1.9 Satz: Ist $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter Prozeß mit Werten in einem metrischen Raum $(E, \mathcal{E} = \mathcal{B}(E))$, und

- entweder: alle Pfade von X rechtsstetig
- oder: —, — linksstetig

so ist X $\mathbb{F}$-progressiv.

Bew: Fix $t \geq 0$. Zu $X : (s,\omega) \to X(s,\omega)$ betr. Einschr. auf $[0,t] \times \Omega$ und definiere

$$X^n(s,\omega) := 1_{[0]}(s)\, X(0,\omega) + \sum_{k=0}^{2^n-1} 1_{]\frac{kt}{2^n}, \frac{(k+1)t}{2^n}]}(s)\, X\left(\frac{(k+1)t}{2^n}, \omega\right)$$

für $s \leq t$ und $\omega \in \Omega$ falls X rechtsstetig, bzw.

$$X^n(s,\omega) := 1_{[0]}(s)\, X(0,\omega) + \sum_{k=0}^{2^n-1} 1_{]\frac{kt}{2^n}, \frac{(k+1)t}{2^n}]}(s)\, X\left(\frac{kt}{2^n}, \omega\right)$$

falls X linksstetig. Dann gilt für $n \to \infty$

$$X^n \longrightarrow X|_{[0,t]\times\Omega} \quad \text{punktw. auf } [0,t]\times\Omega$$

Nun ist X^n $\mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t$-mb, also auch $X|_{[0,t]\times\Omega}$.

Damit ist X $\mathbb{F}$-progressiv. □

1.10 Ziel: Definiere weitere Sub-σ-Algebren von TM von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{A}$:

- messbare Mengen — $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{A}$
- $\mathbb{F}$-progressive Mengen — $\mathcal{M}_1(\mathbb{F})$
- '$\mathbb{F}$-optionale Mengen' — $\mathcal{O}(\mathbb{F})$
- '$\mathbb{F}$-vorhersehbare Mengen' — $\mathcal{P}(\mathbb{F})$

Synonyme:
optional ≙ wellmeasurable
vhs ≙ predictable

1.11 Def: a) Schreibe $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ für diejenige σ-Alg. von TM von $\mathbb{R}^+\times\Omega$, welche von der Klasse aller $\mathbb{F}$-adaptierten $\mathbb{R}$-wert. Prozesse mit stetigen Pfaden erzeugt wird.
$\mathcal{P}(\mathbb{F})$ heißt $\mathbb{F}$-vorhersehbare σ-Alg., Elemente von $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ $\mathbb{F}$-vorhersehbare Mengen.

b) Schreibe $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{F})$ für diejenige σ-Alg. von TM von $\mathbb{R}^+\times\Omega$, welche von der Klasse aller $\mathbb{F}$-adaptierten $\mathbb{R}$-wertigen Prozesse mit càdlàg-Pfaden erzeugt wird. $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ heißt $\mathbb{F}$-optionale oder $\mathbb{F}$-gut messbare σ-Alg., Elemente von $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ heißen $\mathbb{F}$-optionale Mengen.

Bem: càdlàg : alle Pfade: rechtsstetig in $t\geq 0$, ex. Limiten von links in $t>0$ ('RCLL'), d.h.:

$$\begin{cases} \forall\, t\geq 0: & X(t,\omega) = \lim_{s\downarrow t} X(s,\omega) \quad \forall \omega\in\Omega \\ \forall\, t>0: & \lim_{s\uparrow t} X(s,\omega) \text{ existiert in } \mathbb{R} = (-\infty,+\infty). \end{cases}$$

1.12 Satz: $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{F}) \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{F})$.

Bew: erste '$\subset$' n. Def., zweite '$\subset$' 1.9. □

20.4.20

1.13 Bem: Ein Erzeugendensystem für $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ ist nach Def. 1.11

$$\left\{ \begin{array}{l} \{X\in B\} = \{(t,\omega)\in\mathbb{R}^+\times\Omega : X(t,\omega)\in B\}, \\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ X=(X_t)_{t\geq 0}\ \mathbb{F}\text{-adaptierter reellwert. Prozeß auf } (\Omega,\mathcal{A}) \\ \text{mit stetigen Pfaden} \end{array} \right.$$

Für $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ ersetzt man 'stetig' durch 'càdlàg'. □

1.14 Def: Ein Prozeß $X=(X_t)_{t\geq 0}$ m. W. in bel. meßb. Raum $(E,\mathcal{E})$ heißt $\mathbb{F}$-vorhersehbar ($\mathbb{F}$-optional) falls das System

$$\{X\in B\} = \{(t,\omega)\in \mathbb{R}_+\times\Omega : X(t,\omega)\in B\}\ ,\quad B\in\mathcal{E}$$

in $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ (in $\mathcal{O}(\mathbb{F})$) enthalten ist.

Bemerkung: Progressivität, Vorhersehbarkeit, ... definiert für $T=[0,\infty)$, $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, $X=(X_t)_{t\geq 0}$ ein stoch. Prozeß auf $(\Omega,\mathcal{A})$ m. W. in $(E,\mathcal{E})$ bel. meßb. Raum: Meßbarkeitsstrukturbegriffe 'ohne Wahrscheinlichkeit' !!

1.15 Satz: $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$. Das System $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\mathbb{F})$ der $\mathbb{F}$-vorhersehbaren Rechtecke

$$\mathcal{R} := \{\,]s,t]\times F : F\in\mathcal{F}_s,\ 0\leq s<t<\infty\}\cup\{\{0\}\times F : F\in\mathcal{F}_0\}$$

ist ein Erzeugendensystem für die $\mathbb{F}$-vhs σ-Alg $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Bew: 1) Vorbem: zu $R=]s,t]\times F$, $F\in\mathcal{F}_s$, def. Prozeß $X=(X_r)_{r\geq 0}$

$$X(r,\omega) := 1_R(r,\omega)\ ,\quad r\geq 0,\ \omega\in\Omega.$$

Alle Pfade von X sind linksstetig mit Limites von rechts. Es gilt

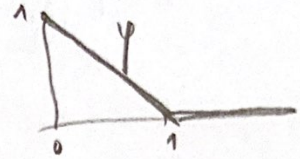
$$\{X_r=1\} = \begin{cases} F\in\mathcal{F}_s & \text{falls } s<r\leq t \\ \emptyset & \text{falls } r\notin\,]s,t] \end{cases}$$

Also $\{X_r=1\}\in\mathcal{F}_r\ \forall r\geq 0$, damit X $\mathbb{F}$-adaptiert.

2) Zeige nun: $\mathcal{R}(\mathbb{F}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Fall 1: $R = \{0\} \times F$, $F \in \mathcal{F}_0$. Def. zu R einen stoch. Prozess $X = (X_r)_{r \geq 0}$ durch

$$X(r,\omega) := 1_F(\omega)\,\varphi(r)$$

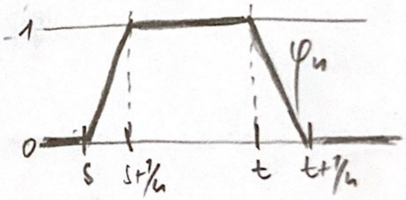


mit det. Fkt $\varphi(r) = (1-r) \wedge 0$. Argument wie oben: X hat stetige Pfade, X ist $\mathbb{F}$-adaptiert.
Def 1.15 a):

$$R = \{X = 1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

Fall 2: $R =]s,t] \times F$, $F \in \mathcal{F}_s$, $0 \leq s < t < \infty$.

Def. det. Fkt $\varphi_n : [0,\infty) \to [0,1]$:



setze

$$X^n(r,\omega) := 1_F(\omega)\,\varphi_n(r)$$

dann ist X^n $\mathbb{F}$-adaptiert mit stetigen Pfaden.
Def. 1.15 a):

$$\{X^n = 1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \quad \forall n \geq 1,$$

also

$$R =]s,t] \times F = \bigcup_n \{X^n = 1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

3) Bis jetzt gezeigt: $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{F})$, zeige nun: $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{F})$! Betr. dazu einen bel. reellwertigen $\mathbb{F}$-adaptierten Prozess $X = (X_r)_{r \geq 0}$ mit stetigen Pfaden.
OBdA $X \geq 0$, sonst zerlege $X = X^+ - X^-$; approx. $X \geq 0$ durch Prozesse $(X^n)_n$:

$$X^n(r,\omega) := 1_{[0]} X(0,\omega) + \sum_{k=0}^{n2^n-1} 1_{]\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]}(r)\, X(\tfrac{k}{2^n},\omega)$$

klar: jedes X^n ist $\mathbb{F}$-adaptiert, $X^n \to X$ punktweise auf $\mathbb{R}^+\times\Omega$ da alle Pfade von X stetig sind. Approx. aufsteigend

$t\in \frac{1}{2^n}\mathbb{N}_0$ fest: $X^n_t = \lim_{m\uparrow\infty}\left[\sum_{j=0}^{m2^m-1} \frac{j}{2^m} 1_{]\frac{j}{2^m},\frac{j+1}{2^m}]} + m\, 1_{]m,\infty[}\right]\circ X^n_t$

da X nichtnegativ. Nun sind aber

$$\underbrace{[0]\times\{X_0\in B\}}_{\in\mathcal{F}_0}, \quad \underbrace{]\tfrac{k}{2^n},\tfrac{k+1}{2^n}]\times\{X_{\frac{k}{2^n}}\in B\}}_{\in\mathcal{F}_{k/2^n}}, \quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

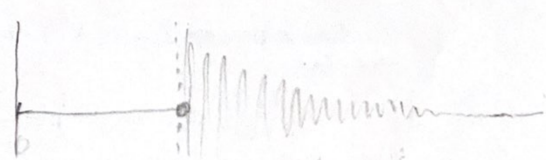
$\mathbb{F}$-vorhersehbare RE. Also können $\mathbb{F}$-adaptierte Prozesse mit stetigen Pfaden approximiert werden durch Proz. der Bauart $\sum_{\text{endl}} \alpha_i 1_{R_i}$, $\alpha_i\geq 0$, $R_i\in\mathcal{R}(\mathbb{F})$: also gilt $(\to 1.15)$

$$\mathcal{P}(\mathbb{F}) \subset \sigma(\mathcal{R}(\mathbb{F}))$$

und damit "=" nach 1)+2). □

<u>1.16 Satz:</u> Jeder $\mathbb{F}$-adaptierte Prozeß mit <u>linksstetigen</u> Pfaden ist $\mathbb{F}$-vhs.

<u>Bew:</u> Schritt 3) des Bew. von 1.17 mit X linksstetig. □



22.11.20