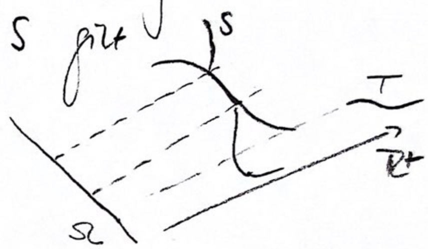
D. Zerlegung von Stoppzeiten

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$, sei $\mathbb{F}$ rechtsstetig.

2.26 Def: a) Eine $\mathbb{F}$-SZ T heißt P-völlig unerreichbar falls für jede $\mathbb{F}$-vorhersehbare Zeit S gilt

$$P(S = T < \infty) = 0.$$



b) Eine $\mathbb{F}$-SZ T heißt P-erreichbar falls es eine abzählb. Fam. $(S_i)_{i \in I}$ $\mathbb{F}$-vhs Zeiten gibt mit

$$P\Big(\bigcup_{i \in I} \{ S_i = T < \infty \} \Big) = 1$$

(Interpretation 'ü.4.': für jedes S_i gibt es eine ankünd. Folge; 'erreichbar' $\Leftrightarrow$ 'auf Komponenten angekündigt'.)

2.27 Satz: Für jede $\mathbb{F}$-SZ T gibt es: eine völlig unerreichbare $\mathbb{F}$-SZ T_u, eine erreichbare $\mathbb{F}$-SZ T_e, eine abz. Fam. $(S_i)_{i \in I}$ von $\mathbb{F}$-vhs Zeiten, so daß gilt

$$(*) \qquad [\![T]\!] = [\![T_u]\!] \,\dot\cup\, [\![T_e]\!] \,, \qquad [\![T_e]\!] \subset \bigcup_{i \in I} [\![S_i]\!] .$$

Nenne T_u "den" völlig unerreichbaren, T_e "den" erreichbaren Teil von T: sind (T_u', T_e'), (T_u'', T_e'') zwei Zerlegungen von T gemäß $(*)$, so gilt $T_u' = T_u''$ P-f.s., $T_e' = T_e''$ P-f.s.

<u>Bew:</u> für jede abzählbare Familie $\mathcal{Y} = (S_i)_{i \in I}$ $\mathbb{F}$-<u>vhs</u> Zeiten betrachte $A_{\mathcal{Y}} := \bigcup_{i \in I} \{ S_i = T < \infty \}$. Konstruiere eine Version A des P-wesentlichen Supremums $P\text{-ess}\sup_{\mathcal{Y}} A_{\mathcal{Y}}$:

Seine $\alpha := \sup_{\mathcal{Y}} P(A_{\mathcal{Y}}) \leq 1$, wähle Folge $\alpha_n \uparrow \alpha$, dazu abz. Familien $\mathcal{Y}_n$ mit $P(A_{\mathcal{Y}_n}) > \alpha_n$, $n \geq 1$; dann ist auch $\overline{\mathcal{Y}} := \bigcup_n \mathcal{Y}_n$ eine abzählbare Familie, und notwendig $P(A_{\overline{\mathcal{Y}}}) = \alpha$ wegen $A_{\overline{\mathcal{Y}}} \supset A_{\mathcal{Y}_n}$ $\forall n \geq 1$.

Dann ist $A := A_{\overline{\mathcal{Y}}}$ <u>eine</u> Festlegung des $P\text{-ess}\sup_{\mathcal{Y}} A_{\mathcal{Y}}$.

$\overline{\mathcal{Y}}$ liest eine abz. Fa. $(\underset{\mathbb{F}\text{-vhs}}{\tilde{S}_i})_{i \in \tilde{I}}$, und

$$A := A_{\overline{\mathcal{Y}}} = \bigcup_{i \in \tilde{I}} \{ \tilde{S}_i = T < \infty \} \overset{(2.24)}{\in} \mathcal{F}_{T-} \subseteq \mathcal{F}_T$$

also sind $T_u := T_{A^c}$, $T_e := T_A$ $\mathbb{F}$-SZ (2.19a)

T_u ist völlig unerreichbar (nach Def. des $P\text{-ess}\sup_{\mathcal{Y}} A_{\mathcal{Y}}$)

und $[\![T_e]\!] \subset \bigcup_{i \in \tilde{I}} [\![\tilde{S}_i]\!]$ ist erreichbar.

Eindeutigkeitsaussage $\Leftarrow$ Festl. des $P\text{-ess}\sup_{\mathcal{Y}} A_{\mathcal{Y}}$ sind nur bis auf P-Nullmengen eindeutig bestimmt. $\square$

3. Stoppzeiten und càdlàg-Prozesse

$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{F}, P)$, sei $\mathbb{F}$ rechtsstetig.

2.27' Bem.: Betr. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$ càdlàg:

$$\begin{cases} \forall t>0: & \lim_{s\uparrow t} f(s) \text{ ex. in } \mathbb{R}^d \\ \forall t\geq 0: & \lim_{s\downarrow t} f(s) = f(t). \end{cases}$$

Jede càdlàg-Funktion besitzt höchstens endlich viele 'große' Sprünge über kompakten Teilintervallen:

$\forall \varepsilon>0,\ \forall t_0<\infty$:

$D^\varepsilon_{t_0} := \{ t\in[0,t_0] : |\underbrace{\Delta f(t)}_{:=f(t)-f(t-)}| > \varepsilon \}$ ist endlich

und sie besitzt höchstens abz. viele Unstetigkeitsstellen:

$$D := \{ t\geq 0 : |\Delta f(t)| > 0 \} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D^{1/n}_n .$$

Beachte: $t=0$ kann nie Unstetigkeitsstelle sein.

Bew: reicht Bew. der ersten Beh.; indirekt.

Ang., es ex. $\varepsilon>0$ und $t_0<\infty$ so daß $D^\varepsilon_{t_0}$ nicht endlich.

Da $[0,t_0]$ kompakt, enthält $D^\varepsilon_{t_0}$ einen HP, folglich enthält $D^\varepsilon_{t_0}$ eine absteigende oder aufsteigende konvergente Folge $t_i \to t$, folglich kann entw. $\lim_{s\uparrow t} f(s)$ oder $\lim_{s\downarrow t} f(s)$ nicht existieren, Wid. zu f càdlàg. □

2.28 Def: Eine TM $A \subset \mathbb{R}^+ \times \Omega$ heißt <u>dünn</u>, wenn $A = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ für eine Folge $(T_n)_n$ von $\mathcal{F}$-SZ.
Eine solche Folge heißt <u>ausschöpfend</u> falls $[\![T_i]\!] \cap [\![T_j]\!] = \emptyset$, $i \neq j$.

2.28' Satz: Sei $A = \bigcup_{n \geq 1} [\![T_n]\!]$ dünn.

a) Stets ex. eine ausschöpfende Folge $(S_n)_n$ für A.

b) Sind T_n $\mathcal{F}$-vhs, $n \geq 1$, so kann $(S_n)_n$ als Folge $\mathcal{F}$-vhs Zeiten festgelegt werden.

<u>Bew:</u> a) setze $S_1 := T_1$, $S_2 := T_2|_{\{S_1 \neq T_2\}}$, ..., allg. $S_n := T_n|_{\bigcap_{j=1}^{n-1}\{S_j \neq T_n\}}$, klar $\bigcup_{j=1}^{n} [\![T_j]\!] = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} [\![S_j]\!]$ für alle n, also auch $\bigcup_{j \geq 1} [\![T_j]\!] = \dot{\bigcup}_{j \geq 1} [\![S_j]\!]$.
Stets sind $\{S_1 \neq T_2\} \in \mathcal{F}_{T_2}$, ..., $\bigcap_{j=1}^{n-1}\{S_j \neq T_n\} \in \mathcal{F}_{T_n}$ (2.19c)), also sind die S_n $\mathcal{F}$-SZ (2.19e)).

b) Mit T_1 ist S_1 vhs, mit S_1 vhs gilt $\{S_1 \neq T_2\} \overset{2.24}{\in} \mathcal{F}_{T_2-}$; 2.21 da T_2 vhs: $S_2 := T_2|_{\{S_1 \neq T_2\}}$ ist $\mathcal{F}$-vhs SZ, u.s.w. □

2.29 Satz: Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ $\mathcal{F}$-adaptiert und càdlàg.
Dann ist $\{\Delta X \neq 0\}$ dünn, insbes. mit 2.28' a):
es ex. eine Folge $(T_n)_n$ von $\mathcal{F}$-SZ mit

$$\{\Delta X \neq 0\} = \dot{\bigcup_{n \geq 1}} [\![T_n]\!].$$

Bew: 1) X $\mathbb{F}$-adapt + càdlàg $\overset{1.11}{\Longrightarrow}$ X ist $\mathbb{F}$-optional.

X càdlàg $\Rightarrow$ es ex. der Prozeß der linken Limiten X_-:

$$X_-(t,\omega) := \lim_{s\uparrow t} X(s,\omega)\ ,\ t>0,\ X_-(0,\omega) := X(0,\omega).$$

X_- ist $\mathbb{F}$-adaptiert und linksstetig $\overset{1.16}{\Longrightarrow}$ X_- ist $\mathbb{F}$-vhs.

Also ist der Prozeß der Sprünge von X

$$\Delta X := X - X_-$$

$\mathbb{F}$-optional mit $(\Delta X)(0,\omega) = 0$ $\forall \omega \in \Omega$.

2) Konstr. für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(S^n_k)_k$ von Stoppzeiten, welche

$$\{ |\Delta X| > 2^{-n} \}$$

überdeckt: Setze $S^n_0 \equiv 0$, dann sukzessiv in $k = 1, 2, \ldots$

$$S^n_k := \inf\{ t > S^n_{k-1} : |X_t - X_{S^n_{k-1}}| > \tfrac{1}{2} 2^{-n} \}.$$

Zeige: S^n_{k-1} ist $\mathbb{F}$-SZ $\Longrightarrow$ S^n_k ist $\mathbb{F}$-SZ:

der Prozeß $Y^{n,k} := (X - \underbrace{X_{S^n_{k-1}}}_{})1_{[\![S^n_{k-1}, \infty [\![}$ ist

$\mathbb{F}$-adaptiert (2.25a), $\mathcal{F}_{S^n_{k-1}}$-mb und 2.22

càdlàg, es gilt

$t \to Y^{n,k}(t,\omega)$ ist stetig in $\tilde{t} = S^n_{k-1}(\omega)$,

falls $\omega \in \{ S^n_{k-1} < \infty \}$.

Damit ist $S^n_k = \inf\{ r > 0 : |Y^{n,k}_r| > \tfrac{1}{2} 2^{-n} \}$

eine $\mathbb{F}$-SZ (2.6), und

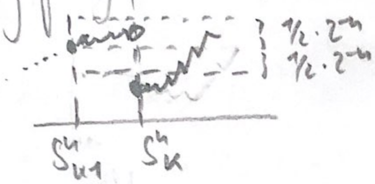
$$S^n_k > S^n_{k-1} \text{ auf } \{ S^n_{k-1} < \infty \}.$$

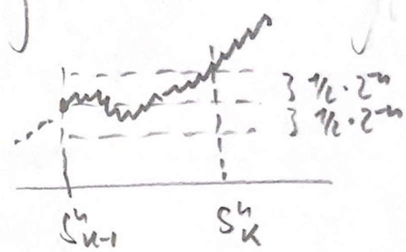
Auch gilt:

$$S^n_k \uparrow \infty \quad \text{für } k \to \infty$$

(für ω s.d. $\tilde{t} := \sup_k S^n_k(\omega) < \infty$ wäre Pfad $X_\cdot(\omega)$ nicht 'l.ä.g' in $\tilde{t}$).

Jeder Sprung von X mit Sprunghöhe $> 2^{-n}$ wird sicher eingefangen





aber auch viel mehr:

$$\{|\Delta X| > 2^{-n}\} \subsetneq \dot{\bigcup_k} [\![S^n_k]\!]$$

denn z.B. wenn X zur Zeit S^n_k die Schranke überkriechen.

3) Beachte: $|\Delta X|$ ist $\mathbb{F}$-optional, S^n_k eine $\mathbb{F}$-St,

also ist $|\Delta X|_{S^n_k} = 1_{\{S^n_k < \infty\}} |\Delta X|_{S^n_k}$ eine $\mathcal{F}_{S^n_k}$-mb ZV

(2.22). Einschränken von

$$S^n_k \quad \text{auf} \quad S^n_k\big|_{\{|\Delta X|_{S^n_k} > 0\}} =: \tilde{S}^n_k$$

gemäß 2.19 e) liefert

$$\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup_n \dot{\bigcup_k} [\![\tilde{S}^n_k]\!].$$

4) Insbes. ist $\{\Delta X \neq 0\}$ dünn, und wegen 2.28' a) konstruiert man eine ausschöpfende Folge.

$\square$