Reinhard Höpfner

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Institut für Mathematik, Universität Mainz

Sommersemester 2020 **MO+MI 10-12**

Tentatives Inhaltsverzeichnis

April 15, 2020

Kap. I : Grundbegriffe

stochastische Prozesse – Versionen und Ununterscheidbarkeit – Filtrationen – die 'üblichen Hypothesen' – messbare Prozesse – adaptierte Prozesse – progressive, optionale und vorhersehbare Prozesse – die vorhersehbare σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ auf $\mathbb{R}^+ \times \Omega$

Kap. II : Stopzeiten

A.: Stopzeiten und vorhersehbare Stopzeiten – ankündigende Folgen – stochastische Intervalle

B.: Beginn einer progressiven Menge – Projektionssatz – Schnittsätze – vorhersehbare Stopzeiten und ankündigende Folgen

C.: Vergangenheit vor einer Stopzeit – Vergangenheit strikt vor einer Stopzeit

D.: Zerlegung von Stopzeiten – vorhersehbare, erreichbare und völlig unerreichbare Stopzeiten

E.: Stopzeiten und cadlag-Prozesse – Darstellung der Sprünge von cadlag-Prozessen – vorhersehbare cadlag-Prozesse

Kap. III : Martingale in stetiger Zeit

A.: Martingale, Submartingale, Supermartingale – gleichgradige Integrierbarkeit – Doob-Ungleichungen – Upcrossings – cadlag-Versionen unter üblichen Hypothesen

B.: Doleansmass auf $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ – Stopsätze – vorhersehbare wachsende Prozesse – Doob-Meyer-Zerlegung für Submartingale – Kompensator – Beispiele

Kap. IV : Stochastische Integrale

A.: Die Klasse $\mathcal{M}^2$ der quadratintegrablen Martingale – Hilbertraumstruktur von $\mathcal{M}^2$ – Konvergenz in $\mathcal{M}^2$ – gleichmässige Konvergenz fast aller Pfade entlang von Teilfolgen

B.: Die Klasse $L^2(M)$ vorhersehbarer Integranden – Explizites Integral $\int H dM$ für vorhersehbare Elementarprozesse – das stochastische Integral als lineare Isometrie von $L^2(M)$ nach $\mathcal{M}^2$ – Stopzeitregeln

C.: Lokalisation – die Räume $\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$ und $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ – lokalisierende Folgen – Eigenschaften des stochastischen Integrals $\int H dM$ für $M \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$ und $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ – Rechenregeln für stochastische Integrale

Kap. V : Quadratische Variation

Vorhersehbare lokale Martingale mit Pfaden von lokal beschränkter Variation sind null – quadratische Variation und vorhersehbare quadratische Variation – ein Charakterisierungssatz

Kap. VI : Stetige Semimartingale und Ito-Formel

Stetige Semimartingale – Eindeutigkeit des stetigen Martingalteils – Ito-Formel für stetige Semimartingale

Kap. VII : Stochastische Differentialgleichungen (SDE)

Exponentielle Semimartingale als Lösung einer SDE – allgemeine Problemstellung – starke Lösungen – starke Eindeutigkeit – Ito's Konstruktion starker Lösungen unter Lipschitz-Bedingungen – Beispiele