Reinhard Höpfner

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Institut für Mathematik, Universität Mainz

Sommersemester 2020

Inhaltsverzeichnis Vorspann vor Kapitel II **April 21, 2020**

Vorspann vor Kap. II : Stopzeiten in kontinuierlicher Zeit, klassischer Ansatz
Online-Skript R.H. 'Stochastik II', Kapitel 13 D, Nr. 13.26–13.30

Vorspann zu Kap. II

Stoppzeiten in kontinuierlicher Zeit, klassischer Ansatz

Online-Skript Stochastik II, Kap. 13 D, 13.26 – 13.29

13.26 Hilfssatz: Betrachte $(\Omega, \mathcal{A})$ versehen mit einer *rechtsstetigen* Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

a) Für jede Abbildung $T : \Omega \to [0, \infty]$ sind die folgenden Eigenschaften gleichwertig:

i) für jedes $0 \leq t < \infty$ gilt $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$;

ii) für jedes $0 < t < \infty$ gilt $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

b) Für jede Abbildung $T : \Omega \to [0, \infty]$ und jedes Ereignis in $A \in \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$ sind gleichwertig:

i) für jedes $0 \leq t < \infty$ gilt $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$;

ii) für jedes $0 < t < \infty$ gilt $A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Beweis: Sei $T : \Omega \to [0, \infty]$ eine Abbildung. Setzt man die Eigenschaft a)i) voraus, so schreibt man für festes $t > 0$ mit geeignetem $m \in \mathbb{N}$

$$\{T < t\} = \bigcup_{n\geq m} \underbrace{\{T \leq t - \frac{1}{n}\}}_{\in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$$

und erhält a)ii). Setzt man a)ii) voraus, so gilt für festes $t \geq 0$

$$\{T \leq t\} \;=\; \bigcap_{n \geq m} \{T < t + \frac{1}{n}\} \quad \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}}$$

bei beliebig grossem $m \in I\!N$, also wegen der vorausgesetzten Rechtsstetigkeit der Filtration $I\!F$

$$\{T \leq t\} \;\in\; \bigcap_{m} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}} \;=\; \bigcap_{r>t} \mathcal{F}_r \;=\; \mathcal{F}_t \,.$$

Dies ist a)i). Den Beweis von b) führt man mit analogen Argumenten. □

13.26' Bemerkung: Gilt $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für jedes $0 \leq t < \infty$, so ist das System

$$\{\, A \in \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t \,:\, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \;\text{ für alle }\; t \in [0,\infty) \,\}$$

eine σ-Algebra. Der Beweis geht analog zum zeitdiskreten Fall genau wie in Bemerkung 11.10 b).

13.27 Definition: Auf $(\Omega, \mathcal{A})$ versehen mit einer *rechtsstetigen* Filtration $I\!F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$:

a) Eine *$I\!F$-Stopzeit* ist eine Abbildung $T : \Omega \to [0,\infty]$ mit den Eigenschaften i) *oder* ii) aus 13.26 a).

b) Für eine $I\!F$-Stopzeit T definiere die *Vergangenheit bis zur Zeit* T als die σ-Algebra aller Ereignisse $A \in \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ mit den Eigenschaften i) *oder* ii) aus 13.26 b):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T \;&:=\; \{\, A \in \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t \,:\, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \;\text{ für alle }\; t \in [0,\infty) \,\} \\ &=\; \{\, A \in \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t \,:\, A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \;\text{ für alle }\; t \in (0,\infty) \,\} \,. \end{aligned}$$

Wir betonen: die in 13.27 gegebene Definition der Vergangenheit bis zur Zeit T beruht wesentlich auf der Rechtsstetigkeit der Filtration $I\!F$: ohne diese würde die zweite Formelzeile in 13.27 b) ein anderes System beschreiben als die erste, und 13.26 a)i) eine andere Klasse von Abbildungen $T : \Omega \to [0,\infty]$ als 13.26 a)ii) (siehe dazu Dellacherie und Meyer, Band I 1975, Kapitel IV, IV.3.49 und IV.3.52). Nur unter der Voraussetzung der Rechtsstetigkeit sind die beiden hier gegebenen Darstellungen äquivalent. Das folgende Beispiel zeigt, wo die Schwierigkeit liegt:

13.28 Beispiel: Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Wir setzen voraus, dass die Pfade von X sämtlich rechtsstetig sind.

a) Betrachte zwei Filtrationen $I\!F^0 = (\mathcal{F}^0_t)_{t \geq 0}$ und $I\!F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ in $\mathcal{A}$, definiert durch

$$\mathcal{F}^0_t \;:=\; \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t) \,, \quad \mathcal{F}_t \;:=\; \bigcap_{r>t} \mathcal{F}^0_r \;=\; \bigcap_{r>t} \sigma(X_s : 0 \leq s \leq r) \,, \quad t \geq 0 \,.$$

$I\!F_0$ ist die Geschichte von X gemäss 11.3', und $I\!F$ ist die kleinste rechtsstetige Filtration, an die der Prozess X adaptiert ist. Man nennt $I\!F$ die *von X erzeugte rechtsstetige Filtration.*

b) Für jedes $a > 0$ ist die *level crossing Zeit*

$$T_a := \inf\{t > 0 : X_t > a\} \quad (\text{mit Konvention } \inf \emptyset = \infty)$$

eine $I\!F$-Stopzeit, jedoch nicht notwendig eine $I\!F^0$-Stopzeit. Dies sieht man so. Für jedes $t \geq 0$ gilt

$$(+) \qquad \omega \in \{T_a \leq t\} \iff \sup_{0 \leq s \leq t + \frac{1}{m}} X_s(\omega) > a \quad \text{für beliebig grosse } m \in I\!N$$

(wegen der vorausgesetzten Rechtsstetigkeit aller Pfade von X ist das 'sup ...' auf der rechten Seite in (+) als Supremum über abzählbar viele rationale s eine wohldefinierte Zufallsvariable). Wegen (+) und Rechtsstetigkeit von $I\!F$ gehört das Ereignis $\{T_a \leq t\}$ zur σ-Algebra $\bigcap_m \mathcal{F}^0_{t+\frac{1}{m}} = \mathcal{F}_t$, für jedes $t \geq 0$: damit ist T_a eine $I\!F$-Stopzeit. Ohne den Blick 'infinitesimal über t hinaus' kann jedoch für Prozesse mit stetigen Pfaden i.a. nicht entschieden werden, ob ein $\omega \in \Omega$ mit den Eigenschaften

$$X_s(\omega) < a \text{ für } 0 \leq s < t\,, \quad X_t(\omega) = a$$

dem Ereignis $\{T_a \leq t\}$ zuzuordnen ist oder nicht. Daher ist T_a i.a. keine $I\!F^0$-Stopzeit. □

13.29 Satz: Auf $(\Omega, \mathcal{A})$ versehen mit einer *rechtsstetigen* Filtration $I\!F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ betrachte $I\!F$-Stopzeiten $T, T_1, T_2, \ldots$ Dann gilt:

a) Jede $I\!F$-Stopzeit T ist eine $\mathcal{F}_T$-messbare Abbildung von Ω nach $[0, \infty]$.

b) Aus $T_1 \leq T_2$ folgt $\mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$.

c) $T_1 \wedge T_2$, $T_1 \vee T_2$, $\inf_{m \geq 1} T_m$, $\sup_{m \geq 1} T_m$ sind $I\!F$-Stopzeiten.

d) Für jede fallende Folge $T_n \downarrow T$ von $I\!F$-Stopzeiten gilt $\mathcal{F}_T = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$.

Beweis: a) zz ist

$$\{T \leq a\} \in \mathcal{F}_T \quad \text{für alle } 0 \leq a < \infty.$$

Nach Def. von $\mathcal{F}_T$ ist dazu nachzuweisen

$$\{T \leq a\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{für alle } 0 \leq t < \infty.$$

Da T $\mathcal{F}$-SZ:

$$\{T \leq a\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq a \wedge t\} \in \mathcal{F}_{a \wedge t} \subset \mathcal{F}_t.$$

b) Sei $T_1 \le T_2$, sei $A \in \mathcal{F}_{T_1}$ bel. Zum Nachw. von $A \in \mathcal{F}_{T_2}$ ist zz.

$$A \cap \{T_2 \le t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall\ 0 \le t < \infty .$$

wegen $T_1 \le T_2$:

$$A \cap \{T_2 \le t\} = \overbrace{\left(A \cap \{T_1 \le t\}\right)}^{\in \mathcal{F}_t \text{ da } A \in \mathcal{F}_{T_1}} \cap \underbrace{\{T_2 \le t\}}_{\in \mathcal{F}_t \text{ da } T_2\ \mathbb{F}\text{-St}} \in \mathcal{F}_t .$$

c) Betrachte zuerst $\sup\limits_{m \ge 1} T_m =: T$.

Da T_m $\mathbb{F}$-St: $\{T_m > t\} = \{T_m \le t\}^c \in \mathcal{F}_t$. Dann für

$$T := \sup_m T_m : \quad \{T > t\} = \bigcup_m \{T_m > t\} \in \mathcal{F}_t .$$

Betr. nun $\inf\limits_{m \ge 1} T_m$: da T_m $\mathbb{F}$-St, da $\mathbb{F}$ rechtsstetig:

$$(*) \qquad T := \inf_{m \ge 1} T_m : \quad \{T < t\} = \bigcup_m \{T_m < t\} \in \mathcal{F}_t .$$

Also sind $\inf T_m$, $\sup T_m$ $\mathbb{F}$-St, damit erst recht $T_1 \wedge T_2$, $T_1 \vee T_2$. (Beachte: ohne Rechtsstetigkeit der Filtration wäre $\inf\limits_m T_m$ i.a. keine $\mathbb{F}$-St).

d) Betr. $\mathbb{F}$-St $T_n, n \ge 1, T$, sei $T_n \downarrow T$.

Nach b) gilt $\mathcal{F}_T \subset \bigcap\limits_n \mathcal{F}_{T_n}$.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion '⊃' betrachte ein Ereignis $A \in \bigcap\limits_n \mathcal{F}_{T_n}$. Aus $T_n \downarrow T$ folgt

$$A \cap \{T < t\} = A \cap \left(\bigcup_m \bigcap_{n \ge m} \{T_n < t\} \right) = \bigcup_m \bigcap_{n \ge m} \left(A \cap \{T_n < t\} \right) \quad \in \mathcal{F}_t$$

für jedes $t > 0$. Nach 13.27 gehört A damit zur σ-Algebra $\mathcal{F}_T$ der Vergangenheit bis zur Zeit T (auch dieser Schluss nutzt die Rechtstetigkeit von $\mathbb{F}$ aus). □

— von II.5 —

Das folgende (→ 2.22 bringt allgemeinere Aussage mit deutlich schwierigerem Beweis) sei hier eine Übungsaufgabe zum Selbststudium:

24.4.20

13.30 Satz: Betrachte auf $(\Omega, \mathcal{A})$ eine rechtsstetige Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter (siehe 11.3) reellwertiger stochastischer Prozess mit rechtsstetigen Pfaden. Für jede $\mathbb{F}$-Stopzeit T ist der *Zustand von X zur Zeit T*, definiert durch

$$X_T(\omega) \;:=\; 1_{\{T<\infty\}}(\omega)\, X(\,T(\omega), \omega\,)\;, \quad \omega \in \Omega$$

mit Schreibweise $X(t,\omega)$ für $X_t(\omega)$, eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable $\Omega \to \mathbb{R}$.

Bemerkung: Beachte wieder: die hier gegebene Definition impliziert

$$X_T \;:=\; 0 \quad \text{auf} \quad \{T = \infty\}$$

und bezieht sich explizit auf einen Prozess, dessen Indexmenge den Punkt $+\infty$ nicht enthält.

Beweis: 1) Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetig, sei T eine $\mathbb{F}$-Stopzeit. Definiere zu T eine Folge

$$T_n \;:=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{2^n}\, 1_{\{\frac{k-1}{2^n}\leq T<\frac{k}{2^n}\}} \;+\; \infty\, 1_{\{T=\infty\}}\;, \quad n \geq 1\,.$$

Wegen $\{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$ sind die T_n $\mathbb{F}$-Stopzeiten, $n \in \mathbb{N}$, und nach Konstruktion gilt

$$T \;<\; T_n \;\text{ auf }\; \{T<\infty\}\;,\; n\geq 1\;, \quad \{T_n = \infty\} = \{T=\infty\}\;,\; n \geq 1\;, \quad T_n \downarrow T\;,\; n\to\infty\,.$$

2) Fixiere $n \in \mathbb{N}$. Da T_n eine $\mathbb{F}$-Stopzeit ist, die nur abzählbar viele Werte im Gitter $\frac{1}{2^n}\overline{\mathbb{N}_0}$ annimmt, gelten die folgenden Aussagen i)–iii):

i) T_n ist eine Stopzeit bezüglich der diskreten Filtration $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ im Sinne der Definition 11.9. Offenkundig hat man insbesondere $\{T_n \leq \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

ii) Der Begriff der 'Vergangenheit bis zur Zeit T_n' bleibt derselbe, ob er nun 'diskret' bezüglich $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ nach Definition 11.9 b) oder 'zeitstetig' bezüglich $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ im Sinne von 13.27 verstanden wird. Nach Definition in 13.27 b) ist die Vergangenheit bis zur Zeit T_n bezüglich der zeitstetigen Filtration $\mathbb{F}$ die σ-Algebra

$$\mathcal{F}_{T_n} \;=\; \{\, A \in \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t \;:\; A\cap\{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \text{ für jedes } t\geq 0 \,\}\;;$$

diese stimmt aber überein mit

$$\{\, A \in \bigvee_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \;:\; A\cap\{T_n \leq \frac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \ \text{ für jedes } k\in\mathbb{N}_0 \,\}\,,$$

d.h. mit der σ-Algebra, die in 11.9 als Vergangenheit bis zur Zeit T_n bezüglich der zeitdiskreten Filtration $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eingeführt worden war.

iii) Für den Zustand des Prozesses X zur Zeit T_n stimmt die in der Formulierung des zu beweisenden Satzes gegebene Definition überein mit der 'zeitdiskreten' Definition aus 11.13. Nach Voraussetzung ist X adaptiert an $\mathbb{F}$, damit ist insbesondere der Prozess in diskreter Zeit $(X_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert an $(\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N}_0}$. Die Stopzeit T_n nimmt alle ihre Werte im Gitter $\frac{1}{2^n}\overline{\mathbb{N}_0}$ an. Satz 11.13 definiert den Zustand von $(X_{\frac{k}{2^n}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ zur Zeit T_n als $\mathcal{F}_{T_n}$-messbare Zufallsvariable

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} X_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\, 1_{\{T_n=\frac{k}{2^n}\}}(\omega)\,,\quad \omega\in\Omega$$

die auf $\{T_n=\infty\}$ den Wert 0 annimmt. Dies kann geschrieben werden als

$$1_{\{T_n<\infty\}}(\omega)\, X(\,T_n(\omega),\omega\,) \;=\; X_{T_n}(\omega) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}_0} X_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\, 1_{\{T_n=\frac{k}{2^n}\}}(\omega)\,,\quad \omega\in\Omega\,.$$

wie in der Formulierung des zu beweisenden Satzes. Dabei gilt $\{T_n=\infty\}=\{T=\infty\}$ für jedes n.

3) Da die Folge $(T_n)_n$ gegen T absteigt und da alle Pfade von X rechtstetig sind, hat man

$$X_T \;=\; \lim_{n\to\infty} X_{T_n} \quad \text{ist messbar bezüglich} \quad \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}\,.$$

Wegen der Rechtsstetigkeit von $\mathbb{F}$ gilt aber $\bigcap_n \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_T$ nach 13.29 d). Also ist X_T eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable. □