C. Vergangenheit von T

2.16 Def: Sei T $\mathbb{F}$-SZ. Die <u>Vergangenheit bis T</u> heißt die 6-Algebra

$$\mathcal{F}_T := \{ A \in \bigvee_t \mathcal{F}_t : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0 \}.$$

Wdh ($\to$ 13.26 b)): $\mathcal{F}_T$ ist eine 6-Alg; für $\mathbb{F}$ rechtsstetig ist diese Def. äquivalent zu

$$\mathcal{F}_T = \{ A \in \bigvee_t \mathcal{F}_t : A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t > 0 \}.$$

2.17 Def: Sei T $\mathbb{F}$-SZ. Schreibe $\mathcal{F}_{T-}$ für die von System

$$\mathcal{G}_T := \{ A \cap \{s < T\} : A \in \mathcal{F}_s, s \geq 0 \} \cup \mathcal{F}_0$$

erzeugte 6-Algebra, $\mathcal{F}_{T-}$ heißt <u>6-Alg. der Vergangenheit strikt vor T</u>.

Bem: Ist $T \equiv t_0$ eine deterministische Zeit, so $\{s < T\}$ entw. $= \Omega$ oder $= \emptyset$, damit $\mathcal{G}_T = \bigcup_{s < t_0} \mathcal{F}_s$ Erzeugendensystem für $\mathcal{F}_{T-} = \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s =: \mathcal{F}_{t_0-}$ gemäß Def. 1.3.

2.17' Wdh ($\to$ 13.29): Für $\mathbb{F}$-SZ $T, T_1, T_2, \cdots$:

a) $T : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^+}$ ist eine $\mathcal{F}_T$-mb ZV

b) $T_1 \leq T_2 \implies \mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$

c) $T_1 \wedge T_2$, $T_1 \vee T_2$, $\sup_n T_n$, $\inf_n T_n$ sind $\mathbb{F}$-SZ $\quad$ $\mathbb{F}$ rs.

d) $T_n \downarrow T$: $\mathcal{F}_T = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n}$.

$\mathbb{F}$ rs

Der folgende Satz versichert die Auss. a)–c):

2.18 Satz: Für $\mathcal{F}$-SZ $S, T, T_n, n\geq 1$:

a) $\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{F}_T$, und $T: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ ist eine $\mathcal{F}_{T-}$-mb ZV

b) $S \leq T \Rightarrow \mathcal{F}_{S-} \subset \mathcal{F}_{T-}$

c) falls $T_n \uparrow T$: $\mathcal{F}_{T-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n-} = \sigma(\mathcal{F}_{T_n-} : n \in \mathbb{N})$

Bew: a) i) Zeige $\mathcal{G}_T \subset \mathcal{F}_T$. Klar $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_T$. Betr. nun für $s \geq 0$, $A \in \mathcal{F}_s$ das Ereignis $B := A \cap \{s < T\}$ in $\mathcal{G}_T$. Dann

$$B \cap \{T \leq t\} = A \cap \{s < T \leq t\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}_0 & \text{falls } t \leq s \\ \in \mathcal{F}_t & \text{falls } t > s \end{cases}.$$

$\forall t \geq 0$. Also $B \in \mathcal{F}_T$.

ii) Zeige: T ist eine $\mathcal{F}_{T-}$-mb ZV: Da T $\mathcal{F}_T$-mb ZV und 13.29, genügt zz: $\{T > r\} \in \mathcal{F}_{T-}$ $\forall r \geq 0$, was sofort folgt aus

$$\{T > r\} = \underbrace{\Omega}_{\in \mathcal{F}_r} \cap \{r < T\} \in \mathcal{G}_T.$$

b) Wir zeigen $\mathcal{G}_S \subset \mathcal{G}_T$ für $S \leq T$. N. Def: $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{G}_T$. Betr. für $A \in \mathcal{F}_r$, $r \geq 0$, Ereignis $B := A \cap \{r < S\}$ in $\mathcal{G}_S$. Aus $S \leq T$ folgt dann

$$B = A \cap \{r < S\} = \underbrace{\underbrace{A}_{\in \mathcal{F}_r} \cap \underbrace{\{r < S\}}_{\in \mathcal{F}_r}}_{\in \mathcal{F}_r} \cap \{r < T\} \in \mathcal{G}_T.$$

c) Sei $T_n \uparrow T$. Inklusion $\bigvee_n \mathcal{F}_{T_n-} \subset \mathcal{F}_{T-}$ klar nach b).

Zum Bew. von '$\supset$' betrachte Ereignisse $B \in \mathcal{G}_T$:

$$B = A \cap \{r < T\} \quad \text{mit } A \in \mathcal{F}_r.$$

Da $T = \sup_n T_n$:

$$B = \bigcup_n \underbrace{[A \cap \{r < T_n\}]}_{\in \mathcal{G}_{T_n}} \in \bigcup_n \mathcal{G}_{T_n} \subset \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n-}.$$

Das ist c). $\square$

<u>2.19 Satz:</u> Seien S, T $\mathcal{F}$-St.

a) $\forall A \in \mathcal{F}_S : \quad A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$

(~) 2.17 b) $\forall A \in \mathcal{F}_S : \quad A \cap \{S < T\} \in \mathcal{F}_{T-}$,

insbes.: $S < T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{T-}$

c) $\{S \leq T\}$, $\{S = T\}$ sind Elemente von $\mathcal{F}_S$ <u>und</u> $\mathcal{F}_T$

$\{S < T\}$ ist Element von $\mathcal{F}_S$ und $\mathcal{F}_{T-}$

d) $A \in \bigvee_t \mathcal{F}_t : \quad A \cap \{S = \infty\} \in \mathcal{F}_{S-}$

e) Für $A \in \bigvee_t \mathcal{F}_t$ def. Abb. $T_A : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ durch

$$T_A(\omega) := \begin{cases} \infty & \omega \in A^c \\ T(\omega) & \omega \in A \end{cases}$$

("T eingeschränkt auf A"). Es gilt:

$$T_A \ \mathcal{F}\text{-St} \iff A \in \mathcal{F}_T .$$

<u>Bew.:</u> a) Sei $A \in \mathcal{F}_S$, betrachte $B := A \cap \{S \leq T\}$, dann ist

$$B \cap \{T \leq t\} = \underbrace{(A \cap \{S \leq t\})}_{\in \mathcal{F}_t \text{ (Def. in 2.16)}} \cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{S \wedge t \leq T \wedge t\}}_{\mathcal{F}_t\text{-mb ZV } 2.17' \text{ a)+b)}}$$

in $\mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$.

3.5.20 b) $\underbrace{A}_{\in \mathcal{F}_S} \cap \{S < T\} = \bigcup_{r \text{ rat.}} \underbrace{\big(\underbrace{[A \cap \{S \leq r\}]}_{\in \mathcal{F}_r,\ 2.16} \cap \{r < T\}\big)}_{\in \mathcal{G}_T,\ 2.17} \in \mathcal{F}_{T-}$

c) wegen a)+b) mit $A := \Omega$ insbesondere

$$\{S < T\} \in \mathcal{F}_{T-}, \quad \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T, \quad \text{also } \{S = T\} \in \mathcal{F}_T .$$

Dann auch

$$\left.\begin{aligned} \{S < T\} &= \{T \leq S\}^c \in \mathcal{F}_S \\ \{S \leq T\} &= \{T < S\}^c \in \mathcal{F}_{S-} \subset \mathcal{F}_S \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{S = T\} \in \mathcal{F}_S$$

d) Betrachte $\mathcal{M} := \{A \in \bigvee_t \mathcal{F}_t : A \cap \{S = \infty\} \in \mathcal{F}_{S-}\}$. Nach a) ist S $\mathcal{F}_{S-}$-mb ZV, also $\{S=\infty\} \in \mathcal{F}_{S-}$.
Damit: $\Omega \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ ^{c}-stabil, leicht: $\mathcal{M}$ $\bigcup_{abz}$-stabil.
Also ist $\mathcal{M}$ eine σ-Alg.
Zeige: $\mathcal{M}$ enthält Erzeuger $\bigcup_n \mathcal{F}_n$ von $\bigvee_t \mathcal{F}_t$, dann $\mathcal{M} = \bigvee_t \mathcal{F}_t$:
Für $A \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$ ex. n_0 s.d. $A \in \mathcal{F}_{n_0}$, damit

$$A \cap \{S = \infty\} = \bigcap_{n \geq n_0} (A \cap \underbrace{\{n < S\}}_{\in \mathcal{G}_S}) \in \mathcal{F}_{S-}.$$

e) Wegen $\{T_A \leq t\} = A \cap \{T \leq t\}$ mit $A \in \bigvee_r \mathcal{F}_r$:
$A \in \mathcal{F}_T \Rightarrow A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0$, also T_A $\mathbb{F}$-SZ;
T_A $\mathbb{F}$-SZ $\Rightarrow \{T_A \leq t\} = A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t$, also $A \in \mathcal{F}_T$. □

<u>2.20 Satz:</u> Ist T $\mathbb{F}$-SZ und $(T_n)_n$ eine ankündigende Folge für T (→ 2.9, 2.10), so gilt sogar

vgl. 2.18 c)

$$\mathcal{F}_{T-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}.$$

<u>Bew:</u> '⊂' folgt aus 2.18 c): $\mathcal{F}_{T-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n -} \subset \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$.
'⊃': für eine ankündigende Folge gilt $\mathcal{F}_{T_n} \subset \mathcal{F}_{T-} \ \forall n$:
betr. $A \in \mathcal{F}_{T_n}$ und zerlege

$$A = A \cap \underbrace{\{T_n \leq T\}}_{=\Omega} = (A \cap \{T_n < T\}) \cup (A \cap \{T_n = T\})$$

Nach 2.19 b) gilt: $A \cap \{T_n < T\} \in \mathcal{F}_{T-}$.
Nach Def. einer ankünd. Folge in 2.9 gilt

$$\{T_n = T\} = \{T = 0\} = \{T \leq 0\};$$

da $A \in \mathcal{F}_{T_n} \subset \mathcal{F}_T$:

$$A \cap \{T_n = T\} = \underbrace{\underbrace{A}_{\in \mathcal{F}_T} \cap \{T \leq 0\}}_{\in \mathcal{F}_0 \text{ Def. 2.16}} \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}_T \subset \mathcal{F}_{T-}.$$

zusammen folgt $A \in \mathcal{F}_{T-}$. □

2.21 Satz: Ist T eine $\mathbb{F}$-vhs SZ und $A \in \mathcal{F}_{T-}$, so ist T_A ($\to$ 2.19 e)) eine $\mathbb{F}$-vhs SZ.

verweidet ü.A! nach 2.13

Bew: Nach Def in 2.19 ist T_A für $A \in \mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{F}_T$ zuerst eine $\mathbb{F}$-SZ. Mit 2.7 gilt weiter

$$T_A \text{ ist } \mathbb{F}\text{-vhs} \iff [\![T_A]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

1) Setze

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{F}_T : [\![T_A]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})\}.$$

Klar $\Omega \in \mathcal{M}$ da T n.Vor. $\mathbb{F}$-vhs; wegen $[\![T]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ muss $\mathcal{M}$ ^{c}-stabil sein:

$$[\![T]\!] = [\![T_A]\!] \,\dot\cup\, [\![T_{A^c}]\!], \text{ also } A \in \mathcal{M} \iff A^c \in \mathcal{M}.$$

$\mathcal{M}$ $\bigcup_{\text{abz}}$-stabil: Sind $A_1, A_2, \ldots$ in $\mathcal{M}$, so

$$[\![T_{(\bigcup_n A_n)}]\!] = \bigcup_n [\![T_{A_n}]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$$

Also ist $\mathcal{M}$ eine Sub-σ-Alg. von $\mathcal{F}_T$.

2) Zeige noch: $\mathcal{S}_T \subset \mathcal{M}$, dann $\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{M}$, fertig.

Fix $A \in \mathcal{S}_T$. <u>Fall 1:</u> $A \in \mathcal{F}_0$. Dann ist

$$[0,\infty) \times A = (\{0\} \times A) \cup \bigcup_{n \geq 1} (\,]0,n] \times A) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$$

als abz. Verein. vhs RE, also

$$[\![T_A]\!] = \underbrace{[\![T]\!]}_{\in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \text{ da } T\ \mathbb{F}\text{-vhs n.Vor.}} \cap ([0,\infty) \times A) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

<u>Fall 2:</u> Sei $r \geq 0$, sei $A = F \cap \{r < T\}$ mit $F \in \mathcal{F}_r$. Dann ist

$$(r,\infty) \times F = \bigcup_n (\,]r, r+n] \times F) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$$

als abz. Verein. vhs RE, also

$$[\![T_A]\!] = \underbrace{[\![T]\!]}_{\in \mathcal{P}(\mathbb{F})} \cap ((r,\infty) \times F) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}). \qquad \square$$