<u>2.22 Satz:</u> sei T $\mathcal{F}$-SZ, sei X ein $\mathcal{F}$-progressiver Prozeß, reellwertig. Def. den <u>Zustand von X z. Zt T</u> wie in 13.30:

$$1_{\{T<\infty\}} X_T := \begin{cases} X(T(\omega),\omega) & \text{falls } T(\omega)<\infty \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

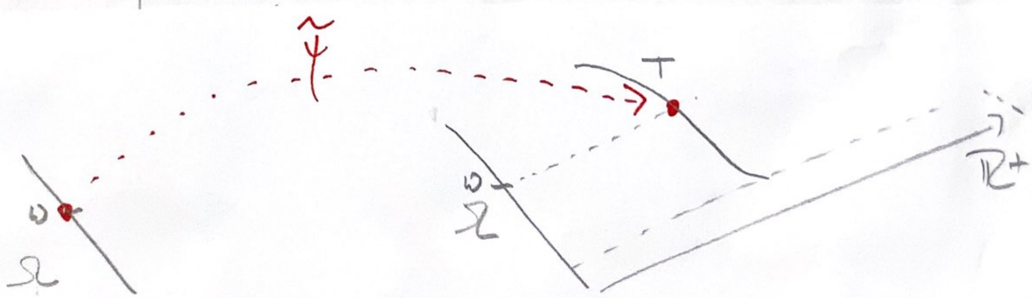
Dann ist $1_{\{T<\infty\}} X_T$ eine $\mathcal{F}_T$-mb ZV.

<u>Bem:</u> i) in 13.30 wurde ein Spezialfall von a) bewiesen (Ü.S., 1.9;

ii) Def. bezieht sich auf Prozesse, die auf Zeitintervall $[0,\infty)$ definiert sind und für die kein 'Abschluß' X_∞ zur Verfügung steht

iii) sonst kurz X_T anstelle von $1_{\{T<\infty\}} X_T$.

<u>Beweis:</u> Grundidee ist, Abb. der Art



$$\omega \xrightarrow{\tilde\Psi} \begin{cases} (T(\omega),\omega) & \text{falls } T(\omega)<\infty \\ (\infty,\omega) & \text{sonst} \end{cases}$$

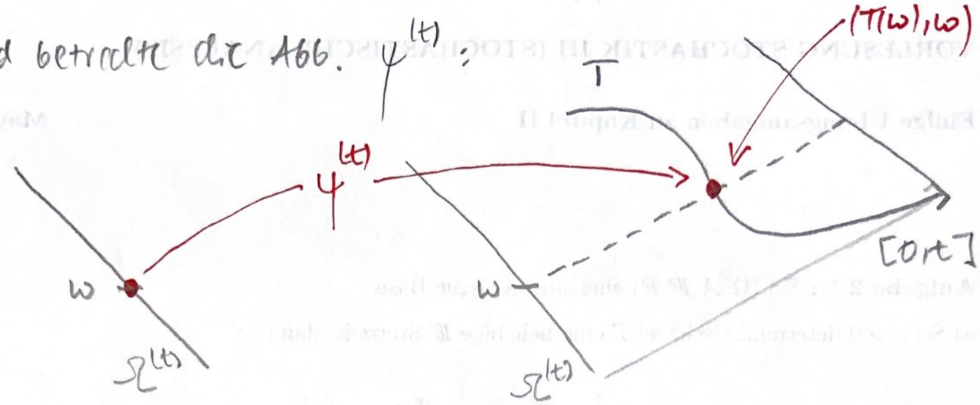
zu betrachten, aber man hat Probleme mit dem Wert $+\infty$ von T.

Ausweg: für $0<t<\infty$ betr. solche Abb. in Einschränkung auf $\{T\le t\}\subset\Omega$.

1) Vorüberlegung: sei T $\mathcal{F}$-SZ, fix. $0<t<\infty$, setze

$$\Omega^{(t)} := \{T \le t\} \quad \subset \Omega$$

und betrachte die Abb. $\psi^{(t)}$:



def. durch

$$(+) \qquad \psi^{(t)}: \Omega^{(t)} \ni \omega \longrightarrow (T(\omega), \omega) \in [0,t] \times \Omega .$$

versehe $[0,t]\times\Omega$ mit der σ-Algebra

$$\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$$

und $\Omega^{(t)} = \{T \le t\}$ mit der Spur von $\mathcal{F}_t$ auf $\Omega^{(t)}$:

$$\mathcal{U}^{(t)} := \{ F \cap \{T \le t\} : F \in \mathcal{F}_t \} .$$

Zeige nun:

$$(*) \qquad \psi^{(t)} \text{ ist } \mathcal{U}^{(t)}\text{–}\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t\text{–messbar.}$$

Bew: Es reicht, einen Erzeuger von $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$ zu betrachten

$$\mathcal{C} := \{ [0,c] \times F : 0 \le c \le t, \ F \in \mathcal{F}_t \}$$

und zu beweisen

$$[\psi^{(t)}]^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{U}^{(t)} .$$

Für $C := [0,c] \times F$, $0 \le c \le t$, $F \in \mathcal{F}_t$, gilt aber mit (+):

$$[\psi^{(t)}]^{-1}(C) = \{ \omega \in \Omega^{(t)} : T(\omega) \le c, \ \omega \in F \}$$

$$= \{T \le t\} \cap \underbrace{\big(\underbrace{\{T \le c\}}_{\in \mathcal{F}_c \subset \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{F}_{\in \mathcal{F}_t} \big)}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{U}^{(t)}$$

nach Def. von $\mathcal{U}^{(t)}$!

2) Vorüberlegung: Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ bel. gilt zunächst

$$A := \{\omega \in \Omega : (\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} X_T)(\omega) \in B\} \in \bigvee_t \mathcal{F}_t .$$

Bew: Zerlege

$$A = (A \cap \{T=\infty\}) \cup (A \cap \{T<\infty\}) .$$

Dabei ist

$$A \cap \{T=\infty\} = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } 0 \notin B \\ \{T=\infty\} & \text{falls } 0 \in B \end{cases} \overset{2.19}{\in} \mathcal{F}_T \subset \bigvee_t \mathcal{F}_t$$

und es gilt

$$A \cap \{T<\infty\} = \bigcup_{0<t<\infty} (A \cap \{T \leq t\}) ,$$

aber nach 1)

$$A \cap \{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega^{(t)} : X(T(\omega),\omega) \in B\}$$

$$= \{\omega \in \Omega^{(t)} : (T(\omega),\omega) \in X^{-1}(B)\}$$

$$= \{\omega \in \Omega^{(t)} : (T(\omega),\omega) \in X^{-1}(B) \cap ([0,t] \times \Omega)\}$$

Beachte: $X^{-1}(B) = \{X \in B\} = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega : X(t,\omega) \in B\}$,
und X ist nach Vor. $\mathbb{F}$-progressiv: wegen $\{X \in B\} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{F})$ gilt

$$X^{-1}(B) \cap ([0,t] \times \Omega) \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t .$$

Nach Def. der Abb. $\psi^{(t)}$ und wegen $(*)$ in Schritt 1) gilt damit

$$A \cap \{T \leq t\} = [\psi^{(t)}]^{-1}(X^{-1}(B) \cap ([0,t] \times \Omega))$$

$$\in \mathcal{U}^{(t)} \quad \text{Spur von } \mathcal{F}_t \text{ auf } \{T \leq t\} .$$

Somit ex. ein $\hat{A}^{(t)} \in \mathcal{F}_t$ so daß

$$(\diamond) \qquad A \cap \{T \leq t\} = \underbrace{\hat{A}^{(t)}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t .$$

⟶

Die obige Zerlegung von A zeigt also

$$A = \underbrace{(A \cap \{T=\infty\})}_{\in \mathcal{F}_{T-}} \cup \bigvee_t \underbrace{(A \cap \{T \leq t\})}_{\in \mathcal{F}_t} \in \bigvee_t \mathcal{F}_t .$$

3) Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ bel. und A wie in Schritt 2)

$$A = \{\omega \in \Omega : (1_{\{T<\infty\}} X_T)(\omega) \in B\} \in \bigvee_t \mathcal{F}_t$$

soll nun gezeigt werden:

(0) $\quad A \in \mathcal{F}_T$,

dann ist der Bew. des Satzes abgeschlossen. Nach Def. von $\mathcal{F}_T$ ist dazu nachzuweisen:

(++) $\quad 0 \leq t < \infty$ bel. : $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$,

Für $0 < t < \infty$ wurde dies in ($\diamond$) gezeigt ; für $t = 0$:

$$A \cap \{T=0\} = \{\omega \in \Omega : T(\omega) = 0, X(0,\omega) \in B\}$$

$$= \{T=0\} \cap \{X_0 \in B\} \in \mathcal{F}_0$$

da T St und da X adaptiert. Also gilt (++), damit (0), und der Bew. ist abgeschlossen. $\square$

2.23 Satz: Ist X in 2.22 $\mathbb{F}$-vorhersehbar, so ist $1_{\{T<\infty\}} X_T$ sogar $\mathcal{F}_{T-}$-meßbar.

Bew: 1) Betrachte zuerst $X := 1_R$, R vhs RE.

Fall 1): $R = \{0\} \times F$, $F \in \mathcal{F}_0$. Dann für $X = 1_R$

$$\{1_{\{T<\infty\}} X_T = 1\} = \{T=0\} \cap F \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{T-}.$$

Fall 2): $R =]s,t] \times F$, $F \in \mathcal{F}_s$: Dann für $X = 1_R$

$$\{1_{\{T<\infty\}} X_T = 1\} = \{s < T \le t\} \cap F$$

$$= \underbrace{(\underset{\mathcal{F}_s}{F} \cap \{s<T\})}_{\in \mathcal{G}_T} \setminus \underbrace{(\underset{\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t}{F} \cap \{t<T\})}_{\in \mathcal{G}_T} \in \mathcal{F}_{T-}.$$

2) Dynkinschluss: das System

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \text{für } X := 1_A \text{ gilt } 1_{\{T<\infty\}} X_T \text{ ist } \mathcal{F}_{T-}\text{-mb}\}$$

ist Dynkin(*) und enthält einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, nämlich $\mathcal{R}(\mathbb{F})$ und 1). Damit $\mathcal{M}$ σ-Alg. und $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

3) Aufbau mb Fkt: $X = 1_A$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $= \sum \alpha_i 1_{A_i}$, ... usw. □

(*): $\mathbb{R}^+ \times \Omega \in \mathcal{M}$, da für $X := 1_{\mathbb{R}^+ \times \Omega}$

$$1_{\{T<\infty\}} X_T = \begin{cases} 1 & \text{auf } \{T<\infty\} \\ 0 & \text{auf } \{T=\infty\} \end{cases} \quad \mathcal{F}_{T-}\text{-mb}$$

damit ist $\mathcal{M}$ auch ^{c}-stabil: für TM A von $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ in $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ gilt

$$1_{\{T<\infty\}} (1_A)_T + 1_{\{T<\infty\}} (1_{A^c})_T = 1_{\{T<\infty\}} (1_{\mathbb{R}^+ \times \Omega})_T$$

und erst recht $\bigcup_{\text{abz}}$-stabil.

Verschärfung von 2.19 c):

vgl. 2.19c)

2.24 Folgerung: Seien T, S $\mathbb{F}$-SZ, S $\mathbb{F}$-vhs: dann

$$\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{T-}, \quad \{S = T\} \in \mathcal{F}_{T-}.$$

Bew: S $\mathbb{F}$-vhs $\Rightarrow [\![0,S[\![\in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \Rightarrow X := 1_{[\![S,\infty[\![}$ $\mathbb{F}$-vhs.

Für eine bel. $\mathbb{F}$-SZ T gilt nach 2.23:

$$1_{\{T<\infty\}} X_T \text{ ist } \mathcal{F}_{T-}\text{-mb.}$$

Also $\{T<\infty\} \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{T-}$.

Nach 2.18a) ist $\{T=\infty\} \in \mathcal{F}_{T-}$, aber $\{T=\infty\} = \{T=\infty\} \cap \{S \leq T\}$.

Zusammen ist $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{T-}$.

Da $\{S<T\} \in \mathcal{F}_{T-}$ nach 2.19 c), hat man auch $\{S=T\} \in \mathcal{F}_{T-}$. □

Betr. nun Prozesse der Art '$\mathcal{F}_T$-mb Sprung z.Zt T', '$\mathcal{F}_{T-}$-mb Spr. zur vhs SZ T':

2.25 Satz: Seien T, R $\mathbb{F}$-SZ, $\mathbb{F}$ r.s. Sei Y eine $\mathcal{F}_T$-mb. ZV.

a) Stets sind

$$Y 1_{[\![T,\infty[\![}, \quad Y 1_{[\![T,R]\!]} \quad \mathbb{F}\text{-optional.}$$

b) Ist Y sogar $\mathcal{F}_{T-}$-mb und T eine $\mathbb{F}$-vhs Zeit, so sind

$$Y 1_{[\![T,\infty[\![}, \quad Y 1_{[\![T,R]\!]} \quad \mathbb{F}\text{-vorhersehbar.}$$

Beweis: 1) Da $Y 1_{[\![T,R]\!]} = (Y 1_{[\![T,\infty[\![}) \cdot 1_{[\![0,R]\!]}$ und $[\![0,R]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ für alle $\mathbb{F}$-SZ R (→ 2.4), genügt Bew. für $Y 1_{[\![T,\infty[\![}$.

Per Aufbau mb Fkt reicht zu betrachten $Y = 1_A$.

2) Falls $A \in \mathcal{F}_T$, ist T_A eine $\mathbb{F}$-SZ (2.19), und (→ 2.6)

$$1_A 1_{[\![T,\infty[\![} = 1_{[\![T_A,\infty[\![} = 1 - 1_{[\![0,T_A[\![} \quad \mathbb{F}\text{-optional.}$$

3) Falls T $\mathbb{F}$-vhs und $A \in \mathcal{F}_{T-}$, ist T_A $\mathbb{F}$-vhs (→ 2.21), und damit $[\![0,T_A[\![\in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ (→ 2.7). □

8.5.20