Reinhard Höpfner, Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Korrektur zu Übungsaufgabe 3.4 und Lösungen zu 3.4 c)-f) **May 28, 2020**

Aufgabe 3.4 korrigiert: Gehe aus von einer $\mathcal{E}xp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen $T : \Omega \to (0, \infty)$, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Setze

$$X := (X_t)_{t\geq 0} \quad , \quad X \; := \; 1_{[[T\,,\infty[[} \quad , \quad I\!\!F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \quad , \quad \mathcal{F}_t := \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)\;.$$

a) Die Filtration $I\!\!F$ ist rechtsstetig, und X ist ein $I\!\!F$-adaptierter stochastischer Prozess.

b) T ist eine $I\!\!F$-Stopzeit.

c) Es gilt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{r>t} \sigma(T \wedge r) = \mathcal{F}_{T\wedge t}$, und $\sigma(T) = \mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_T = \bigvee_t \mathcal{F}_t$.

d) Für alle $t \geq 0$ und alle $h > 0$ gilt

$$E\,(X_{t+h} - X_t \mid \mathcal{F}_t) \;=\; P(\,T \in]t, t+h] \mid T > t\,) \cdot 1_{\{0\}}(X_t) \;+\; 0 \cdot 1_{\{1\}}(X_t)$$

e) Für alle $t \geq 0$ und alle $h > 0$ gilt

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} E\,(X_{t+h} - X_t \mid \mathcal{F}_t) \;=\; \lambda\, 1_{\{0\}}(X_t)$$

f) Der Prozess $M := (M_t)_{t\geq 0}$

$$M_t \;:=\; X_t \;-\; \lambda \int_0^t 1_{\{0\}}(X_s)\, ds \;=\; X_t \;-\; \lambda \cdot (t \wedge T)$$

ist ein $(P, I\!\!F)$-Martingal.

Lösung zu 3.4 c) : Da alle Pfade von X rechtsstetig und stückweise konstant, ist die Geschichte $I\!\!F$ von X rechtsstetig (ÜA 1.2).

i) Nachweis der ersten Behauptung: da T strikt positiv, gilt $X_0 \equiv 0$, also $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

ii) Nachweis der dritten Behauptung: nach 2.18 a) und Definition von $\mathcal{F}_T$ gilt

$$\sigma(T) \;\subset\; \mathcal{F}_{T-} \;\subset\; \mathcal{F}_T \;\subset\; \bigvee_{0\leq t<\infty} \mathcal{F}_t\;;$$

andererseits wird $\bigvee\limits_{0\le t<\infty} \mathcal{F}_t$ erzeugt von den $\{X_t = 0\} = \{T > t\}$, $0 \le t < \infty$, also auch

$$\bigvee_{0\le t<\infty} \mathcal{F}_t \;\subset\; \sigma(T)\;;$$

zusammen gilt überall '='.

iii) Wir zeigen die zweite Behauptung (korrigierte Form). Sei t fest. Nach Definition wird $\mathcal{F}_t$ erzeugt von den Ereignissen $\{X_s = 1\} = \{T \le s\}$, $0 \le s \le t$, damit

$$\mathcal{F}_t \;\subset\; \bigcap_{r>t} \sigma(T\wedge r)\;;$$

da $T \wedge r$ als $\mathbb{F}$-Stopzeit $\mathcal{F}_{T\wedge r}$-messbar nach 2.17' a), weiter

$$\sigma(T\wedge r) \;\subset\; \mathcal{F}_{T\wedge r}\;;$$

da $\mathbb{F}$ rechtsstetig und $T\wedge r \downarrow T \wedge t$ für $r \downarrow t$, zeigt 2.17' d)

$$\bigcap_{r>t} \mathcal{F}_{T\wedge r} \;=\; \mathcal{F}_{T\wedge t}\;;$$

und der Vergleich $T \wedge t \le t$ zwischen $\mathbb{F}$-Stopzeiten zeigt $\mathcal{F}_{T\wedge t} \subset \mathcal{F}_t$ nach 2.17' b). Zusammen gilt

$$\mathcal{F}_t \;=\; \bigcap_{r>t} \sigma(T\wedge r) \;=\; \bigcap_{r>t} \mathcal{F}_{T\wedge r} \;=\; \mathcal{F}_{T\wedge t} \;=\; \mathcal{F}_t\;.$$

Begründung für die Korrektur in 3.4 c): Es gilt im Sinne einer strikten Inklusion

$$\sigma(T\wedge t) \;\subset\; \mathcal{F}_{T\wedge t}\;,$$

denn der Zustand des ($\mathbb{F}$-optionalen und damit $\mathbb{F}$-progressiven) Prozesses X zur Zeit $T \wedge t$ ist eine $\mathcal{F}_{T\wedge t}$-messbare ZV, 2.22, also

$$\{T > t\} \;=\; \{X_{T\wedge t} = 0\} \;\in\; \mathcal{F}_{T\wedge t}$$

die σ-Algebra $\sigma(T\wedge t) = \{\{T\wedge t \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ kennt aber nur das Ereignis $\{T \ge t\}$ und erlaubt nicht, zwischen $\{T > t\}$ und $\{T = t\}$ zu unterscheiden.

Lösung zu 3.4 d)+e) : Die Abbildung auf der rechten Seite in d)

$$\omega \;\longrightarrow\; G(\omega) := P\,(\,T \in]t, t+h] \mid T > t\,)\; 1_{\{X_t=0\}}(\omega)$$

ist $\mathcal{F}_t$-messbar. Wegen $\{T \le s\} = \{X_s = 1\}$ und $\{T > t\} = \{X_t = 0\}$ ist das System

$$\mathcal{C} \;:=\; \{\,\{T \le s\}\,,\, 0 \le s \le t\,,\; \{T > t\}\,\}$$

ein Erzeuger von $\mathcal{F}_t$. Zum Nachweis der Behauptung

$$E\left(1_F(X_{t+h}-X_t)\right) \;=\; E\left(1_F\, G\right) \quad \text{für alle } F\in\mathcal{F}_t$$

genügt es also zu zeigen

$$E\left(1_F(X_{t+h}-X_t)\right) \;=\; E\left(1_F\, G\right) \quad \text{für alle } F\in\mathcal{C}\;.$$

Man hat aber

$$E\left(1_F(X_{t+h}-X_t)\right) \;=\; 0 \;=\; E\left(1_F\, G\right) \quad \text{falls} \quad F=\{T\le s\}\,,\, 0\le s\le t$$

und für $F=\{T>t\}$ gilt

$$E\left(1_{\{T>t\}}\, 1_{\{t<T<t+h\}}\right) \;=\; P\left(T\in]t,t+h]\mid T>t\right)P\left(T>t\right) \;=\; E\left(1_{\{T>t\}}\, G\right)\;.$$

Damit ist die Behauptung d) bewiesen. Die Behauptung e) folgt nun aus d) und

$$P\left(T\in]t,t+h]\mid T>t\right) \;=\; \frac{e^{-\lambda t}-e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \;=\; 1-e^{-\lambda h} \quad \overset{h\downarrow 0}{\sim} \quad \lambda h\;.$$

Lösung zu 3.4 f) : Sei $s<t$ fest. Zerlege mit $t_{n,j}:=s+(t-s)\frac{j}{2^n}\,,\; 0\le j\le 2^n$:

$$X_t-X_s \;=\; \sum_{j=0}^{2^n-1}\left(X_{t_{n,j+1}}-X_{t_{n,j}}\right)$$

wobei

$$E\left(X_{t_{n,j+1}}-X_{t_{n,j}}\mid \mathcal{F}_{t_{n,j}}\right) \;=\; \left(1-e^{-\lambda\frac{t-s}{2^n}}\right) 1_{\{X_{t_{n,j}}=0\}}$$

wegen 3.4 d) und

$$P\left(T\in]t_{n,j},t_{n,j+1}]\mid T>t_{n,j}\right) \;=\; 1-e^{-\lambda\frac{t-s}{2^n}}\;.$$

Für $s<t$ und $F\in\mathcal{F}_s$ gilt damit

$$\begin{aligned}
E\left(1_F(X_t-X_s)\right) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} E\left(1_F\, E\left(X_{t_{n,j+1}}-X_{t_{n,j}}\mid \mathcal{F}_{t_{n,j}}\right)\right)\\
&= \left(1-e^{-\lambda\frac{t-s}{2^n}}\right) E\left(1_F \sum_{j=0}^{2^n-1} 1_{\{X_{t_{n,j}}=0\}}\right)\\
&= \frac{1-e^{-\lambda\frac{t-s}{2^n}}}{\lambda\frac{t-s}{2^n}} E\left(1_F\,\lambda \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{t-s}{2^n} 1_{\{X_{t_{n,j}}=0\}}\right)\\
&= \frac{1-e^{-\lambda\frac{t-s}{2^n}}}{\lambda\frac{t-s}{2^n}} E\left(1_F\,\lambda \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_s^t 1_{\{X_{t_{n,j}}=0\}} 1_{]t_{n,j},t_{n,j+1}]}(v)\, dv\right)\;.
\end{aligned}$$

Dominierte Konvergenz und $X = 1_{[[T,\infty[[}$ cadlag zeigen auf jedem ω-Pfad

$$\int_s^t \left[\sum_{j=0}^{2^n-1} 1_{\{X_{t_{n,j}}=0\}} 1_{]t_{n,j},t_{n,j+1}]}(v) \right] dv \quad \longrightarrow \quad \int_s^t 1_{[[0,T[[}(v)\, dv \;=\; \int_s^t 1_{\{0\}}(X_v)\, dv$$

so dass im Limes für $n \to \infty$ wieder mit dominierter Konvergenz

$$E\left(1_F(X_t - X_s)\right) \;=\; E\left(1_F\, \lambda \int_s^t 1_{\{0\}}(X_v)\, dv\right) \, .$$

Folglich ist

$$M \;:=\; \left(X_t - \lambda \int_0^t 1_{\{0\}}(X_v)\, dv \right)_{t \ge 0}$$

ein $(P, \mathbb{F})$-Martingal.