B. Submartingale von Klasse [LD]

<u>3.11' Wdh:</u> $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, P)$, $\mathbb{F}$ r.s.

schreibe

$\mathcal{T}_n^f$:= Klasse aller $\mathbb{F}$-St, die nur endl. viele Werte annehmen, diese alle in $[0,n]$

$\mathcal{T}_n$:= Klasse aller $\mathbb{F}$-St m.W. in $[0,n]$

Ein $(P,\mathbb{F})$-Submartingal $X=(X_t)_{t\ge 0}$ ist von Klasse [LD] falls $\{X_T : T\in\mathcal{T}_n^f\}$ ist gleichgradig integrierbar, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(→ 3.4, 3.5, 3.5'). 'X càdlàg' bedeutet: <u>alle</u> Pfade càdlàg.

<u>3.11'' HS:</u> Das System $\mathcal{G}(\mathbb{F})$

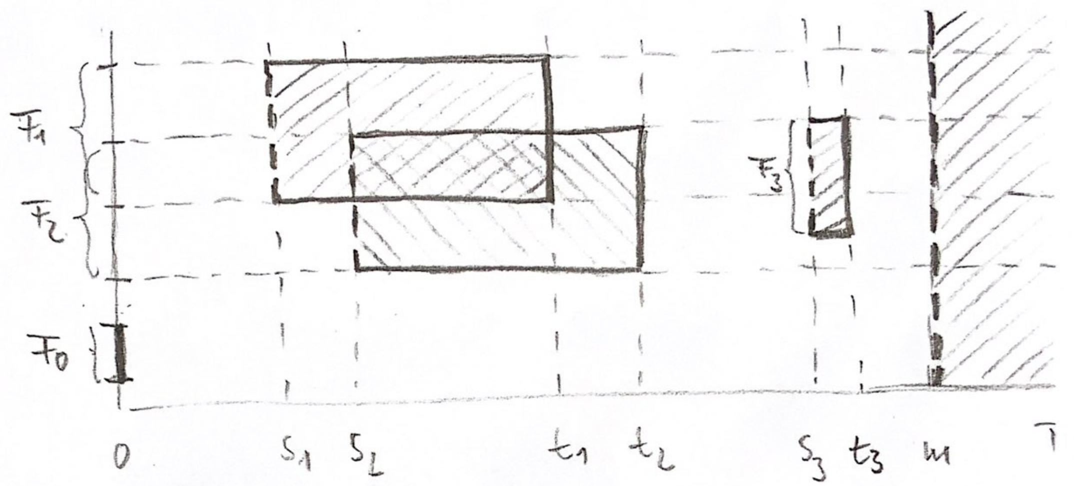
- alle endlichen Vereinigungen vorhersehbarer RE $\bigcup_{i=1}^{\ell} R_i$, $R_i\in\mathcal{R}(\mathbb{F})$,
- dazu $]m,\infty[\times\Omega$, $m\in\mathbb{N}$

ist eine <u>Algebra</u> von TM von $\mathbb{R}^+\times\Omega$, welche $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ erzeugt.

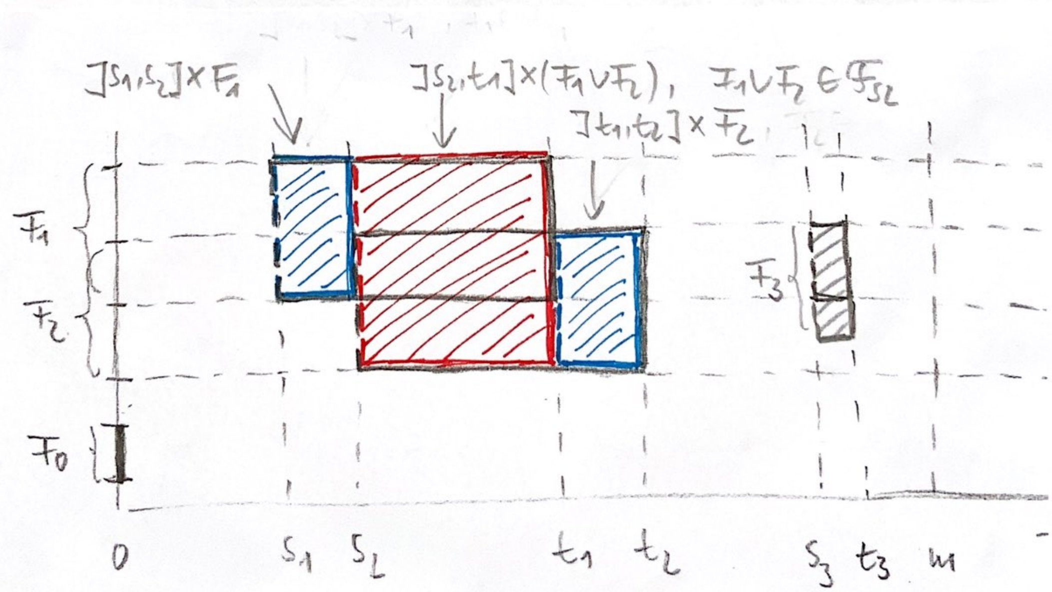
<u>Bew:</u> wegen $\mathcal{R}(\mathbb{F})\subset\mathcal{G}(\mathbb{F})\subset\mathcal{P}(\mathbb{F})$ ist $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ ein Erzeuger der σ-Alg. $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ der vorhersehbaren Mengen in $\mathbb{R}^+\times\Omega$. Prüfe, daß $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ eine <u>Algebra</u> ist:

1) Jede endliche Vereinigung von RE kann als endliche disjunkte Vereinigung geschrieben werden:

Ausgehend von $R_i =]s_i,t_i] \times F_i$, $F_i \in \mathfrak{F}_{s_i}$:



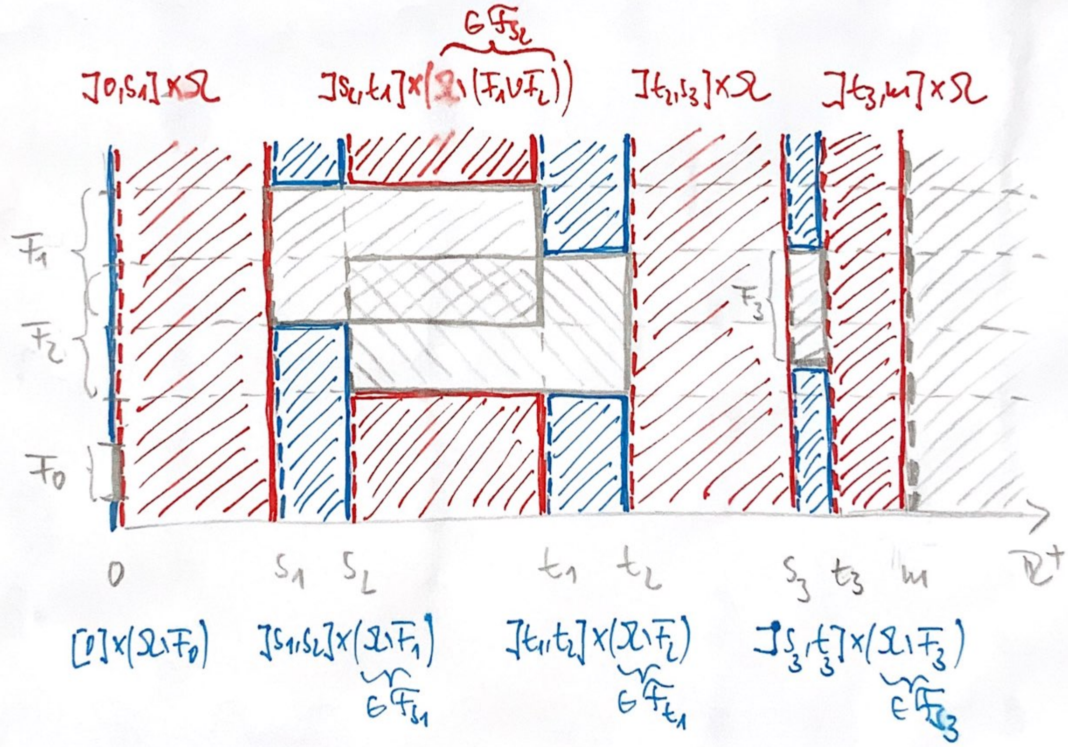
forme um:



insbesondere kann $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ geschrieben werden als

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{alle endl. \underline{disjunkten} Vereinigungen von RE} \\ \dot{\bigcup}_{j=1}^{\ell} R_j,\ R_i \in \mathcal{R}(\mathbb{F}), \\ \text{oder }]m,\infty[\times\Omega,\ m\in\mathbb{N} \end{array}\right.$

2) $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ ist ^{c}-stabil, insbesondere ist für $A\in\mathcal{G}(\mathbb{F})$ A^c als TM von $\mathbb{R}^+\times\Omega$ wieder von Form (*):



3) Genauso sieht man: $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ ist stabil bez. Operationen '$\setminus$', '$\bigcap_{\text{endl}}$', '$\bigcup_{\text{endl}}$', insbes. ist $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ eine Algebra. $\square$

Vor dem angestrebten Hauptsatz ein Hilfssatz:

3.11'' HS: Betrachte Stoppzeiten $S_n \le T_n$ in $\mathcal{T}_N^f$,

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_n)_n \text{ nichtfallend}, (T_n)_n \text{ nichtwachsend}, \\ A_n :=]\!] S_n, T_n]\!] \downarrow \emptyset \text{ für } n \to \infty \end{array} \right.$$

wobei alle T_n vorhersehbar. Ist X ein Submartingal, càdlàg und von Klasse [LD], so gilt

$$\lim_n E(X_{T_n} - X_{S_n}) = 0 .$$

Bew.: i) Zu $(S_n)_n \subset \mathcal{T}_N^f$ ex. $(\tilde{S}_n)_n \subset \mathcal{T}_N^f$ so daß

$$(\diamond) \left\{ \begin{array}{l} S_n \le \tilde{S}_n \le T_n , \quad S_n < \tilde{S}_n \le T_n \text{ auf } \{ S_n < T_n \} , \\ 0 \le E(X_{\tilde{S}_n} - X_{S_n}) < 2^{-n} , \quad n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Dies ist möglich da X von Klasse [LD], also

$$\{ X_{(S_n+\varepsilon)\wedge T_n} : \varepsilon > 0 \} \text{ gleichgradig integrabel}$$

als TM von $\{ X_\tau : \tau \in \mathcal{T}_N^f \}$ gleichgr. integr. n. Def. [LD].

Da X càdlàg, gilt

$$X_{S_n} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} X_{(S_n+\varepsilon)\wedge T_n} \text{ auf } \Omega ,$$

gleichgr. Int. zeigt

$$X_{(S_n+\varepsilon)\wedge T_n} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} X_{S_n} \text{ P-fs und in } L^1(P) .$$

Dies liefert $(\diamond)$ mit

(⋄⋄) $\tilde{S}_n := (S_n + \varepsilon(n)) \wedge T_n$, $\varepsilon(n) > 0$ geeignet.

Beachte: da $\varepsilon(n) > 0$, ist $(S_n + \varepsilon(n))_n$ eine Folge vorhersehbarer $\mathbb{F}$-St; nach Vor. über $(T_n)_n$ gilt mit 2.8':

$$\tilde{S}_n \text{ ist } \underline{\text{vhs}}\ \mathbb{F}\text{-St},\ n \in \mathbb{N}.$$

ii) Für $S_n, \tilde{S}_n, T_n$ wie in i) konstruiert gilt

(⋄⋄⋄) $$1_{]\!]\tilde{S}_n, T_n]\!]} \le 1_{\{\tilde{S}_n < T_n\}} 1_{[\![\tilde{S}_n, T_n]\!]} \le 1_{]\!]S_n, T_n]\!]}$$

Bew: $]\!]\tilde{S}_n, T]\!],]\!]S_n, T_n]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ nach 2.4;

2.7 + 2.8: $[\![\tilde{S}_n, T_n]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ da $\tilde{S}_n$ vhs,

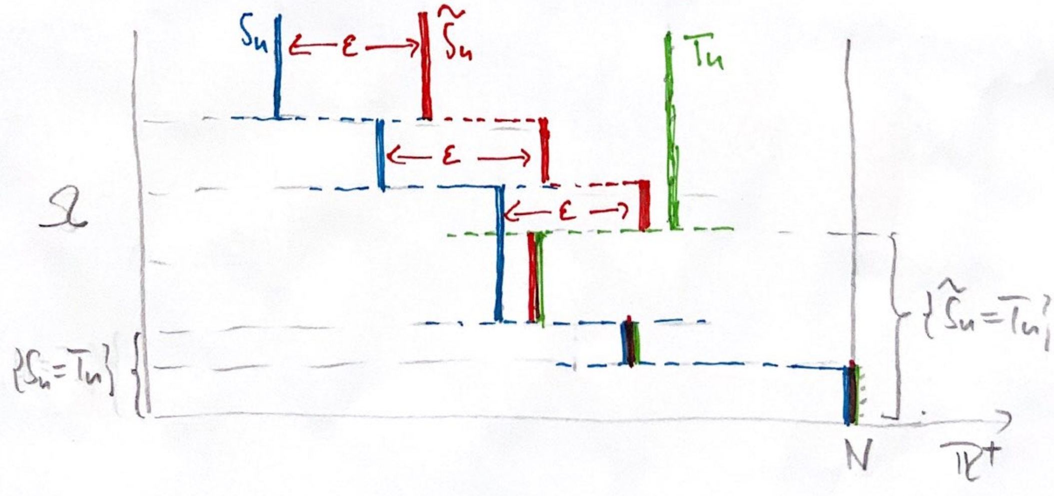
2.24: $\tilde{S}_n \le T_n$, $\tilde{S}_n$ und T_n sind vhs, also

$$\{\tilde{S}_n < T_n\} = \{\tilde{S}_n \neq T_n\} \in \mathcal{F}_{(\tilde{S}_n)-}$$

und nach 2.25

$$1_{\{\tilde{S}_n < T_n\}} 1_{[\![\tilde{S}_n, T_n]\!]} \quad \text{vorhersehbar.}$$

Die Inklusionen ergeben sich aus



iii) Für $S_n, \hat{S}_n, T_n$ wie in Schritt i) konstruiert gilt nach Vor.

$$A_n =]\!] S_n, T_n]\!] \downarrow \emptyset$$

für $n \to \infty$. Da $(S_n)_n, (T_n)_n$ in $\mathcal{T}_N^f$, $S_n \uparrow$, $T_n \downarrow$, da X Submartingal, ist

$$E(X_{T_n} - X_{S_n}) \text{ mon. fallend für } n \to \infty.$$

Wir werden zeigen:

($\square$) es gibt ∞ viele $j \in \mathbb{N}$ so daß $\hat{S}_j = T_j$ auf Ω,

dann ist wegen Wahl von $(\hat{S}_n)_n$ in ($\diamond$) die Beh.

$$\lim_n E(X_{T_n} - X_{S_n}) = 0$$

bewiesen und der Bew. von 3.12' abgeschlossen.

iii) Betrachte mit ($\diamond$), ($\diamond\diamond$), ($\diamond\diamond\diamond$)

$$\Pi_1(n) := \{ t \in [0,N] : \text{es ex. } \omega \in \Omega \text{ so daß } S_n(\omega) < t \leq T_n(\omega) \}$$

und

$$\Pi_2(n) := \{ t \in [0,N] : \text{es ex. } \omega \in \Omega \text{ so daß } \tilde{S}_n(\omega) < T_n(\omega) \text{ und } \tilde{S}_n(t) \leq t \leq T_n(\omega) \}$$

wegen $\hat{S}_n, T_n \in \mathcal{T}_N^f$

mögl. Werte $\hat{\lambda}_{n,i}$ ang. auf $\tilde{F}_{n,i} = \{ \hat{S}_n = \lambda_{n,i} \} \in \mathcal{F}_N$, $1 \leq i \leq l$

mögl. Werte $\gamma_{n,j}$ ang. auf $H_{n,j} := \{ T_n = \gamma_{n,j} \} \in \mathcal{F}_N$, $1 \leq i \leq m$

hat man

$\Pi_2(n) = \emptyset \iff$ für jedes Paar (i,j) mit $\lambda_{n,i} < \gamma_{n,j}$ gilt $\tilde{F}_{n,i} \cap H_{n,j} = \emptyset$

und $\Pi_2(n)$ ist ein Kompaktum in $[0,N]$:

$$\Pi_2(n) = \bigcup_{\substack{i=1,\dots,\ell,\ j=1,\dots,m \\ \tilde{\lambda}_{ni} < \vartheta_{nj} \\ \tilde{F}_{ni} \cap H_{nj} \neq \emptyset}} [\tilde{\lambda}_{ni}, \vartheta_{nj}]$$

Ang.: $\Pi_2(n) \neq \emptyset \ \forall n$. Fix $C \in \mathbb{N}$ bel. Dann ist

$$K_n := \bigcap_{j=C}^{n} \Pi_2(j), \quad n \geq C$$

eine fallende Folge nichtleerer Kompakta in $[0,N]$. Die Vor.

$$A_n =]\!]S_n, T_n]\!] \downarrow \emptyset$$

impliziert

$$\bigcap_{n \geq C} \Pi_1(n) = \emptyset$$

wegen $\Pi_2(n) \subset \Pi_1(n)$ also

$$\emptyset = \bigcap_{n \geq C} \Pi_2(n) = \bigcap_{n \geq C} K_n.$$

Cantor-Durchschnittssatz: es ex. ein $n_0 \geq C$ so daß

$$K_{n_0} = \emptyset,$$

↯, also Annahme absurd. Dabei gilt

$$\Pi_2(j) = \emptyset \quad \text{für ein } j \geq C$$

und das bedeutet nach Def. von $\Pi_2(j)$ wegen $\tilde{S}_j \leq T_j$

$$\exists j \geq C: \ \tilde{S}_j(\omega) = T_j(\omega) \ \forall \omega \in \Omega.$$

Dies gilt für jedes $C \in \mathbb{N}$, also

$$\tilde{S}_j = T_j \quad \text{für unendlich viele } j.$$

Damit ist $(\square)$ bewiesen, und der Bew. des HS abgeschlossen. $\square$

22.5.20