

Kap. II : Stopzeiten

A. Stopzeiten und vorhersehbare Stopzeiten:

stochastische Intervalle 2.1

Stopzeiten und stochastische Intervalle 2.2–2.6

vorhersehbare Stopzeiten 2.7–2.8

Ankündigende Folgen für vorhersehbare Stopzeiten 2.9–2.10

B. Drei tiefere Sätze unter 'üblichen Hypothesen', ohne Beweis / mit Referenz:

der erste Satz: Projektionssatz 2.11

der Beginn einer progressiven Menge ist eine Stopzeit 2.12

Charakterisierung vorhersehbarer Stopzeiten 2.13

der zweite Satz: Dellacheries Satz über die vorhersehbaren / die optionalen Schnitte 2.14

der dritte Satz: Existenz ankündigender Folgen für vorhersehbare Stopzeiten 2.15

C. Vergangenheit vor T :

die σ -Algebra der Vergangenheit bis zur Zeit T 2.16

die σ -Algebra der Vergangenheit strikt vor T 2.17

Rechenregeln und Monotonieeigenschaften 2.18–2.21

Zustand eines progressiven Prozesses zur Zeit T 2.22

Zustand eines vorhersehbaren Prozesses zur Zeit T 2.23

weitere Rechenregeln 2.24–2.25

D. Zerlegung von Stopzeiten:

erreichbare und völlig unerreichbare Stopzeiten 2.26

Zerlegungssatz 2.27

E. Stopzeiten und cadlag-Prozesse:

Ausschöpfen der Sprünge eines cadlag-Prozesses 2.27'–2.30

Ausschöpfen der Sprünge eines vorhersehbaren Prozesses 2.31

II. Stoppzeiten

zu II.20

- Dellacherie-Meyer III 1975 Chapt IV, III 1980 Complements + to Chapt. IV
- Métivier 1981
- Brémard 1981 App. A1 + A2, Dellacherie 1972

A. Stoppzeiten und vorhersehbare Stoppzeiten

2.1 Def: Seien U, V Abb. $\mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, $U \leq V$. Setze

$$[U, V] := \{ (t, \omega) \in \overline{\mathbb{R}^+} \times \mathcal{X} : U(\omega) \leq t < V(\omega) \}$$

und definiere analog $]U, V[$, $]U, V[$, \dots , nenne

$$[U] := [U, U]$$

Graph von U . Beachte: dies sind TM von $\overline{\mathbb{R}^+} \times \mathcal{X}$, auch wenn U, V den Wert $+\infty$ annehmen!

2.2 Def: Auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ nenne jede Abb.

$T: \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ mit Eigenschaft

$$(+) \quad \forall t \geq 0 : \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

eine \mathbb{F} -SZ.

Wahr (\rightarrow Vorwissen zu Kap II) ist \mathbb{F} rechtsstetig, so ist (+) äquivalent zu

$$\forall t \geq 0 : \{T < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

insbes: mit $(T_n)_n$ sind $\inf T_n, \sup T_n$ \mathbb{F} -Stoppzeiten. eigentliche Rechtsstetigkeit von \mathbb{F} !!

Ab jetzt betrachten wir Stoppzeiten unter der Generalvoraussetzung

2.3 Generalvoraussetzung: \mathbb{F} ist rechtsstetig.

2.4 Satz: Sei $T: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ eine Abb., \mathbb{F} fs.

a) Gleichwertig:

i) T ist \mathbb{F} -SZ

ii) $[0, T] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$

iii) $[0, T[\in \mathcal{O}(\mathbb{F})$

b) Ist T eine \mathbb{F} -SZ, so sind alle stochastischen Intervalle

$[0, T[$, $[0, T]$, $[T]$, $[T, \infty[$, $[T, \infty[$

Elemente von $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ (d.h. Stopped \Rightarrow optional) sind

Bew: a) Betrachte mod. T.M.Z. $X := 1_{[0, T]}$, $Y := 1_{[0, T[}$.

Dann gilt für jedes feste t

$\{X_t = 0\} = \{T < t\}$, $\{Y_t = 0\} = \{T \leq t\}$.

Da \mathbb{F} rechtsstetig:

(x) T \mathbb{F} -SZ $\Leftrightarrow X$ \mathbb{F} -adaptiert $\Leftrightarrow Y$ \mathbb{F} -adaptiert.

Vollständige und optimale Prozesse sind adaptiert (1.12).

Da X linksstetig, zeigen (x) und 1.16

T \mathbb{F} -SZ $\Rightarrow X$ ist \mathbb{F} -v.s. $\Leftrightarrow \{X=1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$
 $\stackrel{1.7}{\Rightarrow} X$ ist \mathbb{F} -adaptiert $\stackrel{(x)}{\Rightarrow} T$ \mathbb{F} -SZ.

Also ' \Leftrightarrow ' überall,

aber $\{X=1\} = [0, T]$. Da Y optional, zeigen (x) und 1.16)

T \mathbb{F} -SZ $\Rightarrow Y$ ist \mathbb{F} -optimal $\Leftrightarrow \{Y=1\} \in \mathcal{O}(\mathbb{F})$
 $\stackrel{1.7}{\Rightarrow} Y$ ist \mathbb{F} -adaptiert $\stackrel{(x)}{\Rightarrow} T$ \mathbb{F} -SZ.

Also ' \Leftrightarrow ' überall,

aber $\{Y=1\} = [0, T[$. Das zeigt a).

b) Aus a) wegen $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{F})$. □

2.5 ÜA: zeige neu, daß $\sup_n T_n$ eine \mathbb{F} -SZ ist

$$T_n \mathbb{F}\text{-SZ, } n \geq 1 \Rightarrow \llbracket 0, T_n \rrbracket \in \mathcal{O}(\mathbb{F}) \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \llbracket 0, \sup_n T_n \rrbracket = \bigcup_n \llbracket 0, T_n \rrbracket \in \mathcal{O}(\mathbb{F}).$$

zeige neu, daß $\inf_n T_n$ eine \mathbb{F} -SZ ist (\mathbb{F} r.s., z.S.)

$$T_n \mathbb{F}\text{-SZ, } n \geq 1 \Rightarrow \llbracket T_n, \infty \rrbracket \in \mathcal{B}(\mathbb{F}) \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \llbracket \inf_n T_n, \infty \rrbracket = \bigcup_n \llbracket T_n, \infty \rrbracket \in \mathcal{B}(\mathbb{F}). \quad \square$$

2.6 Satz: Sei \mathbb{F} r.s., sei $(E, \mathcal{B}(E))$ bel. metr. RM, $G \subseteq E$ offen.

Sei X \mathbb{F} -adapt. stoch. Prozess w.w. in $(E, \mathcal{B}(E))$, entweder:

alle γ -Pfade von X rechtsstetig; oder: alle γ -Pfade von X linksstetig.

Dann ist

$$T := \inf \{ s > 0 : X_s \in G \} \quad (\text{if } \emptyset = \infty)$$

eine \mathbb{F} -SZ.

Bew: zz ist $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ für $0 < t < \infty$ (\mathbb{F} r.s.), aber

$$\{T < t\} = \bigcup_{s < t} \{X_s \in G\} = \bigcup_{\substack{r < t \\ \text{recht} \\ \text{stet}}} \{X_r \in G\} \in \mathcal{F}_t$$

wegen rechtsstet./linksstet. aller γ -Pfade, \mathcal{F} und G offen. \square

2.6' Bsp: Sei X reellwert., \mathbb{F} -adaptiert, alle γ -Pfade stetig und wachsend.

Dann ist für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$T_a := \inf \{ s > 0 : X_s \geq a \} \quad (\text{if } \emptyset = \infty)$$

eine \mathbb{F} -SZ.

Bew: Da alle γ -Pfade rechtsstetig + wachsend, gilt

$$\{T \leq t\} = \{X_t \geq a\} \in \mathcal{F}_t, \quad 0 \leq t < \infty. \quad \square$$

2.7 Satz: Sei $T: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ eine Abbildung, $\# \in \mathcal{A}$, dann sind äquivalent:

- i) $\llbracket 0, T \rrbracket \in \mathcal{P}(\#)$
- ii) T ist $\#$ -SZ, und $\llbracket T \rrbracket \in \mathcal{P}(\#)$.

2.4 T SZ
 $\Leftrightarrow \llbracket 0, T \rrbracket \in \mathcal{P}(\#)$

Bew: genau wie in Bew. 2.4: Wenn $\llbracket 0, T \rrbracket \in \mathcal{P}(\#) \subset \mathcal{O}(\#)$, so ist T $\#$ -SZ, und $\llbracket T \rrbracket = \llbracket 0, T \rrbracket \setminus \llbracket 0, T \rrbracket \in \mathcal{P}(\#)$.
 \checkmark 2.4: immer in $\mathcal{P}(\#)$

2.8 Def: Sei T ein $\#$ -SZ, $\# \in \mathcal{A}$. Dann heißt T $\#$ -vnlieblich falls gilt
 $\llbracket 0, T \rrbracket \in \mathcal{P}(\#)$.

2.8 Def
vnlieblich

in allen Fällen sind wegen 2.4 alle Prod. $\llbracket 0, T \rrbracket, \llbracket 0, T \rrbracket, \llbracket T \rrbracket, \llbracket T, \infty \rrbracket, \llbracket T, \infty \rrbracket \in \mathcal{P}(\#)$.

2.8' HS: sind $T_i, i \in \mathbb{N}$, $\#$ -vnlieblich, $\# \in \mathcal{A}$; so sind auch

- i) $T_1 \wedge T_2, T_1 \vee T_2$
- ii) $T := \sup_i T_i$
 $\#$ -vnlieblich. (i.g. aber nicht $\sup_i T_i$!)

Bew: Beachte mit 2.7
 $\llbracket 0, T_1 \wedge T_2 \rrbracket = \llbracket 0, T_1 \rrbracket \wedge \llbracket 0, T_2 \rrbracket$
 $\llbracket 0, T_1 \vee T_2 \rrbracket = \llbracket 0, T_1 \rrbracket \vee \llbracket 0, T_2 \rrbracket$.

Mit i) sind auch $T_1 \vee \dots \vee T_n$ und $T_1 \wedge \dots \wedge T_n$ $\#$ -vnlieblich, dann auch
 $\llbracket 0, T \rrbracket = \bigcup_n \llbracket 0, \tilde{T}_n \rrbracket$
 $\tilde{T}_n := T_1 \vee \dots \vee T_n, n \in \mathbb{N}$

wegen $\llbracket 0, \tilde{T}_n \rrbracket \in \mathcal{P}(\#)$ für, und $\tilde{T}_n \uparrow T = \sup_i T_i$.
 \square