3.9 Hauptsatz Teil 1): Übl. Hyp. an $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, P)$.

Dann gibt es zu jedem $(P,\mathbb{F})$-Martingal $X = (X_t)_{t\ge 0}$ eine Modifikation $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \ge 0}$ so daß

i) $\tilde{X}$ ist $(P,\mathbb{F})$-Martingal

ii) alle Pfade von $\tilde{X}$ sind càdlàg.

Bew: Schritt 1) Für $\beta \in \mathbb{N}$ betr. Martingal $(X_t)_{t\in[0,\beta]\cap\mathbb{Q}}$, dazu $A^\beta \in \mathcal{F}_\beta$ wie in 3.8 b),

$$\Omega_0 := \bigcup_{\beta\in\mathbb{N}} \Big(A^\beta \cup \{ \sup_{0\le r\le \beta,\, r\in\mathbb{Q}} |X_r| = +\infty \} \Big) \in \bigvee_t \mathcal{F}_t .$$

3.8 b), und Doob-Ungleichung 3.6 für Subm. $(|X_t|)_{t\in[0,\beta]\cap\mathbb{Q}}$: Ω_0 ist eine P-Nullmenge in $\mathcal{A}$.

Übl. Hyp. $\Longrightarrow$ es gilt $\Omega_0 \in \mathcal{F}_0$, damit $\Omega_0 \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \ge 0$.

2) Fix $\lambda \in \mathbb{N}$ und betr. $I := [0,\lambda]\cap\mathbb{Q}$. Da $A^\lambda \subset \Omega_0$, existieren alle Limiten

$$\tilde{X}_{t^+}(\omega) := \lim_{r\downarrow t,\, r\in\mathbb{Q}} X_t(\omega) \quad \text{falls } 0 \le t < \lambda,\ \omega\in\Omega\setminus\Omega_0$$

$$\tilde{X}_{t^-}(\omega) := \lim_{r\uparrow t,\, r\in\mathbb{Q}} X_t(\omega) \quad \text{falls } 0 < t \le \lambda,\ \omega\in\Omega\setminus\Omega_0$$

zunächst in $\overline{\mathbb{R}}$, weil 3.8 a), übrigens aber sogar in $\mathbb{R}$, denn für alle $\beta\in\mathbb{N}$ gilt n. Def. von Ω_0:

$$\sup_{r\in[0,\beta]\cap\mathbb{Q}} |X_r(\omega)| < \infty \quad \text{auf } \Omega\setminus\Omega_0 .$$

3) Def. einen stoch. Prozeß $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ durch

$$\tilde{X}_t := 1_{\Omega_0} \lim_{\substack{r \downarrow t \\ r \in \mathbb{Q}}} X_r \quad , \quad t \geq 0.$$

Dann ist $\tilde{X}$ $\mathbb{F}$-adaptiert da $\mathbb{F}$ rs (← Üsl. Hyp.) und $\Omega_0 \in \mathcal{F}_0$.

Nach 3.3 sind die ZV $\tilde{X}_t \in L^1(P)$ denn:

für $t \geq 0$ wähle $(r_n)_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \downarrow t$, dann 3.3:

$\{X_{r_n} : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar

Damit (→ 2.28, 3.8 a)) wegen $X_{r_n}(\omega) \to \tilde{X}_t(\omega)$ für $\omega \in \Omega_0$

(*) $\quad X_{r_n} \longrightarrow \tilde{X}_t$ P-f.s. und in $L^1(P)$.

insbes. ist $\tilde{X}_t \in L^1(P)$.

4) zeige $\tilde{X}_t = X_t$ P-f.s.: da X_t und $\tilde{X}_t$ $\mathcal{F}_t$-mb, betrachte

$F := \{X_t < \tilde{X}_t\} \in \mathcal{F}_t$. Dann für $r_n \downarrow t$

$$E(1_F X_t) = E(1_F X_{r_n}) \quad \underline{\forall n \in \mathbb{N}}$$

da X $(P, \mathbb{F})$-Martingal, also

$$E(1_F X_t) = \lim_n E(1_F X_{r_n}) \overset{(*)}{=} E(1_F \tilde{X}_t)$$

wegen (*). Notw. ist dann $F = \{X_t < \tilde{X}_t\}$ eine P-Nullmenge, genauso für $\{X_t > \tilde{X}_t\}$.

Also ist $\tilde{X}$ eine <u>Modifikation</u> von X.

5) $\tilde{X}$ ist ein $(P, \mathbb{F})$-Martingal: Für $s < t$ und $F \in \mathcal{F}_s$

weiter 'Modifikation'

wähle Folgen $(s_n)_n, (t_n)_n$ in $\mathbb{Q}$ mit $s_n \downarrow s$, $t_n \downarrow t$, $s_n < t_n$

für alle n. Dann mit (X) und Martingaleigenschaft von X

$$E(1_F \tilde{X}_s) = \lim_n E(1_F X_{s_n})$$
$$= \lim_n E(1_F X_{t_n}) = E(1_F \tilde{X}_t).$$

5) Zeige noch: alle Pfade von $\tilde{X}$ sind càdlàg:

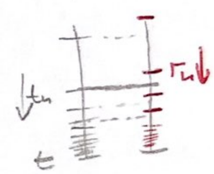
Falls $\omega \in \Omega_0$, so $\tilde{X}_t(\omega) = 0$ $\forall t \geq 0$, klar.

Sei $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ fest, betr. Folgen $(t_n)_n \subset [0,\infty)$ mit $t_n \downarrow t$ falls $t \geq 0$, $t_n \uparrow t$ falls $t > 0$.

Fall $t_n \downarrow t$: wähle sukzessiv in $n \in \mathbb{N}$ zu t_n ein $r_n \in \mathbb{Q}$ s.d.

$$|\tilde{X}_{t_n}(\omega) - X_{r_n}(\omega)| < 2^{-n}, \quad t_n < r_n \text{ für jedes } n; \quad r_n \downarrow t \text{ für } n \to \infty.$$

Dann n. Def. von Ω_0 $\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{r_n \downarrow t} X_{r_n}(\omega)$, also auch



$$\lim_n \tilde{X}_{t_n}(\omega) = \tilde{X}_t(\omega).$$

Fall $t_n \uparrow t$: wähle sukzessiv in $n \in \mathbb{N}$ zu t_n ein $r_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$|\tilde{X}_{t_n}(\omega) - X_{r_n}(\omega)| < 2^{-n}, \quad t_n < r_n < t \text{ für jedes } n, \quad r_n \uparrow t \text{ für } n \to \infty.$$

N. Def. von Ω_0 ex. $\tilde{X}_{t-}(\omega) = \lim_{r_n \uparrow t} X_{r_n}(\omega)$ in $\mathbb{R}$ (Schritt 2), also auch

$$\lim_n \tilde{X}_{t_n}(\omega) = \tilde{X}_{t-}(\omega).$$

□

Damit sind alle Pfade von $\tilde{X}$ càdlàg.

3.9' Bem.: Bew. zeigt auch: für jedes $t > 0$ ist

$$\tilde{X}_{t-} := 1_{\Omega \setminus \Omega_0} \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s \in \mathbb{Q}^+}} X_s = \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s \in \mathbb{R}^+}} \tilde{X}_s$$

eine $\mathcal{F}_{t-}$-mb ZV, $\mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s$, und in $L^1(P)$ wegen gleichgradiger Integrierbarkeit 3.3. □

Zur Verallgemeinerung des Satzes auf Submartingale benutze

3.10 HS: Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Submart. bez. $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Für $t \geq 0$ betrachte fallende Folge $(r_n)_n$ mit $r_n \downarrow t$. Dann
$$\{ X_{r_n} : n \geq 1 \} \text{ ist gleichgradig integrierbar.}$$

vgl 3.3, 3.3'

Bew: 0) Da X Submartingal, $(r_n)_n$ fallend, $r_n \geq t$, ist

(+) $$E(X_{r_n}) \xrightarrow{n\to\infty} : \alpha \qquad (\alpha \geq E(X_t), \text{ wegen } \text{'}\geq\text{'}!)$$

eine konvergente Folge (mon. fallend mit unterer Schr. $E(X_t)$).

1) Zeige zuerst: es gilt

(++) $$\sup_n E(|X_{r_n}|) < \infty .$$

Zeige dazu $|X_{r_n}| = X_{r_n}^+ + X_{r_n}^-$ für alle n. Zuerst gilt
$$E(X_{r_n}^+) = \int_{\{X_{r_n}>0\}} X_{r_n} \, dP \underset{r_n < r_1}{\overset{\text{Subm.}}{\leq}} \int_{\{X_{r_n}>0\}} X_{r_1} \, dP \leq E(|X_{r_1}|) < \infty ,$$
für alle n. Weiter wegen $X_{r_n} = X_{r_n}^+ - X_{r_n}^-$
$$E(X_{r_n}^-) = - E(X_{r_n}) + E(X_{r_n}^+)$$
so dass mit (+)
$$\begin{cases} \sup_n E(X_{r_n}^+) \leq E(|X_{r_1}|) < \infty \\ E(X_{r_n}) \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \end{cases}$$
auch gilt
$$\sup_n E(X_{r_n}^-) < \infty .$$
Damit ist (++) bewiesen.

18.5.20

2) zeige: die Folge der Positivteile $(X^+_{r_n})_n$ ist gleichgradig integr.

zum Beweis beachte zuerst, daß für jedes $c > 0$ gilt

$$(*) \qquad P(|X_{r_n}| > c) \le \frac{1}{c} \underbrace{\sup_n E(|X_{r_n}|)}_{< \infty} .$$

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wegen $X_{r_1} \in L^1(P)$ wähle ein $c_1 < \infty$ so daß

$$(*1) \qquad \int_{\{|X_{r_1}| > c_1\}} |X_{r_1}| \, dP < \varepsilon .$$

Danach wähle $c_2 < \infty$ so daß wegen $(*)$ und $(++)$

$$(*2) \qquad c_1 \cdot \sup_n P(|X_{r_n}| > c_2) < \varepsilon .$$

Mit diesen $c_i = c_i(\varepsilon)$, $i = 1,2$:

$$\int_{\{|X_{r_n}| > c_2\}} X^+_{r_n} \, dP = \int_{\{X_{r_n} > c_2\}} X_{r_n} \, dP$$

$$\le \int_{\{X_{r_n} > c_2\}} X_{r_1} \, dP \qquad \left(\text{da } X \text{ submartingal und } r_n < r_1\right)$$

$$\le \int_{\{X_{r_n} > c_2\}} |X_{r_1}| \, dP$$

$$\le \int_{\{|X_{r_n}| > c_2\}} (|X_{r_1}| \vee c_1) \, dP$$

$$\le \underbrace{\int_{\{|X_{r_1}| > c_1\}} |X_{r_1}| \, dP}_{(*1)} + \underbrace{c_1 \cdot P(|X_{r_n}| > c_2)}_{(*2)}$$

$$< 2 \cdot \varepsilon$$

⟶

Also ex. für jedes $\varepsilon > 0$ ein $c_2 = c_2(\varepsilon)$ so dass

$$\sup_n \int_{\{|X_{r_n}| > c_2\}} X_{r_n}^+ \, dP < 2 \cdot \varepsilon .$$

damit ist $\{X_{r_n}^+ : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar.

3) zeige: die <u>Folge der Negativteile $(X_{r_n}^-)_n$</u> ist gleichgradig integr.

Mit $\alpha := \lim_n E(X_{r_n})$ aus (+) wähle n_0 so dass

$$(\diamond) \qquad \left| E(X_{r_{n_0}}) - \lim_n E(X_{r_n}) \right| < \varepsilon .$$

Stoch I 2.25': zu n_0 und ε existiert $\delta = \delta(n_0, \varepsilon) > 0$ so dass

$$(\times 1) \qquad A \in \mathcal{A},\ P(A) < \delta \implies \int_A |X_{r_{n_0}}| \, dP < \varepsilon$$

da $X_{r_{n_0}} \in L^1(P)$. Wegen $(*)$ ex. weiter $c = c(\delta, n_0, \varepsilon) < \infty$ so dass

$$(\times 2) \qquad \sup_n P(|X_{r_n}| > c) < \delta ,$$

Dann für $n \geq n_0$:

$$\int_{\{|X_{r_n}| > c\}} X_{r_n}^- \, dP = \int_{\{X_{r_n} < -c\}} (-X_{r_n}) \, dP$$

$$= -\left[E(X_{r_n}) - \int_{\{X_{r_n} \geq -c\}} X_{r_n} \, dP \right]$$

$$= \int_{\{X_{r_n} \geq -c\}} X_{r_n} \, dP - E(X_{r_n})$$

$$\underset{\binom{X \text{ Submart.}}{r_n < r_{n_0}}}{\leq} \int_{\{X_{r_n} \geq -c\}} X_{\underline{\underline{r_{n_0}}}} \, dP - E(X_{r_n})$$

$$\overset{\left(\substack{X \text{ submart.} \\ (r_n)_n \text{ fallend}}\right)}{\leq} \int_{\{X_{r_n} \geq -c\}} X_{r_{n_0}} \, dP - \underbrace{\lim_n E(X_{r_n})}_{(\diamond)}$$

$$\leq \underbrace{\int_{\{X_{r_n} \geq -c\}} X_{r_{n_0}} \, dP}_{} - \left[\underbrace{E(X_{n_0})}_{} - \varepsilon \right]$$

$$= \int_{\{X_{r_n} < -c\}} \underbrace{(-X_{r_{n_0}})}_{\leq |X_{r_{n_0}}|} \, dP + \varepsilon$$

$$\leq \underbrace{\int_{\{|X_{r_n}| > c\}} |X_{r_{n_0}}| \, dP}_{< \varepsilon \text{ wegen } (\times 1) \text{ und } (\times 2)} + \varepsilon$$

$$< 2 \cdot \varepsilon .$$

Also ex. für jedes $\varepsilon > 0$ ein $c < \infty$ so daß

$$\sup_n \int_{\{|X_{r_n}| > c\}} X_{r_n}^- \, dP < 2 \cdot \varepsilon .$$

Damit ist $\{ X_{r_n}^- : n \in \mathbb{N} \}$ gleichgradig integrierbar.

4) Schritte 2) und 3) zusammen zeigen:
$\{ X_{r_n} : n \in \mathbb{N} \}$ ist gleichgradig integrierbar. $\square$

Indem man den Beweis von 3.9 mit Hilfe des Lemmas 3.10 imitiert, erhält man

3.11 Hauptsatz Teil 2: Übl. Hyp. an $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$.

Del.-Meyer II Thm 4 S. 76

Sei $X=(X_t)_{t\geq 0}$ ein $(P,\mathbb{F})$-Submartingal mit

$$(\ast\ast) \qquad \mathbb{R}^+ \ni t \longrightarrow E(X_t) \text{ ist rechtsstetig.}$$

Dann gibt es zu X eine Modifikation $\widetilde{X}=(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ so daß

i) $\widetilde{X}$ ist $(P,\mathbb{F})$-Submartingal

ii) alle Pfade von $\widetilde{X}$ sind càdlàg.

Bew: Def. $\Omega_0 \in \mathcal{N}^P \subset \mathcal{F}_0$ wie in Bew. 3.9 setze

$$\widetilde{X}_t(\omega) := 1_{\Omega\setminus\Omega_0}(\omega) \lim_{\substack{r\downarrow t \\ r\in\mathbb{Q}}} X_r(\omega) .$$

Da X Submartingal, liefert HS 3.10 (statt 3.3 für Martingale, in Analogie zu Bew. Schritt 3) von 3.9): für $r_n \downarrow t$

$$(\ast) \begin{cases} \{X_{r_n} : n\in\mathbb{N}\} \text{ ist gleichgradig integrierbar} \\ X_{r_n} \longrightarrow \widetilde{X}_t \quad P\text{-f.s. und in } L^1(P) \end{cases}$$

Bew. Schritt 4) von 3.9 ändert sich wesentlich:

für $r_n \downarrow t$ und $F\in\mathcal{F}_t$, da X Submartingal:

$$E(1_F X_t) \overset{t<r_n}{\leq} E(1_F X_{r_n}) \quad \forall n.$$

Wende (*) an auf rechte Seite:

$$E(1_F X_t) \le E(1_F \tilde{X}_t).$$

Dies gilt für alle $F \in \mathcal{F}_t$, also

$$X_t \le \tilde{X}_t \quad P\text{-f.s.}$$

Jetzt greift Bedingung (∞): wenn

$$t \to E(X_t) \ \underline{\text{rechtsstetig}},$$

dann für $r_n \downarrow t$

$$E(X_t) = \lim_n E(X_{r_n}) \overset{(*)}{=} E(\tilde{X}_t).$$

Aus

$$X_t \le \tilde{X}_t \ P\text{-f.s.}, \quad E(\tilde{X}_t - X_t) = 0$$

folgt aber

$$X_t = \tilde{X}_t \quad P\text{-f.s.}$$

Damit ist $\tilde{X}$ eine Modifikation von X unter Bed. (∞).

Bew.schritt 5) von 3.9 bleibt dann unverändert gültig. □