<u>3.12 Hauptsatz:</u> Sei X Submart. bzgl $(P, \mathbb{F})$, càdlàg.

a) Auf der Algebra $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ aus 3.11'' wird durch

$$\begin{cases} \lambda_X(\,]s,t]\times F) = E(1_F(X_t - X_s)) \quad , \quad s<t,\, F\in\mathcal{F}_s \\ \lambda_X(\{0\}\times F) = 0 \quad , \quad F\in\mathcal{F}_0 \\ \lambda_X(\,]m,\infty[\times\Omega) = \underbrace{(\sup_{k\in\mathbb{N}} E(X_k))}_{\leq\infty} - E(X_m) \quad , \; m\in\mathbb{N} \end{cases}$$

ein Inhalt definiert.

b) Ist X von Klasse [LD], so kann λ_X auf genau eine Weise zu einem σ-endlichen Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ fortgesetzt werden. Nenne dieses <u>Doléans-Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{F})$</u>, bezeichne auch dieses mit λ_X.

c) Ist X von Klasse [LD], so gilt für <u>bel.</u> $\mathbb{F}$-SZ in $\mathcal{T}_{[0,\infty]}$

$$S \leq T \;\Rightarrow\; \lambda_X(\,]\!]S,T]\!]) = E(X_T - X_S).$$

→ 2.22

<u>Bem:</u> i) nichtneg. Submart. sind von Klasse [LD], 3.4+3.5'.

ii) X Martingal: $\lambda_X \equiv 0$ trivial

iii) M Martingal mit $E(M_t^2)<\infty \;\forall\, 0\leq t<\infty$: dann ist $X := M^2$ nichtneg. Submart., also [LD].

wichtigste Anw. von 3.12: Doléansmaß λ_{M^2} zu $X=M^2$ wird die Klasse mögl. Integranden H in $\int H\,dM$ bestimmen!

Bew. von 3.12: a) Da jedes Element von $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ in der Form

$\dot{\bigcup}_{i=1}^{\ell} R_i$, $R_i \in \mathcal{R}(\mathbb{F})$, $\ell \geq 1$, dazu $]n,\infty[\times\Omega$, $n\in\mathbb{N}$

dargestellt werden kann, ist λ_X als Inhalt auf $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ wohldef.

Beachte zu a): Ist

$$R =]s,t]\times F\,,\quad s<t\leq N,\quad F\in\mathcal{F}_s$$

ein RE, so gilt $R =]\!]S,T]\!]$ für $\mathbb{F}$-SZ

$$S := s1_F + N1_{F^c}\,,\quad T = t\cdot 1_F + N1_{F^c}$$

und T ist vlls $\mathbb{F}$-SZ wegen $T = (\underbrace{S+(t-s)}_{\text{vlls SZ}}) \wedge \underbrace{N}_{\text{vlls SZ}}$.

Da $S,T\in\mathcal{T}_N^f$, gilt

$$\lambda_X(]\!]S,T]\!]) = \lambda_X(R) \overset{\text{Def}}{=} E(1_F(X_t - X_s)) \overset{\mathcal{T}_N^f}{=} E(X_T - X_S).$$

b) o) Vorbemerkung: Reicht Bew. in Restriktion auf $[0,N]\times\Omega$, $N\in\mathbb{N}$; danach zusammenkleben.

i) Sei $N\in\mathbb{N}$ fest. Der Bew. von HS 3.11''' läuft (bis auf komplexere Notation) genauso für endliche disjunkte Vereinigungen

$\longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{A}_n = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{l(n)}}]\!] S_{ni}, T_{ni}]\!] \quad \downarrow \emptyset \quad \text{für } n \to \infty \\ S_{ni} \le T_{ni} \le N \text{ in } \mathcal{T}_N^f, \quad T_{ni} \ \underline{\text{vorhersehbar}} \end{array}\right.$$

und zeigt

$$\lim_n \Big(\sum_{i=1}^{l(n)} E(X_{T_{ni}} - X_{S_{ni}}) \Big) = 0 .$$

ii) Sei $N \in \mathbb{N}$ fest. Betr. eine Folge $(A_n)_n$ in $\mathcal{G}(\mathbb{F})$ in Einschränkung auf $[0,N] \times \Omega$:

$$\left\{\begin{array}{l} A_n = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{l(n)}} R_{ni} \quad \text{(wegen Restr. auf } [0,N]\times\Omega \text{ braucht man keine }]n,\infty[\times\Omega, n\in\mathbb{N}) \\ R_{ni} =]s_{ni}, t_{ni}] \times F_{ni}, \quad s_{ni} < t_{ni} \le N, \ F_{ni} \in \mathcal{F}_{s_i} \\ \text{oder } R_{ni} = \{0\} \times F_{ni}, \ F_{ni} \in \mathcal{F}_0 . \\ A_n \downarrow \emptyset \quad \text{für } n \to \infty \end{array}\right.$$

Beachte: für $R_{ni} =]s_{ni}, t_{ni}] \times F_{ni}$, $s_{ni} < t_{ni}$, $F_{ni} \in \mathcal{F}_{s_{ni}}$ gilt $R_{ni} =]\!] S_{ni}, T_{ni}]\!]$ mit $\mathbb{F}$-SZ

$$\left\{\begin{array}{ll} S_{ni} := s_{ni} 1_{F_{ni}} + N 1_{F_{ni}^c} & \text{in } \mathcal{T}_N^f \\ T_{ni} := t_{ni} 1_{F_{ni}} + N 1_{F_{ni}^c} & \underline{\text{vhs}}, \text{ in } \mathcal{T}_N^f . \end{array}\right.$$

Mit Def. von λ_X nach a) hat man also wegen b) i)

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_X(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{l(n)} E(X_{T_{ni}} - X_{S_{ni}}) = 0 .$$

In Einschränkung auf $[0,N]\times\Omega$ ist damit λ_X σ-stetig in $\emptyset$. Also kann in Einschränkung auf $[0,N]\times\Omega$ λ_X in eindeutiger Weise zu einem endlichen Maß auf

$$\{A\cap([0,N]\times\Omega) : A\in\mathcal{P}(\mathbb{F})\}$$

fortgesetzt werden. Dies gilt für jedes $N\in\mathbb{N}$.

iii) Zusammenkleben in $N\in\mathbb{N}$ schließt Bew. von b) ab.

c) Seien jetzt $S\le T$ bel. $\mathbb{F}$-SZ in $\mathcal{T}_N$. Dann

$$]\!]S,T]\!] \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \qquad (2.4)$$

$$]\!]S,T]\!] =]\!]S,N]\!] \setminus]\!]T,N]\!]$$

wobei die konstante Zeit N eine vhs SZ in $\mathcal{T}_N^f$. Es reicht also zu zeigen

$$\lambda_X(]\!]S,N]\!]) = E(X_N - X_S)$$

für X subm., càdlàg, Klasse [LD], $S\le N$. Def.

$$S_n := \sum_{j=0}^{N2^n-1} \frac{j+1}{2^n} 1_{\{\frac{j}{2^n}\le S<\frac{j+1}{2^n}\}} + N 1_{\{S=N\}}$$

dann gilt

$$S_n \ \mathbb{F}\text{-SZ in } \mathcal{T}_N^f,\ ]\!]S_n,N]\!]\in\mathcal{G}(\mathbb{F}).,\ S_n\downarrow S.$$

Da λ_X Maß, da X càdlàg und von Klasse [LD]:

$\{X_{S_n} : n\in\mathbb{N}\}$ ist gleichgradig integrierbar,

also

$$E(X_N - X_S) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{E(X_N - X_{S_n})}_{= \text{ nach a) oben}}$$

Aufst. Stetigkeit von λ_X auf $\mathcal{P}(\mathbb{F})$:

$$\lambda_X(]\!]S,N]\!]) = \lim_{n\to\infty} \lambda_X(]\!]S_n,N]\!]) \qquad \square$$

25.5.20

3.12' Satz: Sei X Submart. von Klasse [LD], càdlàg. Dann:

$$\{X_T : T \in \mathcal{T}_N\} \text{ ist gleichgradig integrierbar.}$$

Bew: 1) Vorüberlegung: sei $\mathcal{M} \subset L^1(P)$ gleichgradig integrierbar, sei $\overline{\mathcal{M}}$ der Abschluss von $\mathcal{M}$ in $L^1(P)$. Dann ist auch $\overline{\mathcal{M}}$ gleichgradig integrierbar.

Bew: Für $\mathcal{M}$ gleichgradig integr., $(f_n)_n$ in $\mathcal{M}$, $f_n \to f$ in $L^1(P)$ genügt zu zeigen ($\to$ Stoch I, 2.25, 2.25')

$$(X) \quad \int_{\{|f|>2K\}} |f|\, dP \le 2\|f-f_n\|_{L^1(P)} + \sup_n \int_{\{|f_n|>K\}} |f_n|\, dP$$

Aber

$$\text{— '' —} \le \int_{\{|f|>2K\}} |f_n|\, dP + \|f-f_n\|_{L^1(P)}$$

$$\le \int_{\{|f_n|>K\}} |f_n|\, dP + \int_{\{|f_n|\le K,\, |f|>2K\}} |f_n|\, dP + \|f-f_n\|_{L^1(P)}$$

wobei

$$\int_{\{|f_n|\le K,\, |f|>2K\}} |f_n|\, dP \le K \cdot P(|f_n - f|>K) \le E(|f-f_n|) = \|f-f_n\|_{L^1(P)}$$

womit (X) bewiesen ist.

2) Approx. von oben $T_n \downarrow T$ von $T \in \mathcal{T}_N$

$$T_n = \sum_{j=0}^{N2^n-1} \frac{j+1}{2^n} 1_{\{\frac{j}{2^n} \le T < \frac{j+1}{2^n}\}} + N 1_{\{T=N\}}$$

und gleichgr. Int. der $\{X_{T_n} : n \in \mathbb{N}\}$ wegen Klasse [LD] und càdlàg. □

vgl 11.15 in diskr. Zeit

3.13 Stoppsätze: seien $S \le T$ beschränkte $\mathbb{F}$-SZ.

a) ist X Submart. von Klasse [LD], càdlàg, so
$$E(X_T \mid \mathcal{F}_S) \ge X_S$$

b) ist X Martingal, càdlàg, so
$$E(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_S .$$

c) übl. Hyp: ist S in b) sogar eine $\mathbb{F}$-vhs SZ, so gilt
$$E(X_T \mid \mathcal{F}_{S-}) = X_{S-}$$

damit insbes. im Fall $S=T$:
$$E((\Delta X)_S \mid \mathcal{F}_{S-}) = 0 .$$

wichtige Aussage über Sprünge eines càdlàg Martingals über vhs SZ

Bew: Beachte: ein Mart. ist insbesondere ein Submart. von Klasse [LD], 3.5'.

a)+b): ist $F \in \mathcal{F}_S$, $S \le T$ und $T \in \mathcal{T}_{[0,N]}$, so nach 2.19 $S_F \wedge N$, $T_F \wedge N$ wieder $\mathbb{F}$-SZ; 3.12c):
$$E(1_F(X_T - X_S)) = \lambda_X\big(\overbrace{]\!]S_F\wedge N, T_F \wedge N]\!]}^{\in \mathcal{P}(\mathbb{F})}\big)$$
Maß λ_X auf $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ ist ≥ 0 falls X Submart., $\equiv 0$ falls X Mart..

c) sei $F \in \mathcal{F}_{S-}$, z.z. ist
$$E(1_F X_T) = E(1_F X_{S-}).$$
übl. Hyp: wähle ankündigende Folge $(S_n)_n$ für S, 2.15, 2.9.
wegen $S \le T \in \mathcal{T}_{[0,N]}$ gilt dann gleichgradige Int. von
$$\{X_{S_n} : n \ge 1\} \subset \{X_{\tilde S} : \tilde S \in \mathcal{T}_{[0,N]}\}$$
und 3.12'. Zugleich reicht es, den Erzeuger $\bigcup_n \mathcal{F}_{S_n}$ von $\mathcal{F}_{S-}$ zu betrachten, 2.20: für $F \in \mathcal{F}_{S_{n_0}}$ gilt aber

$$(\times) \qquad 0 = E(\mathbb{1}_F (X_T - X_{S_n})) \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

nach b), zugleich $\lim_n X_{S_n} = X_{S-}$ da Pfade von X càdlàg und $S_n \uparrow S$ in $\overline{T}_{[0,\infty]}$ (beachte Konv. $X_{0-} := X_0$).
Gleichgradige Integrierbarkeit der $(X_{S_n})_n$ und $(\times)$ liefern

$$E(\mathbb{1}_F (X_T - X_{S-})) = \lim_n E(\mathbb{1}_F (X_T - X_{S_n})) = 0. \qquad \boxed{}$$

---

vgl. 11.14 mehrdim. Zeit

<u>3.14 Folgerung:</u> Ist X Martingal / Submart. von rechts $[LD]$, càdlàg, so ist für bel. $\mathbb{F}$-SZ T der <u>zur Zeit T eingefrorene Prozess</u>

$$X^T := (X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$$

wieder Martingal / Submart. von rechts $[LD]$.

<u>Bew:</u> Für $s < t$ und $F \in \mathcal{F}_s$ ist zu zeigen

$$(\times) \qquad E(\mathbb{1}_F (X_{T\wedge t} - X_{T\wedge s})) \begin{cases} \geq 0 & X \text{ Submart.} \\ = 0 & X \text{ Mart.} \end{cases}$$

Zunächst gilt $F \cap \{s < T\} \in \mathcal{F}_{T\wedge s}$ wegen ($r \geq 0$ bel.)

$$(F \cap \{s<T\}) \cap \{T\wedge s \leq r\} = \begin{cases} \emptyset & r < s \\ F \cap \{s<T\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_r & s \leq r \end{cases}$$

$\Downarrow$ $r < s \Rightarrow T\wedge s \leq r$ auf $\{s<T\}$

Stoppsatz 3.13 für beschr. SZ $(T\wedge s) \leq (T\wedge t)$:

$$(\times\times) \qquad E(\underbrace{\mathbb{1}_{F\cap\{s<T\}}}_{\in \mathcal{F}_{T\wedge s}} (X_{T\wedge t} - X_{T\wedge s})) \begin{cases} \geq 0 & X \text{ Subm.} \\ = 0 & X \text{ Mart.} \end{cases}$$

weiter

$$X_{T\wedge t} - X_{T\wedge s} = 0 \quad \text{auf } \{T \leq s\}$$

also folgt $(\times)$ aus $(\times\times)$. $\square$

3.15 Folgerung: übl. Typ: ist X zugleich vorhersehbar und càdlàg-Martingal, so ist X stetig.

Bew: Da X càdlàg und vorhersehbar, 2.31:

$$\{\Delta X \neq 0\} = \dot{\bigcup_m} [\![S_m]\!] \,, \quad X = X_- + \sum_m (\Delta X)_{S_m} 1_{[\![S_m]\!]}$$

mit vorhersehbaren S_m. Mit X ist ΔX vorhersehbar, also $(\Delta X)_{S_m}$ $\mathcal{F}_{S_m-}$-mb, 2.23. Dann 3.13 c):

$$(\Delta X)_{S_m} = E((\Delta X)_{S_m} | \mathcal{F}_{S_m-}) = 0 \,.$$

Nach Abänderung der Pfade von X auf einer P-Nullmenge (diese in $\mathcal{F}_0$ wegen üb.) ist X stetig. □

Bisher fehlte immer ein gutes Bsp für völlig unerreichbare St:

3.16 Bsp: Die Sprungzeiten im Poissonprozeß sind völlig unerreichbare Stoppzeiten.

Bew: Sei $N = (N_t)_{t \geq 0}$ Poissonprozeß m. Par. $\lambda > 0$, alle Pfade rechtsstetig, stückw. konst, alle Sprünge von Höhe 1, (vgl. 13.14 (Teil II). Die Geschichte von X

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(N_r : 0 \le r \le t)$

ist rechtsstetig (ÜbBlatt 1, Aufg 1.2); und

$$M := (N_t - \lambda t)_{t \geq 0} \text{ ist } (P, \mathbb{F})\text{-Martingal.}$$

(Ü-Blatt 3, Aufg 3.1) wegen Unabhg. der Zuwächse.

2) komplettiere: $\mathcal{N}^P :=$ Menge der TM von P-Nullm. aus Ω,

$\overline{\mathcal{F}_t}^P := \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{N}^P)$, $t \geq 0$, $\overline{\mathbb{F}}^P := (\overline{\mathcal{F}_t}^P)_{t \geq 0}$.

M wird $(P, \overline{\mathbb{F}}^P)$-Mart, Prozedur bereits erledigt nach 13.14.

3.13 zeigt nun: ist S eine $\overline{\mathbb{F}}$-vhs St, so

$$E((\Delta X)_S \mid \mathcal{F}_{S-}) = 0$$

3) Die Sprungzeitenfolge von M ist die Folge $(T_n)_n$ der Sprungzeiten des Poissonprozesses N, Sprunghöhe $= 1$ stets; deswegen

$$M = M_- + \sum_n 1 \cdot 1_{[\![T_n]\!]};$$

Ang., T_n wäre nicht völlig unerreichbar. Dann existierte eine vorhersehbare $\overline{\mathbb{F}}^P$-St S so daß

$$P(S = T_n < \infty) > 0 \iff P((\Delta M)_S = 1) > 0$$

Da ΔM 0-1-wertig:

$$P((\Delta M)_S = 1) = E((\Delta M)_S) = E(\underbrace{E((\Delta M)_S \mid \mathcal{F}_{S-})}_{=0 \text{ nach 3.13 c)}})$$

Also

$$P((\Delta M)_S = 1) = 0 \quad ↯,$$

also war Annahme absurd. Also gilt

$$T_n \text{ ist } \overline{\mathbb{F}}\text{-völlig unerreichbar}$$

und damit erst recht

$$T_n \text{ ist } \mathbb{F}\text{-völlig unerreichbar.}$$

□