Reinhard Höpfner, Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Einige Übungsaufgaben zu Kapitel II **May 5, 2020**

Aufgabe 2.1 : Sei $(\Omega, \mathcal{A}, I\!\!F, P)$ eine stochastische Basis.

a) Sei $\varepsilon > 0$ deterministisch, sei T eine beliebige $I\!\!F$-Stopzeit, dann ist

$$\widetilde{T} := T + \varepsilon$$

eine vorhersehbare $I\!\!F$-Stopzeit.

b) Für $F \in \mathcal{F}_0$ konstruiere man eine $I\!\!F$-Stopzeit S mit der Eigenschaft

$$S \text{ ist } I\!\!F\text{-vorhersehbar} \quad , \quad [[S]] \;=\; [0] \times F \;.$$

c) Für $0 \le s < t$, $F \in \mathcal{F}_s$ und $R :=]s,t] \times F$ betrachte man den Anfang

$$D_R(\omega) \;:=\; \inf\{t \ge 0 : (t,\omega) \in R\}$$

des vorhersehbaren Rechtecks R und zeige: auch ohne übliche Hypothesen ist D_R eine $I\!\!F$-Stopzeit.

d) Für das vorhersehbare Rechteck aus c) finde man eine vorhersehbare $I\!\!F$-Stopzeit T mit

$$]]D_R, T]] \;=\; R \;.$$

Aufgabe 2.2 : Sei $(\Omega, \mathcal{A}, I\!\!F, P)$ eine stochastische Basis. Betrachte das System

$$\mathcal{H} \;:=\; \{\;]]S,T]] :\; S,T \text{ beliebige } I\!\!F\text{-Stopzeiten, } S \le T \;\} \bigcup \{[0] \times F : F \in \mathcal{F}_0\}$$

von Teilmengen von $I\!\!R^+ \times \Omega$ und zeige:

$$\sigma(\mathcal{H}) \;=\; \mathcal{P}(I\!\!F) \;.$$

Hinweis: man benutzte Aufgabe 2.1 c)+d).

Aufgabe 2.3 : Auf demselben Grundraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien Prozesse

$$N^{(i)} = (N^{(i)}_t)_{t\ge 0} \text{ Standard-Poisson (Def. 13.14 aus der Stochastik II)}, \;\; i \in I\!\!N_0,$$

$$B = (B_t)_{t\ge 0} \text{ Standard-Brownsche Bewegung (Def. 13.9 aus der Stochastik II)}$$

gegeben und unabhängig unter P. Als Filtration in $\mathcal{A}$ definiere man

$$I\!\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \quad , \quad \mathcal{F}_t \ := \bigcap_{r>t} \sigma\left(B_s \, , \, N_s^{(i)} \, , \, i \in I\!\!N_0 \ : \ 0 \leq s \leq r \right) \ .$$

Für $M \in I\!\!N$ beliebig gross aber fest (zum Beispiel $M := 10^{10^{137}}$) betrachte man den Prozess

$$X = (X_t)_{t\geq 0} \quad , \quad X(t,\omega) \ := \sum_{i=0}^{M} 2^{-i} \, N^{(i)}(t,\omega)$$

zusammen mit dem Prozess seiner linken Limiten

$$X^-(t,\omega) \ := \ \lim_{\substack{s\uparrow t \\ s<t}} X(s,\omega)$$

und definiere

$$\Delta X \ := \ X \ - \ X^- \ .$$

Man beweise die folgenden Aussagen.

a) Die Zeit $T_\ell^{(i)}$ des ℓ-ten Sprunges von $N^{(i)}$ ist eine $I\!\!F$-Stopzeit.

b) Für $I\!\!F$-Stopzeiten $S \leq T$ gilt

$$1_{]]S\,,T]]}\, B \quad \text{ist ein } I\!\!F\text{-vorhersehbarer stochastischer Prozess .}$$

c) Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen aus b) $S > 0$ und existiert eine ankündigende Folge $(S_n)_n$ für S, so gilt auch

$$1_{[[S\,,T]]}\, B \quad \text{ist ein } I\!\!F\text{-vorhersehbarer stochastischer Prozess .}$$

d) Man zeige: X und BX sind $I\!\!F$-optionale Prozesse, X^- und

$$Y := B\,X^- \quad , \quad Y(t,\omega) := B(t,\omega)\, X^-(t,\omega)$$

sind $I\!\!F$-vorhersehbare Prozesse.

e) Der Prozess ΔX ist $I\!\!F$-optional. Für geeignet zu definierende $I\!\!F$-Stopzeiten stelle man

$$\{\Delta X \neq 0\} \ \in \ \mathcal{O}(I\!\!F)$$

als abzählbare Vereinigung von Stopzeitgraphen dar. Auch ohne 'übliche Hypothesen' ist der Anfang D_A von $A := \{\Delta X \neq 0\}$ eine $I\!\!F$-Stopzeit.

f) Man mache sich klar, wie der $I\!\!F$-optionale Prozess

$$Z := B \ \Delta X \quad , \quad Z(t,\omega) := B(t,\omega)\, (\Delta X)(t,\omega)$$

aussieht (Hinweis: 13.30 im Vorspann zu Kapitel 2).

Aufgabe 2.4 : Mit allen Voraussetzungen und Notationen aus Aufgabe 2.3:

a) Für M und X wie in Aufgabe 2.3 definiert zeige man: der Anfang D_A von $A := \{\Delta X \neq 0\}$ ist eine strikt positive $I\!\!F$-Stopzeit mit

$$P\,(\,D_A \leq \varepsilon\,) \;=\; 1 - e^{-M\,\varepsilon} \quad , \quad \varepsilon > 0\;.$$

Zur Zeit des ersten Sprunges von X wird jede der möglichen Sprunghöhen 2^{-i}, $1 \leq i \leq M$, mit derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{M}$ eintreten.

b) Indem man jeden der Prozesse $N^{(i)}$, $i \in I\!\!N_0$, zur Zeit seines ersten Sprunges einfriert, definiere man

$$\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t)_{t\geq 0} \quad , \quad \widetilde{X}(t,\omega) \;:=\; \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}\; 1_{[[T_1^{(i)},\infty[[}(t,\omega)$$

als nichtnegativen $I\!\!F$-optionalen Prozess, ohne sich um Rechts- oder Linksstetigkeit der Pfade zu kümmern. Man überlege sich, dass der Anfang $D_{\widetilde{A}}$ von

$$\widetilde{A} \;:=\; \left\{\widetilde{X} > 0\right\} \;\in\; \mathcal{O}(I\!\!F)$$

eine $I\!\!F$-Stopzeit ist (hier braucht man keine 'üblichen Hypothesen'), und zeige:

$$P\left(D_{\widetilde{A}} = 0\right) \;=\; 1\;.$$