Reinhard Höpfner

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Institut für Mathematik, Universität Mainz

Sommersemester 2020

Kapitel I Inhalt **April 16, 2020**

Kap. I : Grundbegriffe

Kap I Grundbegriffe

A. Def. und Ergänzungen

1.1. Def: Sei $(E,\mathcal{E})$ mb Raum, T bel. Indexmenge, sei $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein mb. Raum. Ein stoch. Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ m. W. in $(E,\mathcal{E})$ und Indexmenge T ist eine Abb.

$X = X(\cdot,\cdot) \; : \; T\times\Omega \to E$ so daß $\forall\, t\in T$ fest

$$X_t \; : \; \omega \to X(t,\omega) \quad \mathfrak{A}\text{-}\mathcal{E}\text{-mb ZV.}$$

Nenne X_t Zustand von X z. Zt t, nenne für $\omega\in\Omega$

$$X_\bullet(\omega) \; : \; t \to X(t,\omega)$$

Pfad von X. Schreibe $X = (X_t)_{t\in T}$.

1.2 Eindeutigkeitsbegriffe: $X^{(i)} = (X_t^{(i)})_{t\in T}$ stoch. Proz. auf denselben $(\Omega,\mathfrak{A},P)$, m. W. in demselben $(E,\mathcal{E})$, $i=1,2$.

a) Dann heißt $X^{(2)}$ eine Version (Modification) von $X^{(1)}$ falls für jedes $t\in T$: $X_t^{(1)} = X_t^{(2)}$ P-f.s.

b) $X^{(1)}$ und $X^{(2)}$ heißen P-ununterscheidbar falls für P-f.a. $\omega\in\Omega$: $X_\bullet^{(1)} = X_\bullet^{(2)}$.

Vor: T Teilm. von $\mathbb{R}$ oder $\overline{\mathbb{R}}$.

1.3 Def. a) Filtr. $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$: aufsteigende Fam. von Sub-σ-Alg. von $\mathcal{A}$. Ein Prozeß $X=(X_t)_{t\in T}$ auf $(\Omega,\mathcal{A})$ heißt $\mathbb{F}$-adaptiert falls X_t $\mathcal{F}_t$-mb $\forall t\in T$. Eine stochastische Basis ist ein Ws-Raum $(\Omega,\mathcal{A},P)$ versehen mit einer Filtr. $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$.

b) Speziell für $T=[0,\infty)$ oder $T=[0,\infty]$: man schreibt

$$\bigvee_{t\in T}\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t : t\in T)$$

sowie

$$\mathcal{F}_{t-} := \bigvee_{s<t}\mathcal{F}_s = \sigma(X_r : 0\le r<t), \quad \mathcal{F}_{0-}:=\mathcal{F}_0 .$$

$\mathbb{F}$ heißt rechtsstetig falls $\mathcal{F}_t=\bigcap_{r>t}\mathcal{F}_r$, $0\le t<\infty$.

c) stoch. Basis $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0},P)$, bezeichne $\mathcal{N}^P$ das System aller TM von P-Nullmengen in $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{N}^P := \{N\subset\Omega : \text{es ex. } A\in\mathcal{A} \text{ so daß } P(A)=0,\ N\subset A\}.$$

Dann heißt $\mathbb{F}$ vollständig bzgl. P falls gilt

$$\mathcal{N}^P\subset\mathcal{F}_0 \quad (\text{dann auch } \mathcal{N}^P\subset\mathcal{F}_t \ \forall t\ge 0)$$

1.4 Def: Man sagt, eine stoch. Basis $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0},P)$ erfülle die 'üblichen Hypothesen', falls gilt:

$\mathbb{F}$ ist rechtsstetig, $\mathbb{F}$ ist vollständig bzgl. P.

Bem: 'übliche Hypothesen' können je nach Situation höchst nützlich oder vollkommen ungeeignet sein.

3. Meßbarkeitsbegriffe für stoch. Prozesse

Betrachte hier stoch. Prozesse als Abb. $(t,\omega) \to X(t,\omega)$ ...

1.5 Def: Sei T Borel-TM von $\mathbb{R}$ oder $\overline{\mathbb{R}}$. Sei $X = (X_t)_{t\in T}$ stoch. Prozeß auf $(\Omega,\mathfrak{A})$ m. W. in $(E,\mathcal{E})$.

a) X heißt **meßbar** falls die Abb.

$$(t,\omega) \to X(t,\omega) \quad : \quad T\times\Omega \to E$$

meßbar ist $\mathcal{B}(T)\otimes\mathfrak{A} - \mathcal{E}$. Für $F\in\mathcal{E}$ schreibe kurz

$$\{X\in F\} = \{(t,\omega)\in T\times\Omega : X(t,\omega)\in F\} \in \mathcal{B}(T)\otimes\mathfrak{A}.$$

b) Eine Teilmenge $A\subset T\times\Omega$ heißt **meßbar** falls gilt

$1_A : (t,\omega)\to 1_A(t,\omega)$ ist meßbarer stoch. Proz.,

d.h. falls $A\in\mathcal{B}(T)\otimes\mathfrak{A}$.

Ab jetzt $T=[0,\infty)$, $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $X=(X_t)_{t\geq 0}$ stoch. Proz. auf $(\Omega,\mathfrak{A})$ m. W. in $(E,\mathcal{E})$; $(E,\mathcal{E})$ bel. meßbarer Raum.

1.6 Def: a) X heißt **$\mathbb{F}$-progressiv** falls gilt

$$\{X|_{[0,t]\times\Omega}\in F\} = \{(s,\omega) : s\leq t, X(s,\omega)\in F\} \in \mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$$

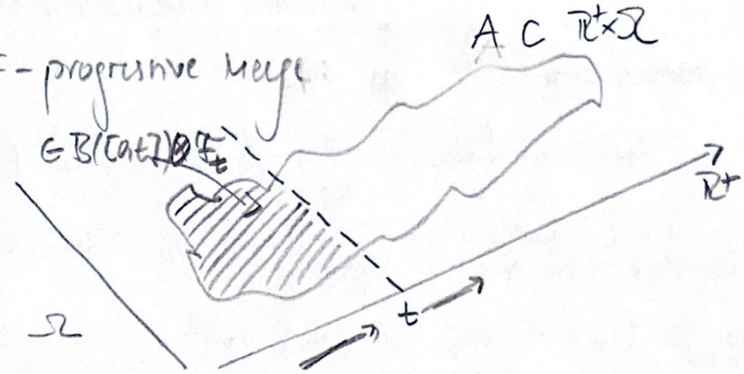
für alle $t\geq 0$ und alle $F\in\mathcal{E}$.

b) $A\subset\mathbb{R}^+\times\Omega$ heißt **$\mathbb{F}$-progressiv** falls 1_A ein $\mathbb{F}$-progr. Proz. ist.

c) Schreibe $\mathcal{M}_1(\mathbb{F})$ für die Menge aller $\mathbb{F}$-progressiven Mengen; $\mathcal{M}_1(\mathbb{F})$ ist eine Sub-σ-Algebra von $\mathcal{B}([0,\infty))\otimes\mathfrak{A}$ wegen

$$A \ \mathbb{F}\text{-progr} \Rightarrow \bigcup_{u\in\mathbb{N}} \underbrace{(A\cap[0,u]\times\Omega)}_{\in\mathcal{B}([0,u])\otimes\mathcal{F}_u} \in \mathcal{B}([0,\infty))\otimes\mathfrak{A}.$$

Eine $\mathbb{F}$-progressive Menge:



koppelt die Dynamik $t \to A \cap ([0,t]\times\Omega)$ an Filtration $\mathbb{F}$!

1.7 Satz: unter Vor. + Bez. wie 1.6:

X $\mathbb{F}$-progressiv $\Longrightarrow$ X ist meßbar und $\mathbb{F}$-adaptiert.

Bew: 1) Meßbarkeit: für $F\in\mathcal{E}$ und $t\geq 0$

$$\{X\in F\} = \{(t,\omega)\in[0,\infty)\times\Omega : X(t,\omega)\in F\}$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{X|_{[0,n]\times\Omega}\in F\}}_{\in \mathcal{B}([0,n])\otimes\mathcal{F}_n}$$
$$\in \mathcal{B}([0,\infty))\otimes\mathcal{A}.$$

2) $\mathbb{F}$-Adaptiertheit: für $F\in\mathcal{E}$ und $t\geq 0$ betrachte

$$A := \{(s,\omega)\in[0,t]\times\Omega : X(s,\omega)\in F\} \in \mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$$

also sind Schnitte durch A (i.S. von Fubini) meßbar:

$$A_t = \{\omega\in\Omega : X_t(\omega)\in F\} \in \mathcal{F}_t. \qquad \square$$

1.8 Def: Nenne $A\subset\mathbb{R}^+\times\Omega$ $\mathbb{F}$-adaptiert falls $1_A : (t,\omega) \to 1_A(t,\omega)$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter stoch. Prozeß ist.