January 22, 2020

Übungsaufgabe 13 : Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung, definiert auf irgendeinem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sei $0 < t < \infty$ beliebig aber fest. Man beweise die folgenden Aussagen:

i) für $0 < \alpha < 2$ gilt $\displaystyle\sum_{j=0}^{2^n-1} \left| X_{\frac{(j+1)\,t}{2^n}} - X_{\frac{j\,t}{2^n}} \right|^\alpha \longrightarrow \infty$ P-fast sicher für $n \to \infty$

ii) im Fall $\alpha = 2$ gilt $\displaystyle\sum_{j=0}^{2^n-1} \left| X_{\frac{(j+1)\,t}{2^n}} - X_{\frac{j\,t}{2^n}} \right|^2 \longrightarrow t$ P-fast sicher für $n \to \infty$

iii) für $2 < \alpha < \infty$ gilt $\displaystyle\sum_{j=0}^{2^n-1} \left| X_{\frac{(j+1)\,t}{2^n}} - X_{\frac{j\,t}{2^n}} \right|^\alpha \longrightarrow 0$ P-fast sicher für $n \to \infty$

Insbesondere (Fall $\alpha = 1$) hat der Brownsche Pfad fast sicher *keine endliche Totalvariation.*

Hinweise: man arbeite mit starken Gesetzen der grossen Zahlen und mit iid ZV

$$Y_j := \sqrt{\frac{2^n}{t}} \left(X_{\frac{(j+1)\,t}{2^n}} - X_{\frac{j\,t}{2^n}} \right) \quad , \quad j \in \mathbb{N}_0 \;;$$

für jedes $0 < \alpha < \infty$ ist $\int_0^\infty x^\alpha \mathcal{N}(0,1)(dx)$ strikt positiv und endlich.