Definition.

<u>Übungsaufgabe 11 :</u> Seien P, P' zwei Wahrscheinlichkeitsmasse auf demselben $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei $I\!F = (\mathcal{F}_n)_{n \in I\!N_0})$ eine Filtration in $\mathcal{A}$; für $0 \leq n < \infty$ bezeichne Q_n bzw. Q'_n die Restriktion der Wahrscheinlichkeitsmasse P bzw. P' auf die Sub-σ-Algebra $\mathcal{F}_n$.

I) Unter der Voraussetzung

$$(*) \qquad \text{für jedes } 0 \leq n < \infty \text{ gilt } \quad Q'_n \ll Q_n \quad \text{auf } \mathcal{F}_n$$

existiert für jedes $0 \leq n < \infty$ eine $\mathcal{F}_n$-messbare Festlegung $L_n : \Omega \to [0, \infty)$ der Dichte $\frac{d(Q'_n)}{d(Q_n)}$ auf $\mathcal{F}_n$.

Unter $(*)$ zeige man :

a) Der Prozess $L = (L_n)_{n \in I\!N_0}$ ist ein $(P, I\!F)$-Martingal mit $E(L_n) = 1$ für alle $n \in I\!N_0$.

b) Sei S eine beschränkte $I\!F$-Stopzeit. Dann ist L_S eine Festlegung der Dichte $\frac{d(Q'_S)}{d(Q_S)}$ auf $\mathcal{F}_S$, wobei $\mathcal{F}_S$ die σ-Algebra der Vergangenheit bis zur Zeit S und Q_S, Q'_S die Restriktion der Wahrscheinlichkeitsmasse P, P' auf $\mathcal{F}_S$ bezeichnet.

c) Es gibt eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Limesvariable $\widetilde{L}_\infty : \Omega \to [0, \infty)$ mit den Eigenschaften

$$E_P(\widetilde{L}_\infty) \leq 1 \,, \; \widetilde{L}_\infty = \lim_{n \to \infty} L_{S_n} \; \text{ für jede aufsteigende Folge } S_n \uparrow \infty \text{ beschränkter } I\!F\text{-Stopzeiten} \,.$$

II) Unter der Voraussetzung

$$(**) \qquad P' \ll P \quad \text{auf } \mathcal{A}$$

verbessere man die Aussage aus I)c) wie folgt: unter $(**)$ existiert eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Limesvariable $L_\infty : \Omega \to [0, \infty)$ so dass

$$E_P(L_\infty) = 1 \,, \text{ es gilt } \lim_{n \to \infty} L_n = L_\infty \; P\text{-fast sicher und in } L^1(P) \;\; ,$$
$$L_\infty = \lim_{n \to \infty} L_{S_n} \; \text{ für beliebige aufsteigende Folgen } S_n \uparrow \infty \text{ von } I\!F\text{-Stopzeiten} \;\; .$$

Bemerkung: $(**)$ bedeutet eine wesentliche Verschärfung von $(*)$: unter $(*)$ gibt es für das $(P, I\!F)$-Martingal L einen Abschluss nach rechts *als Supermartingal*, unter $(**)$ *als Martingal.*

Übungsaufgabe 12 : Für festes $h \neq 0$ betrachte eine Familie $(Y_i)_{i \in I\!N}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A})$, die unter verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmassen P, P' auf $(\Omega, \mathcal{A})$ unabhängig und identisch verteilt sind: unter P gelte $\mathcal{L}(Y_j|P) = \mathcal{N}(0,1)$ für alle j, unter P' dagegen $\mathcal{L}(Y_j|P) = \mathcal{N}(h,1)$ für alle $j \in I\!N$. Betrachte den Random Walk

$$S = (S_n)_{n \in I\!N_0} \quad , \quad S_n := \sum_{j=1}^{n} Y_j \ , \ n \in I\!N \quad , \quad S_0 \equiv 0$$

bezüglich seiner eigenen Geschichte $I\!F = I\!F^S$.

a) Aus $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ und Betrachtung von $P'\,(Y_1 \in A_1, \ldots, Y_n \in A_n)$, $P\,(Y_1 \in A_1, \ldots, Y_n \in A_n)$ bestimme man den Prozess L aus Aufgabe 11 konkret und zeige

$$L_n \; = \; \exp\left\{ h \sum_{j=1}^{n} Y_j \; - \; \frac{1}{2} n\, h^2 \right\} \ , \ n \geq 1 \quad , \quad L_0 \equiv 1 \ .$$

Man bestimme die Limesvariable $\widetilde{L}_\infty$ in Aufgabe 11 und überzeuge sich, dass in dieser Situation $(*)$ erfüllt ist, nicht aber $(**)$.