<u>2.29' Bem:</u> Mit demselben Beweis schöpft man für bel. Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ auch

$$\{\Delta X \in I\} = \dot{\bigcup_{j \in J}} [\![T_j]\!]$$

mit einer abz. Familie $(T_j)_{j \in J}$ geeign. $\mathbb{F}$-St aus.

11.5.20

<u>2.30 Hauptsatz:</u> Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ $\mathbb{F}$-adaptiert + càdlàg. Dann gibt es eine Folge $(T_n)_n$ P-völlig unerreichbarer und eine Folge $(S_m)_m$ vorhersehbarer $\mathbb{F}$-St so daß

i) $\{\Delta X \neq 0\} \subset \bigcup_m [\![S_m]\!] \cup \bigcup_n [\![T_n]\!]$ (i.a. $\subsetneq$!)

ii) die $[\![S_m]\!]$, $[\![T_n]\!]$, $n \geq 1$, $m \geq 1$ sind disjunkt

iii) $X = X_- + \sum_m (\Delta X)_{S_m} 1_{[\![S_m]\!]} + \sum_n (\Delta X)_{T_n} 1_{[\![T_n]\!]}$

wobei alle Prozesse $(\Delta X)_{S_m} 1_{[\![S_m]\!]}$, $(\Delta X)_{T_n} 1_{[\![T_n]\!]}$ $\mathbb{F}$-optional.

<u>Bem:</u> In i) ist '$\subset$' ein '$\subsetneq$', das ist i.a. nicht zu vermeiden. In iii) kann man zwar T_n auf $\{\Delta X_{T_n} \neq 0\} \in \mathcal{F}_{T_n}$ zurückschneiden, auch S_m auf $\{\Delta X_{S_m} \neq 0\} \in \mathcal{F}_{S_m}$:

vgl. 2.21

i.a. aber ist $\{\Delta X_{S_m} \neq 0\}$ nicht in $\mathcal{F}_{S_m -}$, also ginge beim Zurückschneiden von S_m die Vorhersehbarkeit von S_m kaputt.

Bew: 1) Wähle nach 2.29 eine $\{\Delta X \neq 0\}$ ausschöpfende Folge $(T_n)_n$ von $\mathbb{F}$-SZ (o.E.d.A.: $[\![T_n]\!] \cap [\![T_{\tilde{n}}]\!] = \emptyset$ für $n \neq \tilde{n}$).

2.27: wähle für jedes n für T_n einen P-völlig unerreichbaren Anteil T_n' und eine abz. Familie $(S_{n,e}')_e$ $\mathbb{F}$-vhs SZ so daß bei festem n

$$[\![T_n']\!] \subset [\![T_n]\!]$$

$$= [\![T_n']\!] \,\dot{\cup}\, [\![(T_n)_e]\!]$$

$$\subset [\![T_n']\!] \cup \bigcup_e [\![S_{n,e}']\!]_e \,.$$

Dann haben die völlig unerreichbaren Anteile wieder disjunkte Graphen ($[\![T_n']\!] \cap [\![T_{\tilde{n}}']\!] = \emptyset$ für $n \neq \tilde{n}$).

2) Betrachte die dünne Menge $A = \bigcup_n \bigcup_e [\![S_{n,e}']\!]_e$.
Da alle $S_{n,e}'$ $\mathbb{F}$-vhs SZ, ex. eine Folge $(G_m)_m$ $\mathbb{F}$-vhs SZ welche A ausschöpft (2.28'):

$$A = \dot{\bigcup_m} [\![G_m]\!] \,.$$

3) Noch kann $\bigcup_e [\![S_{n,e}']\!]$ für $n, \tilde{n}$ eine Überlapp mit $[\![T_{\tilde{n}}']\!]$ aufweisen, daher auch $A = \dot{\bigcup_m} [\![G_m]\!]$. Für $m, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ ist aber $\{G_m \neq T_{\tilde{n}}'\} \in \mathcal{F}_{(T_{\tilde{n}}')}$ nach 2.19, also auch

$$A_{\tilde{n}} := \bigcap_m \{G_m \neq T_{\tilde{n}}'\} \in \mathcal{F}_{(T_{\tilde{n}}')}$$

also ist nach 2.19 c) für jedes $\tilde{n} \in \mathbb{N}$

$$T_{\tilde{n}} := T_{\tilde{n}}'\big|_{A_{\tilde{n}}} \quad \text{eine } \mathbb{F}\text{-SZ}.$$

Wegen $[\![T_{\tilde{n}}]\!] \subset [\![T_{\tilde{n}}']\!]$ ist auch $T_{\tilde{n}}$ P-völlig unerreichbar, und die $T_{\tilde{n}}$ haben disjunkte Graphen, ($n \in \mathbb{N}$).

4) Gezeigt ist

$$\{\Delta X \neq 0\} \subset \bigcup_n \{ [\![T_n']\!] \cup \bigcup_\ell [\![S_{n,\ell}']\!])$$

$$= \Big(\dot{\bigcup_n} [\![T_n']\!] \Big) \cup A \qquad (\leftarrow \text{Schritt 2)})$$

$$= \Big(\dot{\bigcup_n} [\![T_n']\!] \Big) \cup \Big(\dot{\bigcup_m} [\![G_m]\!] \Big)$$

$$= \Big(\dot{\bigcup_n} [\![T_n]\!] \Big) \dot{\cup} \Big(\dot{\bigcup_m} [\![G_m]\!] \Big)$$

mit T_n P-völlig unerreichbar und G_m $\mathbb{F}$-vhs. SZ. □

wegen $X = X_- + \Delta X$ folgt i) + ii) + iii).

5) Da ΔX $\mathbb{F}$-optional, ist für jede $\mathbb{F}$-SZ T

$(\Delta X)_T$ $\quad (= 1_{\{T<\infty\}} (\Delta X)_T)$ eine $\mathcal{F}_T$-mb ZV,

also $(\Delta X_T) 1_{[\![T]\!]}$ $\mathbb{F}$-optional nach 2.25 a) (mit $R=T$). □

2.31 Satz: Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ càdlàg und $\mathbb{F}$-vorhersehbar.

Dann besitzt X nur Sprünge über $\mathbb{F}$-vhs Zeiten:

$$\{\Delta X \neq 0\} = \dot{\bigcup_m} [\![S_m]\!] \quad ,$$

$$X = X_- + \sum_m (\Delta X)_{S_m} 1_{[\![S_m]\!]}$$

für geeignete $\mathbb{F}$-vhs Zeiten $(S_m)_m$. Dabei sind die Prozesse

$(\Delta X)_{S_m} 1_{[\![S_m]\!]}$ $\mathbb{F}$-vorhersehbar ($\rightarrow$ 2.25)

Bew: da hier $\Delta X = X - X_-$ vhs, ist $(\Delta X)_{S_m}$ nach 2.23 $\mathcal{F}_{S_m-}$-mb, also

$(\Delta X)_{S_m} 1_{[\![S_m]\!]}$ $\mathbb{F}$-vhs nach 2.25.

Bew: 1) Für $n \in \mathbb{N}$ bel. fest ist $\{|\Delta X| > 2^{-n}\}$ dünn nach 2.29, wähle eine ausschöpfende Folge $(T_m)_m$ von $\mathbb{F}$-SZ, $T_m = T_{n,m}$. Wie im Beweis von 2.30 ist $(T_m)_m$ aufsteigend geordnet:

$$T_m \uparrow \infty, \quad m \to \infty, \qquad T_m > T_{m-1} \text{ auf } \{T_{m-1} < \infty\}.$$

Stets ist $[\![0, T_m]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, 2.4, also auch

$$]\!]T_{m-1}, T_m]\!] = [\![0, T_m]\!] \setminus [\![0, T_{m-1}]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F}),$$

also auch

$$]\!]T_{m-1}, T_m]\!] \cap \{|\Delta X| > 2^{-n}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$$

da X $\mathbb{F}$-vhs. N. Konstr. dann aber

$$]\!]T_{m-1}, T_m]\!] \cap \{|\Delta X| > 2^{-n}\} = [\![T_m]\!]$$

in $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, somit nach 2.7 $[\![T_m]\!]$ $\mathbb{F}$-vhs.

2) Verein. über alle n zeigt mit $(T_m)_m = (T_{n,m})_m$: $\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup_n \bigcup_m [\![T_{n,m}]\!]$ ist dünn.
Nach 2.28' b) existiert – da alle $T_{n,m}$ vhs – eine ausschöpfende Folge aus $\mathbb{F}$-vhs SZ $(S_{\tilde{m}})_{\tilde{m}}$:

$$\{\Delta X \neq 0\} = \dot{\bigcup_{\tilde{m}}} [\![S_{\tilde{m}}]\!].$$

3) 2.23: $(\Delta X)_{S_{\tilde{m}}}$ ist $\mathcal{F}_{S_{\tilde{m}}-}$-mb da X vhs; (2.23),
2.25: $(\Delta X)_{S_{\tilde{m}}} 1_{[\![S_{\tilde{m}}]\!]}$ $\mathbb{F}$-vhs da $S_{\tilde{m}}$ $\mathbb{F}$-vhs SZ. □