Reinhard Höpfner, Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Einige Übungsaufgaben zu Kapitel I **April 21, 2020**

Aufgabe 1.1 : Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung (Def. 13.9 aus der Stochastik II), definiert auf irgendeinem $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Betrachte Filtrationen

$$I\!\!F^0 = (\mathcal{F}^0_t)_{t\geq 0} \ , \ \mathcal{F}^0_t \ := \ \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t) \quad , \quad I\!\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \ , \ \mathcal{F}_t \ := \ \bigcap_{r>t} \mathcal{F}^0_r$$

in $\mathcal{A}$, und Teilmengen von Ω (für $t \geq 0$ beliebig aber fest)

$$A_t \ = \ \bigcap_n \left\{ \sup_{0\leq h\leq \frac{1}{n}} (X_{t+h} - X_t) \ > \ 0 \right\} \quad , \quad B_t \ = \ \bigcap_n \left\{ \inf_{0\leq h\leq \frac{1}{n}} (X_{t+h} - X_t) \ < \ 0 \right\} \ .$$

a) Man zeige: $A_t, B_t \ \in \ \mathcal{F}_t$. Man mache sich klar, dass A_t, B_t im allgemeinen nicht zu $\mathcal{F}^0_t$ gehören.

b) Bezeichne $\mathcal{N}^P$ die Klasse aller Teilmengen von P-Nullmengen in $\mathcal{A}$. Man zeige: $A_t, B_t \ \in \ \sigma\left(\mathcal{F}^0_t, \mathcal{N}^P\right)$.

Aufgabe 1.2 : Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit der Eigenschaft, dass sämtliche Pfade $X_\bullet(\omega) : [0,\infty) \to I\!\!R$ stückweise konstant und rechtsstetig sind, $\omega \in \Omega$. Man zeige: in diesem Fall ist die Filtration

$$I\!\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \ , \ \mathcal{F}_t \ := \ \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$$

rechtsstetig. Beispiel: Standard-Poissonprozess (Def. 13.14 aus der Stochastik II).

Aufgabe 1.3 : Auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ betrachte einen reellwertigen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ mit der Eigenschaft: sämtliche Pfade sind rechtsstetig (oder: sämtliche Pfade sind linksstetig). Dann ist X ein messbarer stochastischer Prozess im Sinne von Def. 1.5. (Hinweis: Filtrationen sollen im Argument nicht vorkommen!)

Aufgabe 1.4 : Sei $(\Omega, \mathcal{A}, I\!\!F, P)$ eine stochastische Basis. Man zeige: auch jedes der folgenden drei Systeme

$$\{ \ [r_2, r_3] \times F \ : \ F \in \mathcal{F}_{r_1} \ , \ 0 \leq r_1 < r_2 < r_3 \ \} \bigcup \{ \ [0] \times F \ : \ F \in \mathcal{F}_0 \ \}$$
$$\{ \ [r_2, r_3[\times F \ : \ F \in \mathcal{F}_{r_1} \ , \ 0 \leq r_1 < r_2 < r_3 \ \} \bigcup \{ \ [0] \times F \ : \ F \in \mathcal{F}_0 \ \}$$
$$\{ \ ]r_2, r_3[\times F \ : \ F \in \mathcal{F}_{r_1} \ , \ 0 \leq r_1 < r_2 < r_3 \ \} \bigcup \{ \ [0] \times F \ : \ F \in \mathcal{F}_0 \ \}$$

erzeugt die vorhersehbare σ-Algebra $\mathcal{P}(I\!\!F)$ auf $I\!\!R^+ \times \Omega$.