Reinhard Höpfner, VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

May 14, 2020

Kap. III : Martingale in stetiger Zeit

A. Gleichgradige Integrierbarkeit (teils Wiederholung Kap. 11), cadlag-Pfade:

Martingale, Submartingale, Supermartingale in stetiger Zeit 3.1

Standardbeispiel für ein gleichgradig integrables Martingal 3.2

gleichgradige Integrabilität in Martingalen oder nichtnegativen Submartingalen 3.3 –3.4

Submartingale von Klasse [LD] 3.5 – 3.5'

Doob-Ungleichungen 3.6

Upcrossings 3.7 – 3.8

Hauptsatz: cadlag-Pfade für Martingale unter üblichen Hypothesen 3.9

gleichgradige Integrabilität in Submartingalen entlang absteigender Indexfolgen 3.10

Hauptsatz: cadlag-Pfade für gewisse Submartingale unter üblichen Hypothesen 3.11

B. Submartingale von Klasse [LD] :

Doleans-Mass auf $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ 3.11' – 3.12

Stopsätze für Martingale und Submartingale von Klasse [LD] 3.13

Einfrieren zur Zeit T 3.14

übliche Hypothesen: vorhersehbare cadlag Martingale sind stetig 3.15

die Sprungzeiten im Poissonprozess sind völlig unerreichbare Stopzeiten 3.16

$\mathbb{F}$-wachsende Prozesse 3.17

Hauptsatz (ohne Beweis / mit Referenz): Doob-Meyer-Zerlegung unter üblichen Hypothesen 3.18

übliche Hypothesen: Doleans-Mass und Doob-Meyer-Kompensator 3.19

$\mathbb{F}$-adaptierte Prozesse mit Pfaden von lokal beschränkter Variation 3.20

vorhersehbare Martingale mit BV-Pfaden sind null (ohne Beweis / mit Referenz) 3.21

quadratintegrable Martingale M, 'spitze Klammer' $\langle M \rangle$, Doleans-Mass von M^2 3.22

Beispiel: Poissonprozess 3.23

Beispiel: Brownsche Bewegung 3.24

Beispiel: Ein-Sprung-Sprungprozess 3.25–3.26

Kap. III Martingale in stetiger Zeit

A. Gleichgradige Integrierbarkeit, càdlàg-Pfade

3.1 Def/Wdh (→ 11.4): $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $I \subset \overline{\mathbb{R}}^+$ Indexm.,

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ eine Filtration in $\mathcal{A}$. Betrachte einen stochastischen Prozeß $X = (X_t)_{t \in I}$ mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und mit den Eigenschaften

$$X \text{ ist } \mathbb{F}\text{-adaptiert, und } X_t \in L^1(P) \text{ für jedes } t \in I.$$

Der Prozeß X heißt

$$(P, \mathbb{F}) - \left\{ \begin{array}{l} \textit{Submartingal} \\ \textit{Martingal} \\ \textit{Supermartingal} \end{array} \right\} \quad \text{falls für alle } s < t \text{ in } I \text{ gilt: } \quad X_s \left\{ \begin{array}{c} \le \\ = \\ \ge \end{array} \right\} E(X_t | \mathcal{F}_s)\,.$$

Gleichwertig:

$$\forall\, s < t \text{ in } I,\ F \in \mathcal{F}_s: \quad E(1_F X_s) \left\{ \begin{array}{c} \le \\ = \\ \ge \end{array} \right\} E(1_F X_t)\,.$$

3.2 Bsp/Wdh (→ Kap 11): Für $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ setze

$$M_t := E_P(X | \mathcal{F}_t)\,, \quad t \in I.$$

Dann ist $M = (M_t)_{t \in I}$ ein Martingal bez $(P, \mathbb{F})$: zuerst

$$M_t \text{ ist } \mathcal{F}_t\text{-mb für jedes } t \in I\,;$$

Jensen-Ungl. 10.10 zeigt $M_t \in L^1(P)$ $\forall t \in I$, und schrittw. Bedingen zeigt für $s < t$ in I:

$$E(M_t | \mathcal{F}_s) = E\big(E(X|\mathcal{F}_t) \,|\, \mathcal{F}_s\big) = E(X | \mathcal{F}_s) = M_s$$

P-f.s. □

Mit der Notation aus 3.1 formuliert ($\to$ 11.7, 11.20, 11.33)

3.3 Satz: Sei $(t_n)_n$ eine Folge in I, sei $\beta := \sup_n t_n \in I$, setze $J := \{t_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\beta\}$. ($t_0 := t_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$?)

Ist $(X_t)_{t\in J}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in J}$, so ist X gleichgradig integrierbar.

Bew: 1) Jensen-Ungl. 10.10 für $s<t$ in J:

$$|X_s| = |E(X_t|\mathcal{F}_s)| \leq E(|X_t| \,|\, \mathcal{F}_s)$$

für $F \in \mathcal{F}_s$ also (vgl. 11.31 b))

$$(*) \qquad E(1_F |X_s|) \leq E(1_F |X_t|)$$

d.h. $(|X_t|)_{t\in J}$ ist nichtneg. Submart. bzgl. $(P, (\mathcal{F}_t)_{t\in J})$.

2) Da $\beta \in J$, ist $(|X_t|)_{t\in J}$ abgeschlossen nach rechts durch $|X_\beta|$.

Wie im Bew. von 11.32 vorgehend sieht man:

i) zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$ so daß

$$A \in \mathcal{F}_\beta,\ P(A) < \delta \implies \int_A |X_\beta|\, dP < \varepsilon \ ;$$

ii) Für konstante $K > \frac{1}{\delta} E(|X_\beta|)$ erhält man

$$P(|X_t| \geq K) \leq \frac{E(|X_t|)}{K} \leq \frac{E(|X_\beta|)}{K} < \delta$$

unabh. von $t \in J$.

Mit i) + ii) zusammen und der Submart.eigenschaft $(*)$ sieht man

$$\sup_{t\in J} \int_{\{|X_t| \geq K\}} |X_t|\, dP \overset{(*)}{\leq} \sup_{t\in J} \int_{\{|X_t| \geq K\}} |X_\beta|\, dP \overset{i)+ii)}{<} \varepsilon .$$

Damit ist die Familie $\{X_t : t \in J\}$ gleichgradig integrierbar ($\to$ 2.25, 2.25'). $\square$

3.3' ÜA: a) Überlege, daß Aussage von 3.3 richtig bleibt für nichtnegative Submartingale.

b) Welcher Beweisschritt bricht zusammen, wenn man in 3.3 beliebige Submart. betrachten will (→ 11.31 a) !!) ?

Reformuliere 11.32:

3.4 Satz: Sei $I \subset \overline{\mathbb{R}^+}$ eine beliebige Indexmenge mit $\rho := \sup I \in I$. Sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein nichtnegatives Submart. bez. $(P, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I})$. Sei $\mathcal{T}_I^f$ die Klasse aller $\mathcal{F}$-St, welche nur endlich viele Werte annehmen, diese alle in I:

dann gilt

$$\{X_T : T \in \mathcal{T}_I^f\} \text{ ist gleichgradig integrierbar}$$

(beachte: sind $t_1, \dots, t_\ell$ die endl. vielen mögl. Werte von T, so ist $X_T = \sum_{i=1}^{\ell} 1_{\{T = t_i\}} X_{t_i}$ wie in 11.30 definiert, unter Ausnutzung der Existenz eines 'Abschlusses nach rechts' X_ρ).

13.5.20

Bew: (→ 11.32) Nimmt $T \in \mathcal{T}_I^f$ die Werte $t_i = t_i(T)$, $1 \le i \le \ell(T)$, mit pos. W'keit an, so für $1 \le i \le \ell(T)$

$$\int_{\{X_T \ge K\} \cap \{T = t_i\}} X_T \, dP = \int_{\{X_{t_i} \ge K\} \cap \{T = t_i\}} X_{t_i} \, dP \overset{\text{nichtneg. Sbm.}}{\le} \int_{\{X_T \ge K\} \cap \{T = t_i\}} X_\rho \, dP$$

und damit

$$\int_{\{X_T \ge K\}} X_T \, dP \le \int_{\{X_T \ge K\}} X_\rho \, dP,$$

Rest wie in Bew. von 3.3.

Dies motiviert eine wichtige Definition:

3.5 Def: Sei $I = [0,\infty)$, sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Submart. bez $(P, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$. Dann heißt X von Klasse [LD] (lokal, Doob) falls gilt:

Mit $\mathcal{T}^f_{[0,n]} :=$ Klasse aller $\mathcal{F}$-St, welche nur endlich viele Werte annehmen, diese alle in $[0,n]$, gilt: $\{X_T : T \in \mathcal{T}^f_{[0,n]}\}$ gleichgradig integrierbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.5' Bsp: Martingale und nichtneg. Submart. sind von Klasse [LD].

Bsp B BBM: B, B^2, $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$, ... (wichtig Zus. mit $B_t^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{t}{2})$)

Bsp N Poissonpr. per $\lambda > 0$: N, $(N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$, $((N_t-\lambda t)^2)_{t\geq 0}$, $((N_t-\lambda t)^2 - \lambda t)_{t\geq 0}$, ...

3.6 Satz/Wdh (Doob-Ungleichung 11.19):

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $I \subset \overline{\mathbb{R}^+}$ eine abzählbare Indexmenge mit

$$\alpha := \inf\{t : t \in I\} \in I\,, \quad \beta := \sup\{t : t \in I\} \in I\,.$$

Sei $X = (X_t)_{t\in I}$ ein Sub- oder ein Supermart. bez $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$:

i) Ist X ein *Submartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\sup_{t\in I} X_t > r) \;\leq\; \int_{\{\sup_{t\in I} X_t > r\}} X_\beta \, dP \;\leq\; E(X_\beta^+)\,.$$

ii) Ist X ein *Supermartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\sup_{t\in I} X_t > r) \;\leq\; E(X_\alpha) - \int_{\{\sup_{t\in I} X_t \leq r\}} X_\beta \, dP\,.$$

iii) Ist X ein *nichtnegatives Supermartingal*, so gilt

$$r \cdot P(\sup_{t\in I} X_t > r) \;\leq\; E(X_\alpha)\,.$$

3.7 Satz (i.w. Wdh. → Upcrossings 11.22 – 11.23):

Sei $I \subset \overline{\mathbb{R}_+}$ abzählbar, sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein Martingal/Submartingal bez. $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$.

a) Def. für $-\infty < a < b < \infty$

$$N_{a,b}^I(\omega) := \sup\Big\{ \ell \in \mathbb{N}_0 : \text{es ex. } t_1 < t_2 < \dots < t_{2\ell-1} < t_{2\ell} < \infty \text{ in } I \text{ so daß für } 1 \le j \le \ell \quad X_{t_{2j-1}}(\omega) < a \text{ und } X_{t_{2j}}(\omega) > b. \Big\}$$

Dann ist $N_{a,b}^I$ eine $\bigvee_{t \in I} \mathcal{F}_t$ - mb ZV. (Anzahl der aufsteigenden Überquerungen des Streifens $[a,b]$ entl. I).

b) Sind $\alpha := \inf I$, $\beta := \sup I$ Elemente von I, so ist $N_{a,b}^I$ $\mathcal{F}_\beta$-mb mit

$$(b-a)\, E(N_{a,b}^I) \le \begin{cases} E(\,(X_\beta - a)^-) < \infty & \text{falls } X \text{ Mart.} \\ E(X_\beta) - E(X_\alpha) + E((X_\alpha - a)^-) & X \text{ Subm.} \end{cases}$$

Bew: Wähle eine aufsteigende Folge $(J_n)_n$ endlicher TM von I so daß $J_n \uparrow I$ und so daß

$$\alpha := \inf I \;,\; \beta := \sup I \;\in J_n \;\forall n$$

und wende 11.23 a) an. □

vgl. 1.11.23

3.8 Satz: Sei $I \subset \overline{\mathbb{R}^+}$ abzählbar, sei $X=(X_t)_{t\in I}$ ein Martingal oder ein Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$.

a) Unter den Voraussetzungen

(*) $\sup_{t\in I} E(X_t) < \infty$, $\sup_{t\in I} E(X_t^-) < \infty$

gibt es eine Konst $K < \infty$ so daß

$$E(N^I_{ab}) \le \frac{1}{b-a}(K+|a|) \quad \text{für jede Wahl von } a<b \text{ in } \mathbb{R},$$

und eine P-Nullmenge N in Ω so daß gilt:

$\omega \notin N \Rightarrow$ { für jeden Häufungspunkt γ von I und jede monotone Folge $t_n \to \gamma$, $(t_n) \subset I$ existiert $\lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$ in $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Ist $\beta := \sup I$ in I, so kann N in Form $N = A^\beta$:

$$A^\beta := \bigcup_{\substack{-\infty<a<b<\infty \\ a,b\in\mathbb{Q}}} \{\underbrace{N^I_{a,b}}_{\mathcal{F}_\beta\text{-mb ZV}} = \infty\} \in \mathcal{F}_\beta$$

festgelegt werden.

15.5.20

Bew: Wähle eine Folge geschachtelter TM I_n von I der Form $I_n = I \cap [\alpha_n, \beta_n]$, $\beta_n = \sup I_n \in I_n$, $\alpha_n = \inf I_n \in I_n$; Bew. 1.11.23 angewandt auf jedes I_n liefert a) und b). □