Reinhard Höpfner, VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

April 22, 2020

Kap. II : Stopzeiten

II. Stoppzeiten

→ Dellacherie–Meyer Bd I 1975 Chapt. IV, Bd II 1980 Complements to Chapt. IV
→ Métivier 1981
→ Brémaud 1981 App. A1 + A2, Dellacherie 1972

24.11.20

A. Stoppzeiten und vorhersehbare Stoppzeiten

2.1 Def: Seien U, V Abb. $\Omega \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $U \le V$. Setze

$$\llbracket U,V \llbracket := \{ (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega : U(\omega) \le t < V(\omega) \}$$

und definiert analog $\rrbracket U,V \rrbracket$, $\rrbracket U,V \llbracket$, ..., nenne

$$\llbracket U \rrbracket := \llbracket U,U \rrbracket$$

Graph von U. Beachte: dies sind TM von $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, auch wenn U,V den Wert $+\infty$ annehmen!

2.2 Def: Auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0})$ nenne jede Abb. $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mit Eigenschaft

$(+)$ $\quad \forall t \ge 0 : \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t$

eine $\mathbb{F}$-SZ.

Wenn (→ Vorspann zu Kap. II) ist $\mathbb{F}$ rechtsstetig, so ist $(+)$ äquivalent zu

$$\forall t > 0 : \{T < t\} \in \mathcal{F}_t .$$

insbes.: mit $(T_n)_n$ sind $\inf T_n$, $\sup T_n$ $\mathbb{F}$-Stoppzeiten
erfordert Rechtsstetigkeit von $\mathbb{F}$!!

Ab jetzt betrachten wir Stoppzeiten nur unter der Generalvoraussetzung

2.3 Generalvoraussetzung: $\mathbb{F}$ ist rechtsstetig.

2.4 Satz: Sei $T: \Omega \to [0,\infty]$ eine Abb., $\mathbb{F}$ rs.

a) Gleichwertig:

i) T ist $\mathbb{F}$-St

ii) $[\![0,T]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$

iii) $[\![0,T[\![\in \mathcal{O}(\mathbb{F})$

b) Ist T eine $\mathbb{F}$-St, so sind alle stochastischen Intervalle

$$[\![0,T[\![,\ [\![0,T]\!],\ [\![T]\!],\ [\![T,\infty[\![,\ ]\!]T,\infty[\![$$

Elemente von $\mathcal{O}(\mathbb{F})$ (daher: Stoppzeit $\Leftrightarrow$ optional time)

Bew: a) Betrachte stoch. Prozesse $X := 1_{[\![0,T]\!]}$, $Y := 1_{[\![0,T[\![}$.
Dann gilt für jedes feste t

$$\{X_t = 0\} = \{T < t\}, \quad \{Y_t = 0\} = \{T \le t\}.$$

Da $\mathbb{F}$ rechtsstetig:

(x) T $\mathbb{F}$-St $\Leftrightarrow$ X $\mathbb{F}$-adaptiert $\Leftrightarrow$ Y $\mathbb{F}$-adaptiert.

Vorhersehbare und optionale Prozesse sind adaptiert (1.12).
Da X linksstetig, zeigen (x) und 1.16

$$T\ \mathbb{F}\text{-St} \Rightarrow X \text{ ist } \mathbb{F}\text{-vhs} \Leftrightarrow \{X=1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$$
$$\overset{1.7}{\Rightarrow} X \text{ ist } \mathbb{F}\text{-adapt.} \overset{(x)}{\Rightarrow} T\ \mathbb{F}\text{-St}.$$

Also '$\Leftrightarrow$' überall,
aber $\{X=1\} = [\![0,T]\!]$. Da Y càdlàg, zeigen (x) und 1.11 b)

$$T\ \mathbb{F}\text{-St} \Rightarrow Y \text{ ist } \mathbb{F}\text{-optional} \Leftrightarrow \{Y=1\} \in \mathcal{O}(\mathbb{F})$$
$$\overset{1.7}{\Rightarrow} Y \text{ ist } \mathbb{F}\text{-adapt.} \overset{(x)}{\Rightarrow} T\ \mathbb{F}\text{-St}.$$

Also '$\Leftrightarrow$' überall,
aber $\{Y=1\} = [\![0,T[\![$. Das zeigt a).

b) Aus a) wegen $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{F})$. $\square$

2.5 ÜA: zeige nun, daß $\sup_n T_n$ eine $\mathbb{F}$-St ist

$$T_n\ \mathbb{F}\text{-St},\ n \geq 1 \Rightarrow [\![0, T_n[\![\ \in \mathcal{O}(\mathbb{F})\ \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow [\![0, \sup_n T_n [\![\ = \bigcup_n [\![0, T_n[\![\ \in \mathcal{O}(\mathbb{F}).$$

zeige nun, daß $\inf_n T_n$ eine $\mathbb{F}$-St ist ($\mathbb{F}$ rs, 2.3)

$$T_n\ \mathbb{F}\text{-St},\ n \geq 1 \Rightarrow]\!]T_n, \infty[\![\ \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\ \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow]\!]\inf_n T_n, \infty[\![\ = \bigcup_n]\!]T_n, \infty[\![\ \in \mathcal{P}(\mathbb{F}). \quad \square$$

2.6 Satz: sei $\mathbb{F}$ r.s., sei $(E, \mathcal{B}(E))$ bel. metr. Rm, $G \subset E$ <u>offen</u>. Sei X $\mathbb{F}$-adapt. stoch. Prozeß m. W. in $(E, \mathcal{B}(E))$, entweder: alle Pfade von X rechtsstetig; oder: alle Pfade von X linksstetig. Dann ist

$$T := \inf\{s > 0 : X_s \in G\} \qquad (\inf \emptyset = \infty)$$

eine $\mathbb{F}$-St.

Bew: zz ist $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ für $0 < t < \infty$ ($\mathbb{F}$ r.s.), aber

$$\{T < t\} = \bigcup_{s<t} \{X_s \in G\} = \bigcup_{\substack{r<t \\ r \in \mathbb{Q}^+}} \{X_r \in G\} \in \mathcal{F}_t$$

wegen rechtsstet./linksstet. aller Pfade und G offen. $\square$

2.6' Bsp: sei X reellwert., $\mathbb{F}$-adaptiert, alle Pfade càdlàg nichtfallend. Dann ist für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$T_a := \inf\{s > 0 : X_s \geq a\} \qquad (\inf \emptyset = \infty)$$

eine $\mathbb{F}$-St.

Bew: Weil alle Pfade rechtsstetig + nichtfallend, gilt

$$\{T \leq t\} = \{X_t \geq a\} \in \mathcal{F}_t, \quad 0 \leq t < \infty.$$

$\square$

2.4 T SZ $\Leftrightarrow$ $[\![0,T[\![\in \mathcal{O}(\mathbb{F})$

2.7 Satz: Sei $T:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}_+$ eine Abbildung, $\mathbb{F}$ fs, dann sind äquivalent:

i) $[\![0,T[\![\in \mathcal{P}(\mathbb{F})$

ii) T ist $\mathbb{F}$-SZ, und $[\![T]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Bew: Genau wie in Bew. 2.4: Wenn $[\![0,T[\![\in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{F})$, so ist T $\mathbb{F}$-SZ, und $[\![T]\!] = [\![0,T]\!] \setminus [\![0,T[\![\in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. □

2.4: immer in $\mathcal{P}(\mathbb{F})$

Dell-Mey Def I, Kap. IV Nr 69

2.8 Def: Sei T eine $\mathbb{F}$-SZ, $\mathbb{F}$ fs. Dann heißt T **$\mathbb{F}$-vorhersagbar** falls gilt

$$[\![0,T[\![\in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

In diesem Fall sind wegen 2.4 alle stoch. Intervalle

$$[\![0,T]\!],\ [\![0,T[\![,\ [\![T]\!],\ [\![T,\infty[\![,\ ]\!]T,\infty[\![\in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

2.8' HS: Sind T_i, $i\ge 1$, $\mathbb{F}$-vhs SZ, $\mathbb{F}$ fs, so sind auch

i) $T_1\wedge T_2$, $T_1\vee T_2$

ii) $T := \sup_i T_i$

$\mathbb{F}$-vhs SZ. (i.a. aber nicht $\inf_i T_i$!)

Bew: Betrachte mit 2.7

$$[\![0,T_1\wedge T_2[\![= [\![0,T_1[\![\cap [\![0,T_2[\![$$

$$[\![0,T_1\vee T_2[\![= [\![0,T_1[\![\cup [\![0,T_2[\![.$$

Mit i) sind auch $T_1\vee\dots\vee T_n$ und $T_1\wedge\dots\wedge T_n$ $\mathbb{F}$-vhs SZ, dann auch

$$[\![0,T[\![= \bigcup_n [\![0,\tilde{T}_n[\![$$

$$\tilde{T}_n := T_1\vee\dots\vee T_n, \quad n\in\mathbb{N}$$

wegen $[\![0,\tilde{T}_n[\![\in \mathcal{P}(\mathbb{F})\ \forall n$, und $\tilde{T}_n \uparrow T = \sup_i T_i$.

□