Reinhard Höpfner, Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Einige Übungsaufgaben zu Kapitel III **May 15, 2020**

Aufgabe 3.1 : In der Aussage von Satz 3.3

a) ersetze man 'Martingal' durch 'nichtnegatives Submartingal'.

Man überzeuge sich davon, dass der Beweis unverändert durchgeht.

b) versuche man, 'Martingal' durch 'Submartingal' zu ersetzen.

Welcher Beweisschritt bricht zusammen?

Aufgabe 3.2 : Brownsche Bewegung B und Poissonprozess N mit Parameter $\lambda > 0$ sind Beispiele für Prozesse mit unabhängigen und zeitlich homogenen Zuwächsen, über deren Verteilungseigenschaften man 'alles' weiss, z.B.: $B_1^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Schreibe M für den Prozess $(N_t - \lambda t)_{t \geq 0}$ und zeige:

a) die Prozesse $B,\ M$ sind Martingale;

b) die Prozesse N, B^2, M^2 sind nichtnegative Submartingale;

c) die Prozesse $(B_t^2 - t)_{t\geq 0},\ (M_t^2 - \lambda t)_{t\geq 0}$ sind Martingale.

Aufgabe 3.3 : Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, darauf U_0 eine auf $(0,1)$ gleichverteilte ZV, sei $\lambda > 0$. Setze $I\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ \mathcal{F}_t := \sigma(U_0)$ für alle $t \geq 0$, und definiere

$$V := (V_t)_{t\geq 0} \quad , \quad V_t \ := \ U_0\, e^{\lambda t} \ .$$

a) Der stochastische Prozess V ist $I\!F$-adaptiert.

b) Die Zeit $T := \inf\{t > 0 : V_t > 1\}$ ist eine $I\!F$-Stopzeit.

c) Es gilt $\mathcal{L}(T|P) = \mathcal{E}xp(\lambda)$.

d) Für jedes feste $t \geq 0$ gilt

$$\lambda \;=\; \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\, P(\, T \in]t, t+h] \mid T > t\,)$$

e) Für jedes feste $t \geq 0$ gilt

$$P(\, T \in]t, t+h] \mid \mathcal{F}_t\,) \;=\; 1_{\left[e^{-\lambda(t+h)}\,,\, e^{-\lambda(t)}\right[}(U_0) \;=\; 1_{\left[e^{-\lambda h}\,,\, 1\right[}(V_t)$$

f) Für T existiert eine ankündigende Folge von $\mathbb{F}$-Stopzeiten. Man gebe eine solche explizit an.

g) T ist eine vorhersehbare $\mathbb{F}$-Stopzeit.

h) Es gilt $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{T^-} = \mathcal{F}_T = \bigvee_t \mathcal{F}_t = \sigma(U_0)\,.$

Aufgabe 3.4 : Gehe aus von einer $\mathcal{E}xp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen $T : \Omega \to (0, \infty)$, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Setze

$$X := (X_t)_{t \geq 0} \quad , \quad X \;:=\; 1_{[[T\,,\infty[[} \quad , \quad \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \quad , \quad \mathcal{F}_t := \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)\;.$$

a) Die Filtration $\mathbb{F}$ ist rechtsstetig, und X ist ein $\mathbb{F}$-adaptierter stochastischer Prozess.

b) T ist eine $\mathbb{F}$-Stopzeit.

c) Es gilt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{r > t} \sigma(T \wedge r) = \sigma(T \wedge t)$, und $\sigma(T) = \mathcal{F}_{T^-} = \mathcal{F}_T = \bigvee_t \mathcal{F}_t\,.$

d) Für alle $t \geq 0$ und alle $h > 0$ gilt

$$E\,(X_{t+h} - X_t \mid \mathcal{F}_t) \;=\; P(\,T \in]t, t+h] \mid T > t\,) \cdot 1_{\{0\}}(X_t) \;+\; 0 \cdot 1_{\{1\}}(X_t)$$

e) Für alle $t \geq 0$ und alle $h > 0$ gilt

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\, E\,(X_{t+h} - X_t \mid \mathcal{F}_t) \;=\; \lambda\, 1_{\{0\}}(X_t)$$

f) Der Prozess $M := (M_t)_{t \geq 0}$

$$M_t \;:=\; X_t \;-\; \lambda \int_0^t 1_{\{0\}}(X_s)\, ds \;=\; X_t \;-\; \lambda \cdot (t \wedge T)$$

ist ein $(P, \mathbb{F})$-Martingal.

Aufgabe 3.5 : Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Aufgabe 3.2.

a) Für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ ist

$$I = (I_t)_{t\geq 0} \quad , \quad I_t \ = \ \int_0^t (1_A)_s \, dM_s$$

ein $(P, \mathbb{F})$-Martingal.

Hinweis: mit den vorhersehbaren Rechtecken anfangen, dann Dynkinschluss! Wegen der einfachen Struktur der Pfade von M kann das Integral pfadweise bei festem $\omega \in \Omega$ als Riemann-Stieltjes-Integral berechnet werden.

b) Beachte: T ist strikt positiv. Man zeige: ist S eine weitere $\mathbb{F}$-Stopzeit, so

$$S(\omega) < T(\omega) \ \ \forall\, \omega \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad S = 0 \quad P\text{-fast sicher .}$$

Hinweis: Betrachte $A :=]]S, \infty[[\in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, dann ist das Integral I in a) ein $\mathbb{F}$-Martingal mit $I_T = M_T - M_S$.

c) Man folgere: für die $\mathbb{F}$-Stopzeit T gibt es keine ankündigende Folge von $\mathbb{F}$-Stopzeiten.