2.9 Def: Sei $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ eine Abbildung.

Eine Folge $(S_n)_n$ von $\mathbb{F}$-SZ heißt ankündigende Folge für T falls gilt:

$$\begin{cases} (S_n)_n \text{ aufsteigend}: & S_n(\omega) \le S_{n+1}(\omega) \quad \forall n, \forall \omega \\ \lim_n S_n = T & \\ S_n < T \text{ auf } \{T > 0\}. & \end{cases}$$

2.10 Satz: Sei $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ eine $\mathbb{F}$-SZ.

Existiert eine ankündigende Folge $(S_n)_n$ für T, $(S_n)_n$ $\mathbb{F}$-SZ, so ist T eine $\mathbb{F}$-vorhersehbare SZ.

Bew: Aus 2.7 und der Def. einer ankündigenden Folge:

$$[\![0,T[\![\; = \Big(\underbrace{\bigcup_n [\![0,S_n]\!]}_{\in \mathcal{P}(\mathbb{F}),\ 2.4} \Big) \setminus \big(\underbrace{\{0\} \times \{T=0\}}_{\in \mathcal{R}(\mathbb{F})} \big) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$$

$\square$

(Bemerke: als Voraussetzung von 2.9 gilt $S_n < \infty$ $\forall n$.)

27.4.20

Siehe unter 2.15 für eine Umkehrung dieser Aussage unter Zusatzvoraussetzungen.

2.10' Bsp: Sei $\mathbb{F}$ rs, sei $X=(X_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter reellwertiger Prozeß mit $X_0 \equiv 0$, alle Pfade stetig. Dann ist für jedes $a>0$

$$T := \inf\{r>0 : X_r \geq a\} \qquad (\inf \emptyset = +\infty)$$

eine vorhersehbare $\mathbb{F}$-SZ.

Bew: 0) vorab: wegen $X_0 \equiv 0$, $a>0$, Pfade stetig gilt $T>0$.

1) Für n hinr. groß (so daß $a-\frac{1}{n}>0$) def.

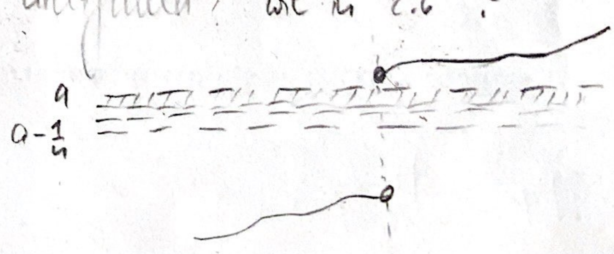
$$S_n := \inf\{r>0 : X_t > a-\tfrac{1}{n}\} \wedge n .$$

Mit 2.6 ist jedes S_n eine (beschränkte) $\mathbb{F}$-SZ. Klar $(S_n)_n$ aufsteigend. Alle Pfade von X stetig, $T>0$:

$$S_n < T \ \forall n, \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = T.$$

2) Also ist $(S_n)_n$ eine ankündigende Folge für T ($\to$ 2.9).
2.10: $T = \sup_n S_n$ ist eine vorhersehbare $\mathbb{F}$-SZ.

2.10'' ÜA: Welches Argument im Beweis bricht zusammen, wenn man in 2.10' die Vor. 'alle Pfade stetig' ersetzen würde durch 'alle Pfade càdlàg nichtfallend', wie in 2.6'?



B. Drei Sätze ohne Beweis / mit Ref.

2.11 Projektionssatz: Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Ws-Raum, sei $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^+) \otimes \mathfrak{A}$.

Def. Projektion von A auf Ω:

$$\pi(A) = \{\omega \in \Omega : \text{es ex. ein } t \geq 0 \text{ so daß } (t,\omega) \in A\}.$$

Dann gilt $\quad \pi(A) \in \overline{\mathfrak{A}}^P = \sigma(\mathfrak{A}, \mathcal{N}^P)$.

Ref: Heyer, Einf. i.d. Th. Markovscher Prozesse, 1979, S. 227 $\square$

2.12 Folgerung: Erfüllt die stoch. Basis $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{F}, P)$ die üblichen Bedingungen $(\to 1.4)$ und def. man den Beginn einer Menge $A \subset \mathbb{R}^+ \times \Omega$ durch

$$D_A(\omega) := \inf\{t \geq 0 : (t,\omega) \in A\} \qquad (\inf \emptyset = +\infty)$$

so gilt:

$$A \ \mathbb{F}\text{-progressiv} \implies D_A \text{ ist } \mathbb{F}\text{-SZ}.$$

Bew: Da A $\mathbb{F}$-progressiv, gilt für jedes $t \geq 0$ für $(\to 1.11)$

$$A \cap ([0,t] \times \Omega) \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t.$$

Für $r > 0$ betrachte Folge $t_n \uparrow r$, dann gilt auch*

$$A \cap ([0,r[\times \Omega) = \bigcup_n (A \cap [0,t_n] \times \Omega) \in \mathcal{B}([0,r]) \otimes \mathcal{F}_r$$

zusammen mit

$$\{D_A < r\} = \pi(A \cap ([0,r[\times \Omega)).$$

Nach Projektionssatz wegen übl. Hyp. an $\mathbb{F}$:

$$\{D_A < r\} \in \sigma(\mathcal{F}_r, \mathcal{N}^P) \overset{\text{üH}}{=} \mathcal{F}_r \quad \forall r > 0.$$

Also ist D_A $\mathbb{F}$-SZ. $\square$

---

* Beachte: $[\![D_A]\!]$ ist i.a. nicht in A enthalten!

2.13 Satz: üsl. Hyp. an $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{F}, P)$, sei $T: \Omega \to [0,\infty]$ eine Abb., dann gilt:

DCl 72 T15 S.74

i) $[\![T]\!] \in \mathcal{O}(\mathbb{F}) \iff T$ ist $\mathbb{F}$-SZ

ii) $[\![T]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \iff T$ ist $\mathbb{F}$-vorhersehbare SZ.

29.04.20

Bew: '$\Leftarrow$' ist schon bekannt (2.4, 2.8), zeige '$\Rightarrow$' unter üs.H.

i) Ist $[\![T]\!] \in \mathcal{O}(\mathbb{F})$, so $[\![T]\!] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F})$, so für $t \geq 0$ gilt

$$[\![T]\!] \cap ([0,t] \times \Omega) \quad \in \quad \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$$

dann mit Projektionssatz:

$$\{T \leq t\} = \pi([\![T]\!] \cap ([0,t] \times \Omega)) \in \sigma(\mathcal{F}_t, N^P) \overset{\text{ü.H.}}{=} \mathcal{F}_t .$$

Also ist T eine $\mathbb{F}$-SZ.

ii) Sei $[\![T]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. i) und $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{F})$ impl: T ist $\mathbb{F}$-SZ.

Dann nach 2.4 zugleich $[\![0,T]\!]$ und $[\![T]\!]$ in $\mathcal{P}(\mathbb{F})$,

also auch $[\![0,T[\![\in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. 2.7: T ist vhs. $\square$

2.14 Satz über die vorhersehbaren / über die optionalen Schnitte:

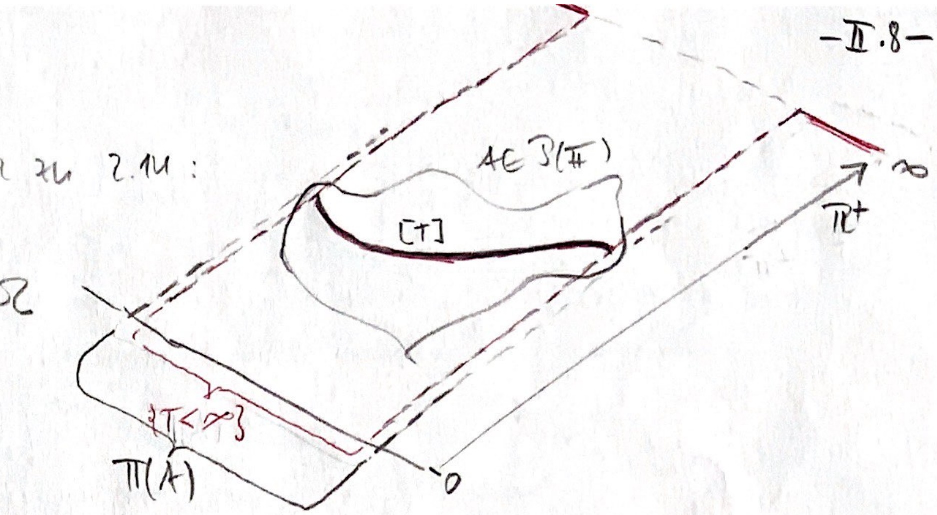
Vor: üsl. Hyp (→1.4). Für jedes $A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ / jedes $A \in \mathcal{O}(\mathbb{F})$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine $\mathbb{F}$-vorhersehbare SZ / eine $\mathbb{F}$-Stoppzeit so daß gilt:

i) $[\![T]\!] \subset A$

ii) $P(T < \infty) \geq P(\pi(A)) - \varepsilon$.

Ref: Dellacherie 1972, Thm 10 S.72;
Dellacherie-Meyer Bd I Kap IV: Thm 84+85 S. 219-220.

Illustration zu 2.14:



2.15 Satz: Übl. Hyp. an $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{F}, P)$, sei T $\mathbb{F}$-SZ.

Gleichwertig:

i) T ist $\mathbb{F}$-vorhersehbar

ii) für T ex. eine ankündigende Folge $(S_n)_n$.

Bem: 1) Dellacherie 1972 unter übl. Hyp.:

- Def. D36 S. 56 definiert $\mathbb{F}$-vhs Zeiten über Existenz einer ankündigenden Folge ('$\mathbb{F}$-announcable')
- Def. D2 S. 67 und T4 S. 68 bestimmen $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ als die von den folgenden Tmn von $\mathbb{R}^+\times\Omega$

$$\begin{cases}]]S,T]] & : \; S \le T \text{ sind bel. } \mathbb{F}\text{-SZ} \\ [0]\times A & : \; A \in \mathcal{F}_0 \end{cases}$$

erzeugte σ-Algebra, das aber ist die von der Klasse aller vhs RE erzeugte σ-Algebra: für $s<t$ und $F \in \mathcal{F}_s$

$$S := s1_F + \infty 1_{F^c}, \quad T := t1_F + \infty 1_{F^c}, \quad]]S,T]] = (]s,t]\times F)$$

- Thm T15 S. 74 zeigt ($\to$ 2.13 ii) unter übl. Hyp.)

T $\mathbb{F}$-announcable $\Longleftrightarrow$ $[[T]] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

→ 2) Dellacherie+Meyer Bd I Kap. IV Thm 77 S. 211, siehe auch Jacod-Shiryaev S. 19. □

2.15' ÜA: zeige: $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ wird erzeugt von Mengensystem

$$\left\{ \begin{array}{l}]\!]S,T]\!] : S \le T \text{ bel. } \mathbb{F}\text{-SZ} \\ \{0\} \times F, \; F \in \mathcal{F}_0 . \end{array} \right.$$

(→ Ü-Blatt 2, Aufg. 2.2)